D. SIVOUKHINE

COURS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE

1

MÉCANIQUE

ÉDITIONS MIR

Д. В. СИВУХИН

ОБЩИЙ КУРС ФИЗИКИ

Том I

МЕХАНИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»,
МОСКВА

D. SIVOUKHINE

COURS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE

TOME I

MÉCANIQUE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par SERGUEÏ MEDVÊDEV

На французском языке

AVANT-PROPOS

Le présent ouvrage est le développement d'un cours que nous avons exposé pendant près de vingt ans aux étudiants de l'Institut de Physique technique de Moscou. Pendant cette période ni le plan général du cours, ni l'approche de l'exposé des questions fondamentales n'ont subi de modifications importantes. Mais chaque année nous éprouvions le besoin d'y inclure de nouvelles questions et de nouveaux exemples se substituant aux précédents que nous étions obligés d'éliminer par manque de temps.

Le lecteur trouvera dans cet ouvrage la presque totalité des questions abordées au cours de ces années, ainsi que d'autres qui ne l'ont pas été. On y a inclus aussi nombre de problèmes avec indication des réponses ou des procédés de résolution. Nous estimons que tout cela sera utile aux étudiants désireux d'approfondir leurs connaissances en physique et contribuera à leur formation de physicien. L'objectif est de les conduire à formuler et à résoudre eux-mêmes les questions de principe et les problèmes d'application. Il est bien évident que tout ce que nous avons jugé utile d'inclure dans cet ouvrage ne saurait faire partie du programme obligatoire. Pour la commodité du lecteur les questions les plus importantes sont imprimées en caractères courants et les autres en petits caractères.

L'enseignement oral était toujours complété par des démonstrations qui sont, avec les travaux pratiques, le moyen le plus efficace d'initier les étudiants aux phénomènes physiques. Aucune description, aussi précise et aussi imagée soit-elle, ne saurait les remplacer. Les démonstrations en salle de cours fournissant les premières données expérimentales permettent d'introduire de nouvelles notions, de procéder à des généralisations, de formuler les lois et les principes de la Physique. De plus, elles rompent la monotonie des exposés oraux et rendent les cours plus attrayants.

Dans cet ouvrage le but est tout autre ; les descriptions des expériences de démonstration y sont moins nombreuses et notablement plus schématiques. Ce qui importe ici c'est de bien dégager la signification physique et le contenu des principaux concepts et proposi-

tions de la physique. Une attention particulière est accordée à la fixation des limites de validité des lois physiques et des modèles idéalisés.

Dans le premier tome de notre ouvrage le lecteur trouvera un exposé systématique des fondements physiques de la mécanique classique non relativiste. Mais comme il est impossible d'exposer les fondements physiques de la mécanique sans établir de lien avec les autres parties de cette science, nous donnerons dès le premier tome quelques notions de la théorie de la relativité et de la mécanique quantique. On ne saurait autrement préciser la limite de validité de la mécanique classique non relativiste. Les quelques notions de mécanique quantique sont données très brièvement et sans aucune justification. Nous serons plus précis sur la mécanique relativiste ou mécanique de la théorie de la relativité. Ces exposés se fondent sur la variation de la masse avec la vitesse, que nous présentons comme un fait expérimental. Cela nous paraît être suffisant non seulement pour une étude qualitative, mais aussi pour l'étude quantitative des problèmes simples dont des exemples sont donnés ici. Les exposés systématiques des mécaniques relativiste et quantique seront présentés dans les autres tomes de notre ouvrage, à la suite de l'étude des phénomènes électriques et optiques.

Les tomes suivants seront consacrés à la thermodynamique, à la physique moléculaire, à l'électricité, à l'optique et à la physique atomique et nucléaire.

Nous avons adopté en qualité d'unités de mesure celles du système C.G.S. En mécanique, ces unités ne se distinguent pratiquement pas des unités du système international SI. La différence uniquement quantitative est déterminée par une différence des unités de longueur et de masse (dans le système SI le centimètre fait place au mètre et le gramme fait place au kilogramme). Ces différences n'affectent ni le sens des concepts ni la forme des formules physiques; en mécanique les deux systèmes sont aussi commodes l'un que l'autre. Il en va tout autrement dans l'électrodynamique. Dans le système SI l'état électrique du vide est caractérisé par quatre vecteurs: l'intensité **E** et l'induction **D** du champ électrique, l'intensité **H** et l'induction **B** du champ magnétique. Du point de vue de la physique c'est une complication inutile et contre nature. Pour caractériser le vide, deux vecteurs suffisent — ceux que l'on introduit dans le système C.G.S. Dans ce système les quatre vecteurs **E**, **B**, **H**, **D** ont les mêmes dimensions tandis que dans le système SI leurs dimensions sont différentes, ce qui est aussi contre nature, puisque les champs électrique et magnétique sont intimement liés entre eux. C'est en électrodynamique relativiste que ce lien se trouve établi sous la forme la plus générale, puisqu'elle associe les vecteurs **E** et **B**, ainsi que les vecteurs **H** et **D** dans des tenseurs antisymétriques. Pour composer ces tenseurs dans le système SI, on est obligé de re-

courir à des facteurs dimensionnels pour homogénéiser les équations aux dimensions de leurs composantes. C'est une complication inutile. Le seul avantage du système SI par rapport au système physique C.G.S. est l'inclusion organique dans ce système de l'ampère, du volt, de l'ohm et de toutes les dérivées de ces unités qui, par suite d'aléas historiques, sont largement utilisées en électrotechnique. Mais c'est là un avantage pratique et non de principe. Comme les questions de mesures ne jouent dans notre cours qu'un rôle secondaire, il nous a paru indu de sacrifier à des besoins purement pratiques l'élégance et la logique des concepts et des formules de la physique tels qu'ils apparaissent dans le système C.G.S.

Cet ouvrage n'aurait jamais vu le jour si le professeur G. Gorélik, dirigeant la chaire de physique de l'Institut de physique technique de Moscou, ne m'avait chargé du cours de physique générale.

Les expériences de démonstration ont été conçues et réalisées par nos assistants à qui nous tenons à adresser nos remerciements.

Une partie notable des problèmes donnés dans ce cours sont au programme des examens et ont été conçus par mes collègues.

Le manuscrit du présent tome a été relu par les académiciens V. Ginzburg, B. Kadomtsev, M. Léontovitch, R. Sagdéev et les professeurs S. Guerstein et I. Iakovlev. Il a également fait l'objet d'une analyse approfondie à la chaire de physique générale de la faculté de mécanique et des mathématiques de l'Université de Moscou, dirigée par le professeur S. Strelkov.

Les remarques critiques, les conseils et les suggestions de toutes les personnes citées dans cet avant-propos ont grandement contribué à la mise au point de notre ouvrage. L'auteur tient à leur exprimer ici sa profonde gratitude.

D. Sivoukhine

INTRODUCTION

1. Chaque fois que l'on se propose d'étudier un ensemble de phénomènes naturels, il importe de préciser les lois ou les principes fondamentaux permettant d'expliquer les phénomènes connus et de prédire l'existence de phénomènes nouveaux. Cette approche de l'étude des phénomènes naturels est désignée sous le nom de *méthode des principes fondamentaux*. Cette méthode qui remonte à Newton (1643-1727) devint entre les mains d'Einstein (1879-1955) un extraordinaire instrument de progrès des connaissances.

Les lois ou principes fondamentaux ne se laissent pas démontrer par un raisonnement logique et leur validité n'est vérifiée que par l'expérience. L'expérience qui importe surtout doit tendre non pas à confirmer la justesse des principes eux-mêmes, mais à vérifier les conséquences qu'on peut en tirer. Aussi pourrait-on dire que les principes fondamentaux sont des *généralisations des faits expérimentaux*. Or, comme les expériences ne sauraient embrasser toutes les conditions imaginables d'évolution d'un phénomène et que toute expérience est entachée d'erreurs, *la méthode expérimentale* (qui est d'ailleurs la seule qui soit à notre disposition) *ne permet de confirmer la validité des principes fondamentaux que dans certaines limites connues aux erreurs expérimentales près.* A mesure que s'étend le champ des investigations des phénomènes naturels et que s'améliore la précision des mesures, les limites de validité des principes peuvent être étendues. Il peut arriver cependant que lorsqu'on dépasse les limites connues, certains principes fondamentaux cessent d'être valables. On doit procéder alors à leur généralisation ou les remplacer par d'autres possédant un domaine de validité plus étendu. Les anciens principes conservent cependant toute leur valeur dans leur domaine de pertinence. L'attrait et la puissance de la méthode des principes fondamentaux résident en ce que toutes les données que l'on peut en tirer par la logique ou les mathématiques sont véridiques dans les limites où les principes établis par l'expérience sont vérifiés, à la précision des mesures près.

2. La *Mécanique* se développa avant les autres parties de la physique. *Elle a pour objet l'étude du mouvement et de l'équilibre des corps. Dans un sens large, le mouvement de la matière correspond aux différents changements qu'elle peut subir. En Mécanique on entend par mouvement sa forme la plus simple, celle qui concerne le déplacement d'un corps par rapport à d'autres corps.* Les principes de la Mécanique ont été formulés pour la première fois par Newton dans

son traité intitulé « Principes mathématiques de philosophie naturelle », dont la première édition remonte à 1687. Il est vrai que Newton avait de grands prédécesseurs : Archimède (287-212 av. J.-C.), Kepler (1571-1630), Galilée (1564-1642), Huygens (1629-1695) et d'autres encore, qui réussirent à trouver des solutions à plusieurs problèmes particuliers de statique et même de dynamique. Mais Newton fut le premier à formuler un système complet de principes de Mécanique et à bâtir sur ces bases un édifice cohérent. Les grands succès que permit de remporter la Mécanique de Newton et l'autorité de son nom firent que pendant deux siècles aucun savant n'osa s'apercevoir des défauts de sa Mécanique. Ce n'est que dans la seconde moitié du XIXe siècle que l'on s'enhardit à procéder à une révision critique de son œuvre.

Après Newton l'essor de la Mécanique fut rapide, quoique jusqu'au début du XXe siècle les efforts des savants fussent concentrés sur le perfectionnement de l'appareil mathématique et sur l'application des lois de Newton à tous les nouveaux domaines scientifiques qui se constituaient alors. Mais les principes de base et les conceptions physiques de la Mécanique, établis par Newton, restaient immuables. Aussi jusqu'au début du XXe siècle aucun nouveau principe n'y fut introduit et ce n'est qu'à la charnière des XIXe et XXe siècles que la situation commença à changer.

La Mécanique de Newton se fonde bien sur une base solide de faits expérimentaux, mais ceux-ci concernent les mouvements lents des corps macroscopiques. On entend par corps *macroscopiques* les corps de dimensions ordinaires qui nous entourent dans la vie quotidienne. Ces corps sont donc constitués par des quantités énormes d'atomes ou de molécules. On dira qu'un *mouvement* est *lent* ou *non relativiste* si sa vitesse est petite par rapport à celle de la lumière dans le vide, $c = 300\,000$ km/s. Tout mouvement dont la vitesse se rapproche de celle de la lumière dans le vide sera dit *rapide* ou *relativiste*. De ce point de vue le mouvement d'un vaisseau spatial se déplaçant à la vitesse de 8 km/s doit être considéré comme très lent. De même sont lents comparés au Soleil les mouvements des planètes du système solaire, de leurs satellites et comètes. L'application des principes de la Mécanique newtonienne à l'étude du mouvement de ces corps démontra l'étendue de sa validité. Le mouvement des satellites artificiels et des vaisseaux spatiaux est lui aussi parfaitement conforme aux résultats des calculs fondés sur la mécanique de Newton.

3. On est amené à se poser alors les questions suivantes : est-il permis d'extrapoler jusqu'aux très grandes vitesses les principes de la mécanique newtonienne qui avaient été établis pour le mouvement lent des corps macroscopiques ; peut-on appliquer les conceptions et les principes fondamentaux de cette mécanique à l'étude des phénomènes du microcosme, c'est-à-dire aux phénomènes concer-

nant les particules isolées telles que les molécules, les atomes, les électrons, les protons, les neutrons et les autres particules dites élémentaires? Le raisonnement logique ne peut conduire à une réponse satisfaisante; celle-ci ne peut être obtenue qu'à l'aide d'expériences faites avec des corps animés de grandes vitesses et d'expériences effectuées avec des molécules, des atomes, des électrons, etc., isolés. Ce n'est qu'au XXe siècle que ces expériences furent réalisées; les résultats obtenus ont démontré clairement que la réponse aux questions posées est généralement négative.

La théorie de la relativité d'Einstein affirma que la mécanique newtonienne ne pouvait s'appliquer au mouvement des particules dont la vitesse est proche de celle de la lumière dans le vide, et l'expérience confirma cette assertion. Partant de la théorie de la relativité, une nouvelle mécanique fut alors établie; c'était la *mécanique relativiste* (ou *mécanique de la théorie de la relativité*) qui était valable aussi bien pour des vitesses faibles que pour des vitesses aussi grandes que possible. Selon la mécanique de Newton, la vitesse que peut acquérir un corps serait en principe illimitée, tandis que la nouvelle mécanique relativiste imposait à la vitesse des corps une limite insurmontable — la vitesse de la lumière dans le vide c. La vitesse de la lumière c est donc une vitesse *limite* qu'aucun corps ne saurait atteindre, bien que sa vitesse pourrait s'en approcher d'aussi près que l'on voudrait. Dans les accélérateurs de particules modernes, on peut produire des protons animés d'une vitesse qui n'est que de quelques dixièmes ou centièmes de pour cent inférieure à la vitesse de la lumière. On peut obtenir des électrons dont les vitesses sont inférieures à la vitesse de la lumière de quelques mètres ou de quelques dizaines de mètres par seconde. Dans les gerbes de rayons cosmiques on enregistre la présence de protons dont la vitesse n'est inférieure à celle de la lumière que de 10^{-8} cm/s environ. La mécanique de Newton est absolument inapplicable aux calculs du mouvement des corps animés d'aussi grandes vitesses. Les calculs sur lesquels se fondent les projets des accélérateurs font appel à la mécanique relativiste d'Einstein; comme les résultats pratiques sont conformes aux calculs, on dispose ainsi d'une preuve expérimentale directe et irréfutable de la pertinence de la mécanique relativiste.

4. La théorie de la relativité fixa à la mécanique de Newton une limite du côté des *grandes vitesses*. Une autre limitation de cette théorie ainsi que de la mécanique relativiste a été imposée par l'étude du *microcosme*, donc du monde des atomes, des molécules, des électrons, etc.

Tout au début, les physiciens ont cherché à appliquer au microcosme les conceptions et les lois qui avaient été élaborées pour les corps macroscopiques. On assimilait, par exemple, l'électron à une bille rigide ou au contraire déformable, dans le volume de laquelle se trouvait répartie la charge électrique, et on admettait que son

comportement était assujetti aux lois de la mécanique et de l'électrodynamique vérifiées pour les corps macroscopiques chargés. Cela revenait à affirmer que toutes les conceptions et lois de la physique macroscopique conservaient toute leur signification et leur validité pour des corps et des intervalles de temps indéfiniment petits. On croyait que pour apprendre à connaître le microcosme, on n'avait nul besoin d'autres concepts et d'autres lois que ceux dont disposait la physique macroscopique. Cela revenait à considérer tout bonnement le microcosme comme une copie réduite du macrocosme. Cette approche de l'étude des phénomènes de la nature et les théories physiques correspondantes sont dites *classiques.*

Le raisonnement ne permet pas de décider de l'adéquation de la méthode classique aux problèmes du microcosme et il faut recourir à l'expérience. L'expérience a montré que *l'approche classique des phénomènes du microcosme n'est pas valable ou tout au moins ne l'est que partiellement.* On arrive à une description adéquate du microcosme (applicable, certes, dans des limites déterminées) en faisant appel à la *mécanique quantique* qui se distingue essentiellement de la mécanique classique. La mécanique quantique modifie radicalement nos idées sur le mouvement. L'image classique du mouvement d'une particule le long d'une trajectoire déterminée, en tout point de laquelle la particule possède une vitesse bien déterminée, ne s'applique plus lorsqu'il s'agit d'une microparticule. Dans le microcosme le mouvement prend une forme plus compliquée que celle du déplacement mécanique des corps dans l'espace. D'une manière générale, la description de phénomènes du microcosme ne saurait être d'une perception immédiate puisqu'on est amené à introduire des concepts et des notions essentiellement nouveaux, irréductibles à ceux en usage pour l'étude des objets macroscopiques. Comme notre cours de mécanique faisant l'objet du tome I ne concerne que les mouvements des corps macroscopiques, il serait inopportun de développer ici des considérations sur la mécanique quantique. Il suffit de préciser les limites de validité des concepts et des lois que nous aurons à utiliser; ce sera fait au paragraphe 5.

5. Il apparaît ainsi que *la Mécanique de Newton est une mécanique classique, non relativiste, qui étudie les mouvements lents des corps macroscopiques.*

Les mécaniques relativiste et quantique sont des théories plus générales que celle de Newton. Cette dernière y est incluse comme un cas limite et approché. La mécanique relativiste se réduit à la mécanique newtonienne lorsque le mouvement envisagé est lent. La mécanique quantique, elle, se ramène à la mécanique de Newton dès que les corps étudiés ont des masses suffisamment grandes et qu'ils se meuvent dans des champs de force lentement variables. Il ne faut pas en inférer que la mécanique de Newton a perdu toute son importance. Dans de nombreux cas les corrections réelles qu'apportent la théorie de la

relativité et la mécanique quantique aux résultats fournis par la mécanique classique sont peu importantes. On dira que ce sont des corrections *relativistes* et *quantiques*. Dans le cas de mouvements lents des corps macroscopiques, ces corrections sont tellement petites qu'elles sont inférieures à la précision des mesures physiques les plus sophistiquées. Par ailleurs, les problèmes simples sur le mouvement des corps macroscopiques, que la mécanique classique résout aisément, deviennent à tel point ardus dans le cadre de la mécanique relativiste ou quantique qu'on est amené à y introduire toutes sortes de simplifications et à faire appel à des méthodes de calcul approché; ces simplifications et ces approximations nous ramènent en fait à la mécanique de Newton.

Prenons le cas du calcul classique du mouvement d'un vaisseau spatial; en posant que sa vitesse $v = 8$ km/s, l'erreur commise en négligeant les effets relativistes sera de l'ordre de $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{8}{300000}\right)^2 \sim$ $\sim 10^{-9}$. La mise en œuvre de la mécanique de Newton garantit donc une précision des calculs à 10^{-7} pour cent près. Il est clair qu'il est parfaitement illusoire d'essayer de tenir compte des corrections relativistes puisque les données initiales du problème sont d'une précision moindre. D'ailleurs ces corrections sont parfaitement inutiles pour la pratique *).

La mécanique de Newton reste valable dans un grand nombre de cas d'importance pratique. Elle gardera sûrement toute sa valeur scientifique et pratique dans ses limites de validité. Au-delà de ces limites, les résultats qu'elle fournit seront ou erronés ou insuffisamment précis. Par exemple, le problème du mouvement des particules chargées dans les accélérateurs devra être traité par la mécanique relativiste. De même le problème du mouvement des électrons dans les atomes ne peut être résolu que par la mécanique quantique.

---

*) On doit remarquer que dès le XIXe siècle, les études des planètes du système solaire (Mercure, Vénus, Terre, Mars) avaient permis de déceler de petits écarts par rapport à la mécanique newtonienne; plus tard, dans le cadre de la théorie de la relativité générale, ces écarts furent identifiés aux corrections relativistes $\sim v^2/c^2$ (v étant la vitesse de la planète). On démontra que le périhélie d'une planète tourne lentement et dans le même sens que la planète. Ce déplacement du périhélie résulte pour l'essentiel de l'influence perturbatrice des autres planètes. Le calcul de cette rotation du périhélie par la mécanique newtonienne fournit une valeur plus petite que celle que l'on observe. L'écart le plus important s'observe justement pour Mercure dont la trajectoire est la plus allongée et dont la vitesse v est la plus grande; cet écart est d'environ 43 secondes d'angle par siècle et résulte d'un effet relativiste dont il n'a pas été tenu compte dans les calculs. Cet effet subsisterait même en l'absence des perturbations apportées par les autres planètes, donc si le système solaire ne comportait que le Soleil et Mercure. Actuellement, par la mise en œuvre des techniques laser, on étudie d'autres corrections relativistes à apporter à la mécanique céleste classique.

CHAPITRE PREMIER

LA CINÉMATIQUE

§ 1. L'espace et le temps

1. En mécanique on entend par *mouvement* le changement avec le temps de la position spatiale d'un corps. La position du corps dont il est question est une *position relative*, définie par rapport à d'autres corps. Le concept de position absolue, qui serait la position d'un corps dans un « espace absolu », donc sans aucune référence à celles d'autres corps, est dénué de sens.

Le corps ou le système de corps par rapport auxquels on définit les positions d'autres corps sont désignés sous le nom de *système de référence* ou *référentiel* ou *repères*.

Il est dénué de sens d'affirmer que deux événements différents et non simultanés se sont produits dans un seul et même point de l'espace si on ne précise pas le référentiel utilisé. Soit un voyageur, assis dans un train en mouvement, qui retire à un instant donné un objet de sa valise, puis le remet à sa place. On ne pourra dire que ces deux actions du voyageur ont eu lieu au même endroit que si on avait choisi comme référentiel le wagon du train en mouvement. Mais si nous avions choisi pour référentiel la voie du chemin de fer, les deux événements en question auront eu lieu en des endroits différents, par exemple l'un à Moscou et l'autre à Léningrad.

2. On peut choisir comme référentiel un corps solide auquel seraient liés des *axes de coordonnées*, par exemple un trièdre trirectangle constitué par des tiges rigides. Dans ce référentiel la position de tout point pourrait être définie par trois nombres que sont les *coordonnées* x, y et z de ce point ; ces coordonnées représentent respectivement les distances de ce point aux trois plans YZ, ZX et XY de notre référentiel (fig. 1). Les trois coordonnées x, y, z peuvent être combinées pour définir un *rayon vecteur* $\boldsymbol{r}$, qui est un segment de droite pointant de l'origine du trièdre de référence vers le point considéré. Les coordonnées x, y, z sont les projections du rayon vecteur sur les axes de coordonnées. Aussi écrira-t-on

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{1.1}$$

où $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sont des *vecteurs unitaires* orientés le long des axes X, Y, Z.

On utilise deux trièdres de référence qui se laissent distinguer par application de la *règle du tire-bouchon*. Prenons un tire-bouchon normal (filetage à droite) et tournons-le de manière que son manche soit dans le plan XY. Dans un trièdre de référence de *sens direct* (fig. 1) le tire-bouchon avance dans le sens des z positifs et dans un trièdre de *sens inverse* (fig. 2) il avance dans le sens des z négatifs. Aucune rotation ne permet de faire coïncider ces deux trièdres qui se distinguent l'un de l'autre comme la main gauche se distingue de la main droite. Mais on transforme un trièdre de sens direct en trièdre de sens inverse en inversant le sens d'un seul ou des trois axes de

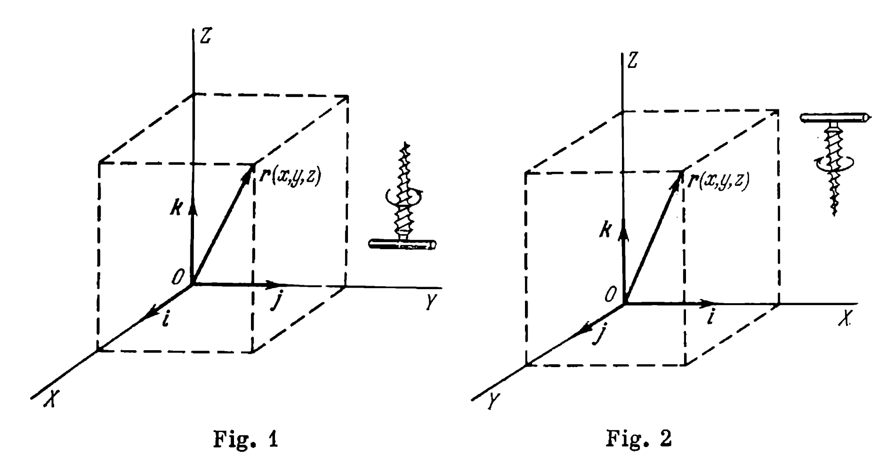


Fig. 1 Fig. 2

coordonnées. Dans ce dernier cas on effectue une *inversion des axes de coordonnées* ou encore une *réflexion par rapport à l'origine*. L'image dans un miroir plan d'un trièdre de sens direct est un trièdre de sens inverse. En physique on n'utilise que le trièdre de référence direct.

3. Les coordonnées x, y, z servant à définir la position d'un point dans le référentiel choisi sont des nombres. *La détermination quantitative des coordonnées d'un point implique, comme celle d'ailleurs de n'importe quelle grandeur physique, la définition du principe du procédé de leur mesure*. Il importe de souligner qu'il s'agit bien du principe de la méthode de mesure et non du procédé pratique de la détermination de la valeur de la grandeur considérée. Ces méthodes de mesure ne doivent que dévoiler la signification ou mieux le principe de la détermination de x, y, z ou des nombres servant à caractériser quantitativement toute autre grandeur physique. Aussi nous est-il loisible de supposer que les procédés de mesure utilisés sont *parfaits* et les résultats ainsi obtenus sont d'une précision absolue. Les coordonnées x, y, z sont des longueurs, de sorte que leur détermination se ramène à des mesures des longueurs, donc à des nombres caractérisant les longueurs. En parlant de la mesure des longueurs,

nous avons en vue l'opération suivante. Par convention on adopte pour étalon de longueur une certaine tige rigide dont la longueur est prise pour une unité de longueur. Pour mesurer la dimension d'un corps, nous cherchons le nombre qui indique de combien de fois cette dimension du corps est plus grande que notre tige étalon. C'est ce nombre que l'on appelle dimension du corps le long d'une direction donnée. Si ce nombre n'est pas entier, on devra diviser préalablement notre tige étalon en parties plus petites: dixièmes, centièmes, etc., de l'unité de longueur. Nous pouvons utiliser maintenant l'unité étalon munie de ses subdivisions pour caractériser n'importe quelle dimension par un nombre décimal ou par un nombre entier suivi de décimales.

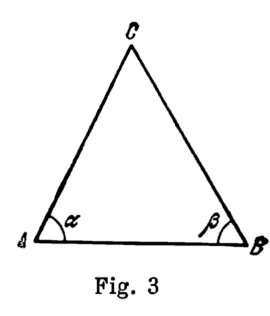


Fig. 3

4. Le procédé consistant à déterminer la dimension d'un corps par application à celui-ci de l'étalon ou de ses subdivisions constitue la *mesure directe*. Or, il n'est pas toujours possible d'effectuer une mesure directe; on ne peut le faire lorsqu'il s'agit de déterminer la distance jusqu'à un corps extrêmement éloigné, par exemple les planètes, les étoiles et les autres objets célestes. La mesure directe est tout aussi irréalisable pour les très petites dimensions auxquelles sont confrontés les physiciens étudiant les atomes, les noyaux atomiques ou les particules élémentaires. On devra alors avoir recours à des *méthodes de mesure indirectes*. La pertinence de ces méthodes doit être vérifiée par des méthodes directes (lorsque celles-ci sont possibles). Mais lorsque les méthodes directes cessent d'être utilisables, ne subsistent que les méthodes indirectes. Dans toute méthode indirecte les opérations de mesure directes, à l'aide desquelles fut initialement introduit le concept quantitatif de longueur, prennent un caractère abstrait; aussi ce sont les méthodes indirectes qui assument alors le rôle des opérations de mesure fondamentales susceptibles de dégager la signification des longueurs elles-mêmes ou plus exactement des nombres caractérisant les longueurs mesurées.

Un exemple de méthode de mesure indirecte est la *triangulation* qui est le procédé généralement utilisé pour déterminer les distances jusqu'à des objets éloignés. Par une mesure directe on détermine la longueur de la « *base* » AB (fig. 3); en se plaçant aux extrémités de cette base AB on effectue des pointages vers l'objet éloigné C, ce qui a pour but de mesurer les angles α et β que forment les droites AC et BC avec la base AB. Disposant de ces données numériques, la distance inconnue à laquelle se trouve le point C peut être calculée par une construction ou par un calcul géométrique. Si la base AB choisie est trop grande pour que sa longueur puisse être déterminée par une mesure directe, on commencera par adopter une base plus

courte, mesurer sa longueur puis déterminer la longueur de la base AB par le procédé de la triangulation. En principe cela ne change rien à notre affaire. Il est beaucoup plus important d'établir les fondements théoriques de la méthode considérée. Celle-ci postule que les côtés du triangle ABC sont des *droites satisfaisant aux axiomes de la géométrie d'Euclide.* Mais on doit encore établir quels sont les constituants matériels délimitant ce triangle; ce sont les rayons lumineux issus de l'objet C et parvenant aux points A et B. On en conclut que notre méthode repose sur l'hypothèse que les rayons lumineux sont rigoureusement rectilignes et satisfont donc aux mêmes axiomes de la géométrie d'Euclide que les droites géométriques. Cette hypothèse n'est nullement évidente à priori et le seul moyen de la confirmer ou de l'infirmer est l'expérience. Ce que l'on a en vue en faisant cette hypothèse c'est la propagation des rayons lumineux dans le vide et non pas dans l'atmosphère terrestre où ils s'incurvent effectivement par suite des variations locales de l'indice de réfraction de l'air. Il est possible de tenir compte de ces écarts à la propagation rectiligne des rayons lumineux et on le fait dans les mesures de haute précision.

Une autre question vient encore à l'esprit: comment peut-on s'assurer que la géométrie d'Euclide est applicable dans des circonstances réelles? La méthode directe que l'on peut utiliser pour répondre à cette question consiste à soumettre à une vérification expérimentale les corollaires des axiomes de la géométrie euclidienne. Un des corollaires est le théorème affirmant que la somme des angles internes d'un triangle est égale à 180°. Le célèbre mathématicien Gauss (1777-1855) s'est attaché, de 1821 à 1823, à mesurer avec précision les angles internes d'un triangle formé par trois pics de montagne. Les longueurs des côtés de ce triangle étaient d'environ 100 km. Il en conclut qu'aux erreurs de mesure près ce théorème se trouvait vérifié. Cette méthode ne peut être utilisée à l'échelle du système solaire et à fortiori à plus grande échelle puisque, toutes les mesures s'effectuant sur Terre, on ne peut mesurer directement les trois angles internes d'un triangle dont les sommets se trouvent, à part la Terre, sur deux planètes ou deux étoiles quelconques. Dans ce cas nous concluons à l'applicabilité de la géométrie euclidienne en nous fondant sur des données indirectes — la concordance des différents résultats obtenus par la mise en œuvre de cette géométrie. On peut, par exemple, prédéterminer par le calcul le mouvement des planètes du système solaire pour plusieurs années et vérifier ensuite la validité des résultats. Au cas où les résultats du calcul seraient erronés, une des raisons en pourrait être l'inadéquation de la géométrie d'Euclide à des espaces d'étendue comparable à celle du système solaire. Par contre, l'accord entre calcul et observation (ce qui est le cas effectivement) témoigne de ce qu'il n'y a pas de raison de mettre en doute la validité de la géométrie eucli-

dienne. Sans plus nous attarder sur cette question, nous noterons simplement que cette géométrie ne laisse pas apparaître d'écarts notables dans des régions de l'espace de la taille de notre *Galaxie* ($\sim 10^{20}$ m) ou même de celle de la *Métagalaxie* qui est la région de l'Univers que l'on arrive à observer à l'aide des plus puissants télescopes ($\sim 10^{26}$ m). De même il n'y a aucune raison de mettre en doute la géométrie euclidienne lorsqu'il s'agit d'étendues subatomiques, de l'ordre de 10^{-15} m.

Dans les mesures de la position des corps lointains les rayons lumineux assument la fonction d'objets matériels constituant le référentiel réel. Comme on ne peut construire des tiges indéfiniment longues, elles ne peuvent servir à marquer les axes de coordonnées s'étendant loin dans l'espace. Ce rôle est alors assumé par les rayons lumineux qui prolongent au loin les axes de coordonnées initialement réalisés en tiges rigides.

5. Ces considérations appellent à faire quelques remarques sur les liens entre physique et mathématiques. Les mathématiques jouent un rôle tellement important en physique que sans mathématiques celle-ci est impensable. Il importe cependant de situer correctement la place des mathématiques en physique ; cette question nous semble à tel point importante que nous y reviendrons à de nombreuses occasions. Les mathématiques pures ont affaire à des objets et à des notions abstraits qui sont régis par une axiomatique. La seule condition à laquelle doivent satisfaire les notions et les axiomes des mathématiques est celle d'être *logiquement consistants*. Les mathématiques pures tirent tous leurs résultats de ces axiomes à l'aide de raisonnements logiques fondés sur les règles de la logique formelle. Il est bien évident que le contenu de ces résultats ne saurait dépasser le cadre des liens logiques existant entre les divers objets et notions des mathématiques pures. On peut dire que les mathématiques pures constituent une *discipline logiquement cohérente*. Formant un système clos où tout est logiquement cohérent, les mathématiques ont leur esthétique propre à laquelle les mathématiciens sont sensibles.

On ne doit cependant pas perdre de vue que les mathématiques pures, formant de par leur rigueur même un domaine fermé sur lui-même, sont détachées du monde réel et ne peuvent être directement mises en œuvre dans d'autres sciences ou dans la pratique humaine. Afin que les mathématiques puissent constituer un puissant appareil d'étude et de description des phénomènes naturels, il faut établir des liens entre les objets et notions abstraits des mathématiques d'une part et les objets et les phénomènes naturels d'autre part. En physique les objets et les notions mathématiques doivent figurer non comme des catégories purement logiques, mais comme des *abstractions d'objets réels ou de processus naturels*. Ainsi le point est l'abstraction d'un corps physique de faible étendue, la ligne droite est l'abstraction d'une tige rigide de faible section ou celle d'un

faisceau lumineux se propageant dans un milieu homogène. La question de la légitimité des mathématiques se réduit à celle de ses axiomes. Or la légitimité des axiomes ne peut être établie que par l'expérience.

Il est vrai qu'on ne peut soumettre à l'expérimentation les objets mathématiques eux-mêmes, puisque ce sont des objets idéalisés que l'on ne trouve pas dans la Nature. Toute expérience porte sur des objets réels. La rigueur mathématique dont sont tellement satisfaits, et à juste titre, les mathématiciens, doit être interprétée comme la concordance logique des conclusions auxquelles on parvient et non comme une justification de ses axiomes.

La seule rigueur mathématique ne peut suffire à la physique ou toute autre science ayant affaire à des objets réels et à des phénomènes naturels. *Aucune étude théorique, même si elle est mathématiquement rigoureuse, ne peut être considérée comme étant physiquement rigoureuse*, et ce pour les raisons suivantes. Premièrement, toute recherche ou étude se fonde sur certaines lois dont la validité est en dernière instance toujours vérifiée par l'expérience; or toute expérimentation et toute mesure physique sont entachées d'erreurs et ne sont effectuées qu'avec un certain degré de précision. Au-delà du degré de précision atteint dans une expérience, la loi physique concernée peut cesser d'être juste. Deuxièmement, tout objet physique réel possède une infinité de déterminations. Il est impossible d'expliciter toutes les déterminations d'un objet réel, d'une part parce qu'elles sont en nombre infini, et d'autre part, parce qu'on les ignore. *En construisant ses théories, le physicien substitue aux objets réels leurs modèles idéalisés qui reposent sur un nombre restreint de déterminations explicites et essentielles pour traiter le problème étudié. Seule l'expérimentation permet de décider du choix des déterminations faites pour passer de l'objet réel à son modèle. C'est toujours l'expérience qui tranche la question de la justesse d'une théorie physique et des limites de sa validité.* Toute mise en œuvre d'une loi physique en dehors de son domaine de validité et d'un modèle ne spécifiant pas l'ensemble des déterminations de l'objet réel qui importent pour une étude donnée, conduit à des vices théoriques qui ne sauraient être corrigés par des raisonnements et des calculs mathématiques, aussi rigoureux soient-ils.

Cette assertion importe aussi pour la pratique. Il est bien évident qu'une fois le modèle construit, il n'est pas interdit d'effectuer les calculs ultérieurs avec toute la rigueur mathématique, même si les lois physiques pertinentes ne sont qu'approximatives. Mais bien souvent le calcul rigoureux est trop encombrant et trop ardu pour être effectué. Le degré de précision auquel il tend est déjà dévalorisé par le caractère approximatif des lois physiques et par l'imperfection du modèle théorique servant de base aux calculs. Dans cette situation on peut et on doit même avoir recours au calcul approché.

Un calcul approché est tout aussi valable qu'un calcul dit exact, à condition que les erreurs qu'il introduit ne dépassent pas les erreurs dues aux imperfections des lois physiques et des modèles théoriques.

Nombre de notions et de découvertes que les mathématiciens estiment primordiales sont dénuées de sens lorsqu'il s'agit de les appliquer à des objets réels. Un exemple en est le nombre irrationnel. Dire qu'une grandeur physique a une valeur irrationnelle est un contresens puisqu'une telle assertion ne peut être vérifiée. Les nombres rationnels suffisent amplement pour représenter les résultats des mesures avec toute la précision requise. En outre, la notion même de grandeur physique perd toute sa signification lorsqu'on impose que sa mesure soit effectuée à un degré de précision injustifié. Ainsi, par exemple, on ne saura plus de quoi il s'agit si on mesure la longueur d'une tige rigide, à un atome près. Une précision illimitée de la mesure des longueurs est en principe utile pour les segments de droite considérés en géométrie mais ne l'est plus pour les corps réels caractérisés par une structure atomique.

6. Examinons maintenant la question de la mesure du *temps*. Tout comme les autres grandeurs physiques, on caractérise le temps par des valeurs numériques. Il s'agit tout d'abord de préciser par quelles mesures de principe on peut déterminer ces valeurs numériques; c'est la condition nécessaire pour que ces valeurs aient une signification précise.

Nous entendrons par temps dans le sens quantitatif de ce mot les indications d'une horloge quelconque. Il serait d'ailleurs plus exact de parler non du temps lui-même, mais des *intervalles de temps* séparant deux événements ou deux instants. On caractérise un intervalle de temps par la *différence* des indications que fournit une horloge aux instants considérés. Lorsqu'on parle du temps, sans indication des instants délimitant un intervalle de temps, on admet implicitement que l'un de ces instants avait été défini et choisi pour origine des temps. On utilise ici le terme horloge dans un sens plus large que dans la vie courante. *Par horloge on entend tout corps ou système de corps qui est le siège d'un processus périodique utilisé pour mesurer le temps.* Comme exemples de processus périodiques, on peut citer les oscillations d'amplitude constante d'un pendule, la rotation de la Terre autour de son axe par rapport au Soleil ou à une étoile, les oscillations d'un atome appartenant à un réseau cristallin, les oscillations d'un champ électromagnétique correspondant à une raie spectrale suffisamment fine, etc. Si entre deux événements la Terre aura effectué, par rapport aux étoiles, une rotation complète, on dira que l'intervalle de temps séparant ces événements est égal à un *jour sidéral*. Si, entre les deux événements considérés la Terre aura effectué 10 rotations, l'intervalle de temps les séparant sera égal à 10 jours sidéraux. Si au cours d'un jour sidéral un pendule effectue près de 86 164 oscillations, on dit que la période d'une oscillation représente

une seconde, etc. On doit noter la différence entre jour sidéral et *jour solaire*, qui est l'intervalle de temps pendant lequel la Terre effectue une rotation complète autour de son axe, évaluée par rapport au Soleil. Etant donné que la Terre se meut autour du Soleil sur une orbite elliptique et non pas circulaire, son mouvement n'est pas parfaitement uniforme (cf. § 55). Il en résulte que la durée du jour solaire varie d'un jour à l'autre durant l'année. Par suite on utilise pour la mesure du temps le *jour solaire moyen* qui comporte 24 heures $= 24 \cdot 60 = 1440$ minutes $= 1440 \cdot 60 = 86\,400$ secondes.

Toute horloge doit avoir une « marche *régulière* ». Mais que faut-il entendre par marche régulière? On dit parfois que cela signifie que le processus périodique utilisé pour le repérage du temps doit se reproduire à des intervalles de temps rigoureusement identiques. Or cette définition ne répond pas à la question posée, car pour s'assurer que les intervalles de temps successifs sont égaux entre eux, on doit disposer déjà d'une horloge à marche parfaitement régulière. On ne peut briser ce cercle vicieux qu'en introduisant une définition *ad hoc* puisqu'il n'existe *a priori* aucune conception d'écoulement régulier du temps. On doit donc par convention adopter une certaine horloge comme *étalon*, poser qu'elle a une marche régulière et s'en servir pour l'étalonnage de toutes les horloges en usage.

En principe n'importe quelle horloge pourrait être choisie comme étalon. Mais ce ne serait guère raisonnable, car l'horloge choisie comme étalon doit être de « bonne qualité » et surtout être *hautement reproductible*. Cela signifie que si on construisait avec soin un grand nombre d'horloges étalons, toutes devraient fonctionner d'une façon identique, indépendamment de la date de leur fabrication. Par exemple, la reproductibilité des sabliers est beaucoup moins bonne que celle des horloges à pendule.

Il y a peu de temps encore on utilisait comme étalon l'« *horloge astronomique* ». Pendant longtemps l'horloge de référence fut la Terre tournant autour de son axe par rapport aux étoiles; l'unité de temps fondamentale était alors le *jour*. Récemment on a remplacé la rotation de la Terre autour de son propre axe par son mouvement orbital autour du Soleil, avec pour unité fondamentale l'*année tropique* définie comme l'intervalle de temps s'écoulant entre deux passages successifs du centre du Soleil par le *point équinoxial de printemps*. Ce procédé assurait une meilleure reproductibilité, mais une bien meilleure reproductibilité fut atteinte après la mise au point d'*horloges à quartz*, *moléculaires* et *atomiques*.

Ces trois types d'horloges sont des dispositifs radiotechniques sophistiqués. Il n'est nul besoin ici de décrire leurs principes de fonctionnement et les détails de leur arrangement ; il suffit d'indiquer que le rôle de balancier ou de pendule est assumé dans l'horloge à quartz par les vibrations du réseau cristallin du quartz, dans l'horloge moléculaire par les oscillations des atomes dans les molécules,

et dans l'horloge atomique par les oscillations d'un champ électromagnétique dans l'intervalle d'étroites raies spectrales des atomes de certains isotopes des éléments chimiques se trouvant dans des conditions ambiantes bien déterminées et rigoureusement contrôlées. Les oscillations du dernier type sont les plus reproductibles et c'est pour cela que leur période fut adoptée comme unité fondamentale de temps, à l'aide de laquelle on détermine la seconde. La *seconde* est définie alors comme l'intervalle de temps pendant lequel le rayonnement électromagnétique, correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133, en l'absence de tout champ extérieur, effectue 9 192 631 770 oscillations.

La mise en œuvre des horloges à quartz, moléculaire et atomique a permis de démontrer que la rotation de la Terre autour de son axe n'est pas parfaitement « régulière ».

7. Pour l'unité de longueur, il en va de même que pour l'unité de temps. Comme il n'existe pas de corps parfaitement rigides, l'étalon initial du mètre, qui fut réalisé sous forme d'une tige en alliage platine-irridium, n'est pas suffisamment fiable. Il est exposé à l'action de facteurs extérieurs et sa structure moléculaire interne peut se modifier. Enfin il n'est nullement exclu qu'il soit détérioré ou égaré. Il est donc bien préférable de choisir comme unité fondamentale une longueur naturelle, parfaitement reproductible. On a choisi pour cela la longueur d'onde d'une étroite raie spectrale émise dans des conditions bien déterminées. C'est en partant d'une telle unité fondamentale que l'on assure la reproduction de l'unité pratique de longueur qu'est le mètre. Par définition, le *mètre* correspond à 1 650 763,73 longueurs d'onde dans le vide de la raie d'émission orange de l'atome de krypton-86 qui correspond aux transitions entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de cet atome.

Il n'est nullement exclu qu'à l'avenir nos étalons modernes de temps et de longueur ne puissent satisfaire à des exigences de précision et de reproductibilité plus sévères. On remplacera alors nos étalons par d'autres qui seront plus stables, mais ceci ne change rien aux principes.

8. Pour donner une description du mouvement, ainsi que de tout autre phénomène physique évoluant dans le temps, les seuls référentiels spatiaux ne sauraient suffire, et il est nécessaire de les transformer en référentiels *spatio-temporels.* En principe, pour effectuer une telle transformation, il suffirait de répartir dans le référentiel spatial un nombre suffisant d'horloges immobiles ayant même rythme. On pourrait alors caractériser tout événement par le lieu où il s'est produit et par l'instant auquel il a eu lieu, i.e. par l'indication de l'horloge locale. Mais en procédant ainsi on ne peut déterminer que le *temps local*, qui est le temps en un point donné de l'espace. Or les temps marqués par les horloges placées en différents points de

l'espace ne sont pas corrélés. En principe une telle corrélation n'est nullement requise pour décrire les processus physiques. On pourrait se contenter du temps local en différents points de l'espace si on consentait à adopter autant de temps différents qu'il y a de points. La description qui en résulterait serait tellement confuse que l'on ne pourrait l'embrasser. Pour arriver à une description simple et claire, on utilisera un temps unique dans tout le référentiel spatio-temporel. On pourrait y parvenir en « *synchronisant* » les horloges disposées en différents points de l'espace, ce qui reviendrait à les régler de telle sorte qu'elles indiqueraient toutes le « même » temps.

Il peut sembler à première vue facile de synchroniser des horloges réparties dans l'espace. Plaçons, par exemple, deux horloges identiques d'abord en un point A, où nous égalisons leurs indications; après cela transportons l'une des horloges en un point B. Maintenant nos deux horloges, placées l'une en A et l'autre en B, sont synchrones. Un tel procédé de synchronisation n'aurait été correct que si les indications de l'horloge transportée ne dépendaient pas du procédé utilisé pour passer du point initial A au point final B. Pour s'en rendre compte il faut comparer les indications fournies par l'horloge transportée en ces deux points avec celles de deux horloges fixes *1* et *2* se trouvant l'une au point A et l'autre au point B. Mais comme les horloges *1* et *2* doivent être préalablement synchronisées, on ne sort pas du cercle vicieux.

Essayons le procédé de *synchronisation des horloges à l'aide de signaux*. On peut le réaliser comme suit. A un instant arbitrairement choisi t_A, on envoie vers B un signal contenant l'information sur l'heure marquée par l'horloge A. Dès que le signal parvient en B, on règle l'horloge B de manière qu'elle indique le temps $t_B = t_A + \tau_{AB}$, τ_{AB} étant la durée de transmission du signal de A en B. On pourrait penser que maintenant nos horloges A et B sont bien synchronisées. Or, pour qu'elles le soient effectivement, il nous faut connaître la durée τ_{AB} de transmission du signal et on ne peut la déterminer que si les horloges sont synchrones. Nous sommes à nouveau dans un cercle vicieux. Einstein a montré que pour en sortir il est nécessaire de définir le concept de simultanéité. La physique prérelativiste posait que la simultanéité des événements est absolue et que ce concept est parfaitement explicite. Einstein démontra que cette conception était erronée. Le concept de simultanéité n'est explicite que si les événements considérés se produisent en un même point de l'espace. Mais lorsqu'ils se produisent en des lieux différents, il faut adopter une convention spéciale pour juger quels événements peuvent être considérés comme simultanés. De toute évidence la question de la simultanéité des événements se produisant en des points différents de l'espace est équivalente à celle de la synchronisation des horloges spatialement séparées.

Toute solution d'un problème reposant sur une définition renfer-

me un certain arbitraire. C'est notamment le cas de la détermination de la simultanéité d'événements spatialement séparés. Le caractère objectif des lois de la Nature ne peut naturellement dépendre de l'arbitraire des définitions adoptées. Ces dernières ne peuvent modifier que la forme d'expression des lois; il convient donc d'adopter des définitions rendant simple et claire l'expression des lois. C'est ce qui nous conduit à adopter la définition de simultanéité avancée par Einstein dans sa théorie de la relativité.

Pour la synchronisation des horloges, Einstein fait appel aux signaux lumineux se propageant dans le vide. Le temps que met un signal pour faire l'aller et le retour entre A et B est égal à $\tau = \tau_{AB} + \tau_{BA}$, τ_{BA} étant la durée de parcours de B à A. Pour mesurer le temps τ l'horloge A suffit amplement et ceci sans aucune synchronisation préalable. Mais les durées τ_{AB} et τ_{BA} ne peuvent être déterminées qu'après synchronisation des horloges A et B. Tant qu'elles ne le sont pas, on peut toujours exiger que τ_{AB} et τ_{BA} soient reliées entre elles à l'aide d'une certaine relation. Connaissant cette relation et la valeur $\tau = \tau_{AB} + \tau_{BA}$, on pourra alors calculer les durées τ_{AB} et τ_{BA}. Il s'ensuit que les horloges A et B seront alors synchronisées et le concept de simultanéité se trouvera établi. *Einstein pose, par définition, que* $\tau_{AB} = \tau_{BA}$, *ce qui revient à affirmer que la lumière se propage de A en B à la même vitesse que de B en A.* Ainsi $\tau_{AB} = \tau_{BA} = \tau/2$ et par conséquent $t_B = t_A + \tau/2$. Pour des signaux instantanés (vitesse de propagation infinie) $\tau = 0$ et $t_A = t_B$. Dans le cas de signaux se propageant à une vitesse infiniment grande, la simultanéité des événements serait absolue. Or il n'existe pas de signaux instantanés.

D'après Einstein, la synchronisation des horloges n'implique pas la détermination préalable de la vitesse de la lumière et peut être réalisée de la manière suivante. Soit C un point situé à mi-chemin entre des points A et B (immobiles l'un par rapport à l'autre). Déclenchons en C un éclair de lumière. *Par définition*, la lumière produite parviendra simultanément aux points A et B. Donc si on aura rendu identiques les indications des horloges A et B au moment de l'arrivée de la lumière issue de C, ces horloges seront synchrones.

Toute définition doit être non contradictoire. Si on synchronise les horloges A et B, la troisième horloge C peut l'être soit par rapport à l'horloge A, soit par rapport à l'horloge B. Les deux procédés doivent conduire au même résultat, sinon on se trouverait en présence d'une contradiction interne. On ne s'est cependant pas préoccupé de vérifier directement le caractère non contradictoire de la définition de la simultanéité donnée par Einstein, car les multiples corollaires établis en partant de cette définition sont logiquement consistants.

9. *La simultanéité des événements spatialement séparés, dans le sens de la définition d'Einstein, est relative.* Cela signifie que deux

événements qui sont simultanés dans un référentiel donné peuvent ne plus l'être dans un deuxième référentiel en mouvement par rapport au premier. Illustrons cette assertion par l'exemple suivant. Supposons qu'un référentiel S soit lié à une tige rigide AB et qu'un autre référentiel S' soit lié à une tige rigide $A'B'$ qui se meut par rapport à AB (fig. 4). A l'instant où les centres C et C' des deux tiges coïncident entre eux, on fait jaillir une étincelle en ce point

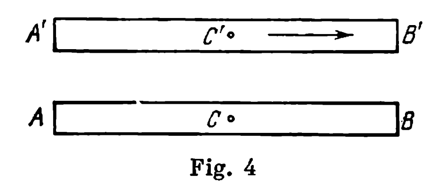


Fig. 4

de coïncidence. Etudions la propagation de cette lumière d'abord dans le référentiel S. En vertu de la définition de la simultanéité, le signal lumineux parviendra simultanément aux deux extrémités A et B de la première tige. Or, comme l'extrémité A' de la seconde tige se meut à l'encontre du signal et que son extrémité B' fuit le signal, le signal parviendra au point A' plus tôt qu'au point B'. Ainsi l'expérience rapportée au référentiel S conduit à conclure que notre signal lumineux parvient simultanément aux points A et B, tandis que son arrivée aux points A' et B' ne peut être simultanée: il parvient au point A' plus tôt qu'au point B'. Nous aboutirons à des conclusions différentes si nous effectuons nos observations dans le référentiel S'. En vertu de la définition adoptée, le signal parviendra en même temps aux extrémités A' et B', mais son arrivée au point B sera en avance sur son arrivée au point A. Ces deux conclusions ne sont nullement contradictoires puisque dans ces deux situations la simultanéité est comprise dans des sens différents. Nous voyons ainsi que le concept de simultanéité des événements est relatif.

10. *La longueur d'un corps est elle aussi relative et dépend du référentiel dans lequel on la mesure.* La physique prérelativiste ne se posait même pas la question de savoir quelle serait la longueur d'une tige en mouvement. La théorie de la relativité démontre que l'on doit distinguer strictement la *longueur* l_0 *d'une tige au repos*, donc mesurée dans un référentiel par rapport auquel elle est immobile, et la *longueur* l *d'une tige en mouvement*, donc mesurée dans un référentiel par rapport auquel elle se meut. Ces deux longueurs ne deviennent égales que dans le cas limite de mouvements infiniment lents. On détermine la valeur de l_0 en appliquant à la tige, le nombre de fois nécessaire, un étalon unitaire au repos par rapport à cette tige. La détermination de l se réduit à la mesure de la distance entre des points immobiles. Pour ce faire, on procédera de la manière suivante. On commencera par repérer à un même instant par des points immo-

biles A et B les positions des extrémités de la tige en mouvement par rapport au référentiel considéré. Par définition, la longueur de la tige en mouvement l sera égale à la distance entre les points immobiles A et B. Si on choisit un autre référentiel, du fait du caractère relatif du concept de simultanéité, les extrémités de la tige mobile ne passeront pas simultanément devant les anciens repères A et B. A la place des points A et B on devra repérer d'autres points A' et B' qui seront immobiles dans le nouveau référentiel. La distance l' entre les points A' et B' sera, d'une manière générale, différente de l. Il s'ensuit que, *tout comme les intervalles de temps, les longueurs des segments de droite sont également relatives.*

11. La physique prérelativiste considérait que les intervalles de temps et les longueurs ne pouvaient avoir que des valeurs absolues et que l'on pouvait parler de la simultanéité des événements sans préciser le référentiel adopté pour les observer. De même on pouvait parler de la longueur d'un corps sans préciser s'il était au repos ou en mouvement par rapport au référentiel choisi. Ce point de vue était implicitement justifié par l'idée que la vitesse des signaux était illimitée. Tant que l'on étudie des mouvements lents, la vitesse de propagation de la lumière dans le vide peut être considérée comme infiniment grande. Dans cette approximation tous les effets relativistes disparaissent. Nous présenterons plus tard quelques résultats importants pour la physique nucléaire et la physique des particules élémentaires. Quant à l'exposé systématique de la mécanique relativiste, nous ne l'aborderons qu'après avoir appris à connaître les phénomènes électriques et optiques. Cet exposé de la mécanique relativiste comprendra aussi une étude quantitative des problèmes de temps et d'espace, que nous venons d'esquisser qualitativement.

§ 2. Description cinématique du mouvement. Le concept de point matériel

1. La *cinématique* est la partie de la mécanique consacrée à la description des mouvements, abstraction faite des causes qui les déterminent. Pour décrire un mouvement, on peut utiliser différents référentiels, mais le mouvement d'un même corps apparaîtra alors différent suivant le référentiel choisi. En cinématique le choix d'un référentiel se fonde uniquement sur des considérations d'adéquation aux conditions concrètes dans lesquelles s'effectue le mouvement considéré. Aussi pour une étude du mouvement des corps terrestres est-il tout indiqué de lier le référentiel à la Terre et c'est ce que nous ferons. Lorsqu'il s'agit du mouvement de la Terre elle-même, il est commode de lier le référentiel au Soleil et ainsi de suite. En cinématique on n'a, en principe, aucun avantage à utiliser un référentiel plutôt qu'un autre. Tous les référentiels sont *cinématiquement équivalents*. Ce n'est qu'en *dynamique* (partie de la mécanique consacrée à

l'étude des mouvements sous l'influence des forces agissant sur les corps en mouvement) qu'apparaissent les avantages de principe de certains référentiels ou plutôt de certaines classes de référentiels.

2. En mécanique classique l'objet le plus simple dont on puisse étudier le mouvement est le point matériel. On entend par *point matériel* un corps macroscopique dont les dimensions sont suffisamment petites pour pouvoir être négligées dans l'étude du mouvement, ce qui revient à admettre que la totalité de la masse de ce corps se trouverait pour ainsi dire concentrée en un point. Il n'existe pas de points matériels dans la Nature, c'est donc une abstraction, un objet théorique — représentation idéalisée du corps réel. On peut se poser la question de savoir quels corps on peut assimiler à un point matériel dans les études de leurs mouvements. La réponse à cette question dépend, d'une part, du caractère propre du mouvement et, d'autre part, du but poursuivi par l'étude. Les dimensions absolues du corps importent peu, car ce qui compte, ce sont ses dimensions relatives, c'est-à-dire le rapport des dimensions réelles du corps à certaines distances caractéristiques du mouvement étudié. Par exemple, dans les études du mouvement orbital de la Terre autour du Soleil, on peut assimiler la Terre à un point matériel, et ce, à un très grand degré de précision. La distance caractéristique est dans ce cas le rayon de l'orbite terrestre $R \approx 1,5 \cdot 10^8$ km. Comme cette longueur est très grande comparativement au rayon de la Terre $r \approx 6,4 \times \times 10^3$ km, lors du mouvement orbital tous les points de la Terre se meuvent pratiquement de manière identique. Il suffit donc de considérer le mouvement d'un seul point, par exemple, celui du centre de la Terre, et d'admettre que toute la substance de la Terre est pour ainsi dire concentrée en ce point. Une telle approche simplifie grandement le problème du mouvement orbital de la Terre, sans que les traits essentiels de ce mouvement soient estompés. Mais cette approximation n'est plus valable lorsqu'il s'agit du mouvement de rotation de la Terre autour de son propre axe, puisqu'il est dénué de sens de parler de la rotation d'un point autour d'un axe lorsque cet axe passe par le point considéré.

Nous avons inclu dans la définition du point matériel la condition que ce point doit être un *corps macroscopique*. Nous avons introduit cette condition afin de pouvoir mettre en œuvre la mécanique classique. Cependant, dans nombre de cas, le mouvement des microparticules peut être aussi traité par la mécanique classique. C'est le cas, par exemple, du mouvement des électrons, des protons ou des ions dans les accélérateurs de particules ou dans les dispositifs électroniques et ioniques. Les microparticules peuvent alors être assimilées aux points matériels de la mécanique classique.

3. En physique classique la *mécanique du point matériel* ou *mécanique du point* est la base de toute la mécanique. Du point de vue de la physique classique, tout corps macroscopique ou tout système de

corps peut être subdivisé en pensée en parties macroscopiquement petites, en interaction les unes avec les autres. Chacune de ces parties peut être assimilée à un point matériel, de sorte que l'étude du mouvement d'un système de corps se trouve ramenée à celle d'un système de points matériels interagissant entre eux. Il est donc tout indiqué de commencer l'étude de la mécanique classique par celle de la mécanique du point matériel; on pourra passer ensuite à l'étude du mouvement d'un système de points matériels.

Choisissons un système de référence et rapportons à ce système le mouvement du point matériel. La description de ce mouvement sera complète si on connaît à tout instant la position du point par rapport au référentiel choisi. Par convention nous définirons la position du point par ses coordonnées cartésiennes x, y, z, qui sont les projections du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ sur les axes de coordonnées. Pour que la description du mouvement du point soit complète, il faut déterminer les variations des coordonnées x, y et z en fonction du temps t:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{2.1}$$

ou en notation vectorielle

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \tag{2.2}$$

Pour établir les lois fondamentales de la mécanique, dont la connaissance permettrait de déterminer par le calcul la forme de ces fonctions, on doit introduire deux nouvelles notions, la notion de *vitesse* et celle d'*accélération.*

§ 3. Vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement rectiligne. Vitesse et accélération angulaires

1. Nous considérerons d'abord le cas particulier du mouvement d'un point matériel le long d'une droite que nous ferons coïncider

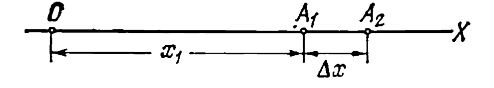


Fig. 5

avec l'axe de coordonnées X dont l'origine se trouve au point arbitraire O situé sur cette droite (fig. 5). La position du point matériel est alors déterminée par une seule coordonnée

$$x = x(t). \tag{3.1}$$

Soit A_1 la position du point à un instant t. Sa coordonnée sera alors $x_1 = x(t)$. A un instant ultérieur le point matériel occupera la posi-

tion A'_2 de coordonnée $x_2 = x(t + \Delta t)$. Pendant l'intervalle de temps Δt le point matériel parcourt sur la droite un trajet $\Delta x = x_2 - x_1 = x(t + \Delta t) - x(t)$. Ce trajet sera considéré comme positif si le point se déplace vers la droite et il sera négatif si le point se déplace vers la gauche. Le rapport du chemin Δx parcouru par le point à l'intervalle de temps Δt est désigné sous le nom de *vitesse moyenne du point matériel entre les instants t et $t + \Delta t$*. Par définition la vitesse moyenne est égale à

$$v_{\text{moy}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{3.2}$$

Une telle définition de la vitesse moyenne reste valable quelle que soit la valeur de Δt; on doit cependant en exclure la valeur $\Delta t = 0$, puisqu'alors la vitesse moyenne serait égale à 0/0, ce qui n'a pas de sens. Mais l'intervalle de temps Δt peut devenir aussi petit que l'on veut, sans devenir égal à zéro. La vitesse moyenne dépend en général non seulement de t, mais aussi de Δt. Considérons t comme fixe et prenons des intervalles de temps Δt de plus en plus petits en les faisant tendre vers zéro; simultanément le chemin Δx parcouru par le point tend lui aussi vers zéro. L'expérience montre que le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ tend alors vers une limite bien déterminée qui ne dépend plus que de t. Cette limite est la *vitesse vraie du point matériel à l'instant t*:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

Des limites telles que (3.3) se rencontrent souvent en mathématiques et dans leurs applications. En mathématiques la limite définie par une formule de la forme (3.3) porte le nom de *dérivée* de la fonction $x(t)$ par rapport à la variable t. La dérivée par rapport au temps est désignée par le symbole $\dot{x}(t)$ ou dx/dt. Ainsi on a par définition

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3.4}$$

La notion de dérivée est la notion fondamentale du *calcul différentiel*. Mettant en œuvre cette notion, on dira que la *vitesse vraie* (ou *instantanée*) v est la dérivée de la coordonnée x par rapport au temps ou encore la dérivée par rapport au temps du chemin s parcouru par le mobile:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}. \tag{3.5}$$

La vitesse d'un point matériel dépend en général du temps: $v = v(t)$. La dérivée de la vitesse par rapport au temps porte le nom d'*accélération du mobile* que l'on désignera par a. Par définition

de l'accélération du mobile

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t), \tag{3.6}$$

ou bien

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \tag{3.7}$$

La dérivée (3.6) est la *dérivée seconde* de la coordonnée x par rapport au temps, que l'on représente par les symboles

$$a = \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{3.8}$$

En mécanique et d'une manière générale en physique, on justifie l'existence des dérivées première et seconde de la coordonnée par rapport au temps non par des raisonnements, mais par voie expérimentale.

2. Considérons quelques exemples simples.

Exemple 1. $x =$ const, ce qui signifie que la coordonnée x est invariable dans le temps. Le point matériel est donc immobile, et l'accroissement Δx de la coordonnée est nul. Les vitesses moyenne et vraie du point sont nulles: $v = \dot{x} = 0$. Ainsi la dérivée d'une quantité constante est nulle.

Exemple 2. $x = Bt + C$, où B et C sont des coefficients constants. On dit alors que la coordonnée x est une *fonction linéaire* du temps t. Il est évident que

$$x + \Delta x = B(t + \Delta t) + C = (Bt + C) + B\Delta t,$$

$$\Delta x = B\Delta t, \quad v_{\text{moy}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = B.$$

La vitesse moyenne est constante et égale à B. Par suite la vitesse vraie est elle aussi constante et égale à la vitesse moyenne:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_{\text{moy}} = B.$$

Un mouvement à vitesse constante est dit *uniforme*. En désignant par x_0 la *coordonnée initiale* x à l'instant $t = 0$, on a évidemment $x_0 = C$. Le chemin s parcouru par le point est déterminé par l'accroissement de la coordonnée: $s = x - x_0 = Bt$, soit

$$s = vt.$$

Exemple 3. $x = At^2 + Bt + C$, où A, B et C sont des coefficients constants. On dit que dans ce cas la coordonnée x est une *fonction quadratique* du temps t. Il est évident que

$$x + \Delta x = A(t + \Delta t)^2 + B(t + \Delta t) + C =$$
$$= (At^2 + Bt + C) + (2At + B)\Delta t + A(\Delta t)^2,$$

$$v_{\text{moy}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = (2At + B) + A\Delta t.$$

Nous voyons que la vitesse moyenne v_{moy} dépend non seulement de t, mais

aussi de Δt. A la limite, lorsque $\Delta t \to 0$, le terme $A\Delta t$ s'annule et la vitesse vraie du mobile a pour expression

$$v = 2At + B.$$

Comme la vitesse vraie est une fonction linéaire du temps t, par différentiation de cette fonction on obtient pour l'accélération une valeur constante:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2A.$$

Le mouvement à accélération constante est appelé *mouvement uniformément accéléré*. La constante A est égale à la moitié de l'accélération: $A = \frac{a}{2}$. Dégageons maintenant la signification physique des constantes B et C. Pour $t = 0$ nous tirons de nos formules $v = B$. La vitesse du mobile à l'instant $t = 0$ s'appelle *vitesse initiale* et on la désigne par v_0. Il s'ensuit que la constante B est égale à la vitesse initiale v_0: $B = v_0$. On démontrera de la même façon que la constante C représente la coordonnée initiale du mobile: $C = x_0$. En introduisant ces quantités on peut écrire

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0, \qquad v = at + v_0.$$

Le chemin parcouru par le mobile $s = x - x_0$, soit

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t.$$

A titre d'exemples de mouvements uniformément accélérés, nous citerons la chute libre d'un corps ou le roulement d'un corps sur un plan incliné en l'absence de frottement.

3. Par analogie avec les notions de vitesse et d'accélération *linéaires*, on introduit la *vitesse* et l'*accélération angulaires* qui se rapportent au cas du mouvement d'un point matériel le long d'une circonférence. La position du point M sur la circonférence peut être définie par l'angle α que forme le rayon vecteur OM avec une direction fixe OX (fig. 6). La dérivée par rapport au temps de cet angle

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

s'appelle *vitesse angulaire*. La rotation est dite *uniforme* si la vitesse angulaire ω est constante. Dans ce cas $\alpha = \omega t + \text{const.}$ Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme la quantité ω porte aussi le nom de *fréquence angulaire* ou *de pulsation*. La quantité $\nu = \omega/(2\pi)$, qui est égale au nombre de tours par unité de temps, s'appelle *fréquence de rotation*. La quantité $T = 1/\nu$ est la durée d'une rotation et porte le nom de *période de rotation*.

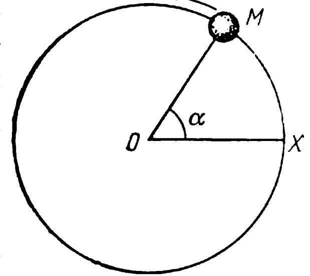


Fig. 6

La dérivée première de la vitesse angulaire ω ou la dérivée seconde de l'angle α par rapport au temps est l'*accélération angulaire*:

$$\dot{\omega}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

En désignant par s la longueur de l'arc XM de la circonférence, les dérivées de s par rapport au temps: $v=\frac{ds}{dt}$ et $a=\frac{d^2s}{dt^2}$ représentent la vitesse linéaire et l'accélération linéaire d'un mobile se déplaçant le long d'une circonférence. Si r est le rayon de la circonférence, on a $s=r\alpha$. En dérivant cette relation par rapport au temps, on trouve

$$v=\omega r \quad \text{et} \quad a=\dot{\omega}r.$$

§ 4. Vitesse et accélération dans le mouvement curviligne

1. On généralise aisément les notions de vitesse et d'accélération au cas du mouvement d'un point matériel le long d'une *trajectoire curviligne*. Nous définirons la position du point mobile sur la trajectoire par le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ le reliant à un point fixe O qu'on

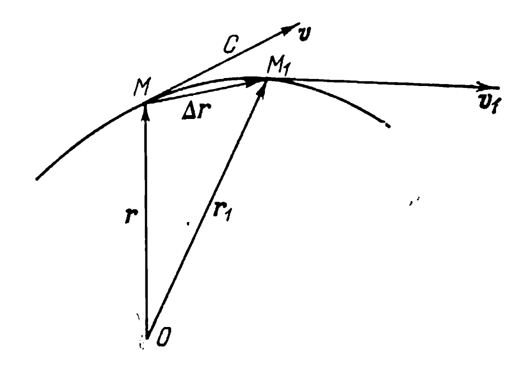


Fig. 7

prend par convention pour origine des coordonnées (fig. 7). Posons qu'à l'instant t le point matériel se trouve dans la position M définie par le rayon vecteur $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$. Au bout d'un court intervalle de temps Δt il se trouvera dans la position M_1 définie par le rayon vecteur $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$. Lors de ce déplacement le rayon vecteur prend un accroissement déterminé par la différence géométrique $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}$. La quantité

$$v_{\text{moy}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{4.1}$$

est la *vitesse moyenne de mouvement pendant l'intervalle de temps* Δt, *compris entre les instants* t *et* $t + \Delta t$. C'est une grandeur *vectorielle* puisqu'elle s'obtient en divisant le vecteur $\Delta \boldsymbol{r}$ par le scalaire Δt. La direction de la vitesse moyenne v_{moy} coïncide avec celle de la corde MM_1, donc avec celle de $\Delta \boldsymbol{r}$.

La limite de la vitesse moyenne pour $\Delta t \to 0$, qui est la dérivée du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ par rapport au temps

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{4.2}$$

est la *vitesse vraie du point matériel. La vitesse vraie est un vecteur dirigé le long de la tangente à la trajectoire du point mobile.*

On définit de même l'accélération dans le mouvement curviligne. *L'accélération* $\boldsymbol{a}$ *est un vecteur qui est égal à la dérivée première du vecteur vitesse* $\boldsymbol{v}$ *ou à la dérivée seconde du rayon vecteur* $\boldsymbol{r}$ *par rapport au temps*:

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}, \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{4.4}$$

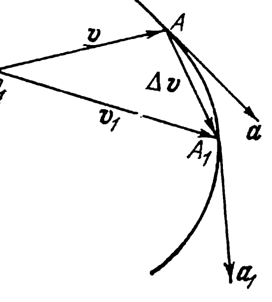


Fig. 8

2. Il existe une analogie formelle entre la vitesse et l'accélération. Par un point O_1 fixe arbitraire, on mène des vecteurs équipollents aux vecteurs vitesse $\boldsymbol{v}$ du point mobile à tous les instants (fig. 8). Le lieu géométrique des extrémités des vecteurs équipollents est une courbe appelée *hodographe du mouvement*. Lorsque le point mobile décrit sa trajectoire, l'extrémité des vecteurs équipollents aux vecteurs vitesse de ce même point se déplace le long de l'hodographe. Aussi les courbes des figures 7 et 8 ne se distinguent l'une de l'autre que par les notations utilisées. Sur la figure 8 le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ remplace le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ de la figure 7, de même l'extrémité du vecteur vitesse prend la place du point mobile, et l'hodographe celle de la trajectoire. Les opérations mathématiques sur le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ que l'on effectue pour calculer la vitesse du mobile sont identiques à celles que l'on applique au vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ pour calculer l'accélération. Du point de vue des mathématiques, la signification physique que peuvent avoir les grandeurs figurant dans le calcul ou les symboles par lesquels on les dénote importent peu. Pour calculer la vitesse $\boldsymbol{v}$ du mobile, il faut dériver le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ et pour calculer son accélération on prendra la dérivée du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$. Comme la vitesse $\boldsymbol{v}$ est portée par la tangente à la trajectoire, *l'accélération* $\boldsymbol{a}$ *sera portée par la tangente à l'hodographe*. Il s'ensuit que *toutes les relations et tous les théorèmes que l'on peut établir*

pour la vitesse resteront valables pour l'accélération, à condition toutefois d'y effectuer les substitutions suivantes:

Point mobile → Extrémité du vecteur vitesse
Rayon vecteur → Vecteur vitesse
Trajectoire → Hodographe
Vitesse → Accélération

3. A titre d'exemple simple déterminons l'accélération d'un point en mouvement uniforme sur une trajectoire circulaire de rayon r (fig. 9, a). La vitesse v est dirigée le long de la tangente au cercle et a pour valeur

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}. \tag{4.5}$$

L'hodographe sera un cercle de rayon v (fig. 9, b). Lorsque le point matériel M décrit dans le temps T le cercle de rayon r, l'extrémité du vecteur vitesse A tourne dans le même sens et parcourt un

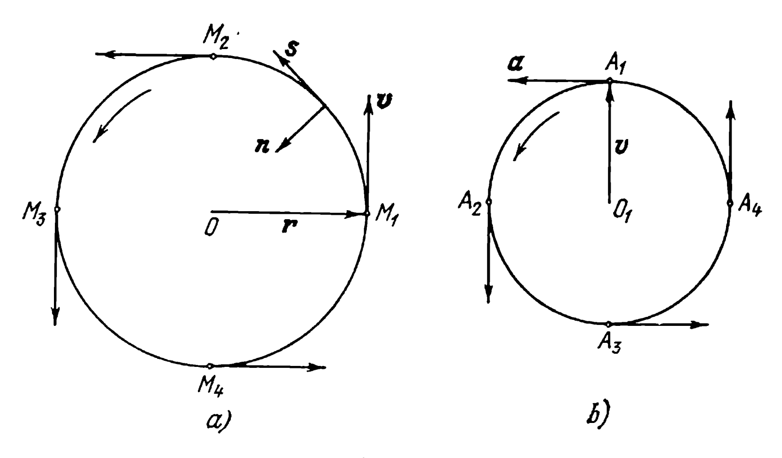


Fig. 9

cercle de rayon v dans le même temps T. Aux positions successives M_1, M_2, M_3, M_4 du mobile sur la trajectoire correspondent les positions A_1, A_2, A_3, A_4 de l'extrémité du vecteur v sur l'hodographe. L'accélération a est dirigée suivant la tangente à l'hodographe, qui est un cercle de rayon v, et vers le centre O de la trajectoire circulaire du mobile M. Par analogie avec la formule (4.5) la valeur de l'accélération s'exprime par la formule

$$a = \omega v = \frac{2\pi v}{T} = \frac{v^2}{r}. \tag{4.6}$$

C'est la formule bien connue de l'*accélération centrale* qui sous forme vectorielle s'écrit

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}. \qquad (4.7)$$

Le signe moins indique que les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{r}$ sont de sens opposés, l'accélération $\boldsymbol{a}$ étant dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire du point mobile. Pour toute position du point mobile on peut exprimer son accélération par l'expression

$$\boldsymbol{a} = \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n}, \qquad (4.8)$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à la trajectoire circulaire, pointant vers le centre O (voir fig. 9, a).

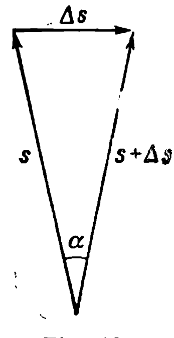


Fig. 10

En vue des généralisations auxquelles nous procéderons plus tard, nous représenterons le vecteur vitesse sous la forme $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}$ étant un vecteur unitaire de la tangente au cercle. Le facteur v détermine la valeur numérique (le module) de la vitesse et le facteur $\boldsymbol{s}$ détermine sa direction et son sens. Pour un mouvement circulaire uniforme, le module v de la vitesse est constant, seule varie la direction du vecteur unitaire $\boldsymbol{s}$. On ne doit donc dériver que ce vecteur $\boldsymbol{s}$, de sorte que $\boldsymbol{a} = v\, d\boldsymbol{s}/dt$. Comparant cette expression avec (4.8) on trouve

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \frac{v}{r}\boldsymbol{n}. \qquad (4.9)$$

Désignons par ds la longueur du chemin parcouru par le point mobile (sur une trajectoire circulaire) dans l'intervalle de temps dt. C'est une quantité positive égale à $ds = v\,dt$; par suite la formule (4.9) peut s'écrire

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{ds} = \frac{1}{r}\boldsymbol{n}. \qquad (4.10)$$

Cette dernière formule ne renferme aucune quantité cinématique puisque n'y figurent que des quantités géométriques caractérisant le cercle. On peut donc l'établir par une construction purement géométrique sans avoir recours aux concepts de la cinématique. Cette formule détermine la dérivée du vecteur unitaire $\boldsymbol{s}$ de la tangente à un arc de cercle. Les vecteurs $\boldsymbol{s}$ et $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ $\left(\text{ou } \frac{d\boldsymbol{s}}{dt}\right)$ sont orthogonaux parce que le module de $\boldsymbol{s}$ est constant, et seule sa direction varie. Le triangle que l'on construit avec les vecteurs $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s} + \Delta\boldsymbol{s}$ et $\Delta\boldsymbol{s}$ (fig. 10) est un triangle isocèle. Lorsque l'élément d'arc Δs tend vers zéro, l'angle au sommet α tend aussi vers zéro. Par suite la direction du vecteur $\frac{\Delta\boldsymbol{s}}{\Delta s}$ devient, à la limite, normale à celle du

vecteur $\boldsymbol{s}$. Cette propriété n'est pas certes une propriété spécifique du vecteur unitaire $\boldsymbol{s}$. La dérivée de tout vecteur $\boldsymbol{A}$ de longueur constante par rapport à toute variable scalaire est un vecteur normal au vecteur $\boldsymbol{A}$.

4. On peut généraliser la formule (4.10) à toute courbe différentiable. Conservons la notation $\boldsymbol{s}$ pour désigner le vecteur unitaire de la tangente à la courbe, et la notation ds pour l'élément d'arc de cette courbe. La dérivée $d\boldsymbol{s}/ds$ est un vecteur normal à la concavité de la courbe. Cette dérivée peut être exprimée par la formule (4.10) en supposant que la quantité $1/r$ est un facteur de proportionnalité entre les vecteurs $d\boldsymbol{s}/ds$ et $\boldsymbol{n}$. Cette formule exprime simplement le fait que la dérivée $d\boldsymbol{s}/ds$ est un vecteur normal à la courbe. Par ailleurs cette formule permet de définir deux nouvelles notions: le facteur $1/r$ et le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$. La quantité $1/r$ est la *courbure de la courbe*, r est le *rayon de courbure* et le vecteur $\boldsymbol{n}$ est le *vecteur unitaire de la normale principale* à la courbe. On pose que la courbure $1/r$ est une quantité essentiellement positive et par suite le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ est toujours dirigé dans la concavité de la courbe. Cette terminologie est justifiée par ce qu'intuitivement dans toute étude de courbure on peut assimiler un arc élémentaire de courbe à un arc de cercle. Cette approximation est d'autant plus valable que l'élément d'arc Δs est petit. Pour un cercle la courbure $1/r$ est constante en tout point. Pour une courbe différentiable de forme arbitraire, la courbure varie d'un point à l'autre et par suite varient sans discontinuité la direction et le sens du vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ de la normale principale. La formule cinématique (4.9) reste valable pour décrire le mouvement d'un mobile le long de toute courbe, que la vitesse v soit constante ou varie avec le temps. En effet la formule (4.10) se déduit de (4.9) en posant $ds = v\, dt$.

On sait que toutes les courbes se subdivisent en courbes planes et en courbes gauches. Si tous les points d'une courbe se trouvent dans un seul et même plan, on dit que la courbe est *plane*, mais si les points de la courbe se situent dans des plans différents, on dit que la courbe est *gauche*. Le cercle, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole, la sinusoïde, etc., sont des courbes planes. Quant à l'hélice, c'est une courbe gauche. On appelle *plan osculateur* à une courbe le plan défini par la tangente et la normale principale au point considéré de la courbe. Dans le cas d'une courbe plane, le plan osculateur se confond avec le plan de la courbe elle-même. La notion de plan osculateur se déduit des considérations intuitives suivantes. Il est bien évident qu'aucun élément d'arc fini d'une courbe gauche ne peut être contenu dans un plan. Plus l'élément d'arc est petit, plus l'erreur que l'on commet en l'ajustant à un plan est petite. C'est ainsi que l'on arrive à la notion approchée du plan osculateur. Cette représentation intuitive peut aboutir à une définition exacte par un passage à la limite. Soit M un point arbitraire de la courbe (fig. 7) et soient MC la tan-

gente à la courbe en M et MM_1 une corde. Ces deux droites définissent un plan CMM_1. Si on rapproche indéfiniment le point M_1 du point M, ce plan tend vers une position limite qui est précisément le plan osculateur. La normale au plan osculateur en M est appelée *binormale à la courbe* en ce point.

5. Dans le cas d'une rotation uniforme du point mobile le long d'un cercle, l'accélération est dirigée vers le centre du cercle, donc normalement à la trajectoire. Quelle que soit la forme de la trajectoire, l'accélération du mobile sera normale à la trajectoire si le module de sa vitesse est constant. Voyons ce qui se passera si le module de la vitesse varie le long de la trajectoire. Ecrivons le vecteur vitesse sous la forme $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{s}$. Appliquant à cette égalité la règle de dérivation d'un produit, nous obtenons

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{s}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} + v\frac{d\boldsymbol{s}}{dt},$$

et en tenant compte de (4.9)

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} + \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n}. \tag{4.11}$$

Ce résultat montre que *le vecteur accélération* $\boldsymbol{a}$ *est contenu dans le plan défini par les vecteurs* $\boldsymbol{s}$ *et* $\boldsymbol{n}$ *et ce plan est le plan osculateur. Le vecteur* $\boldsymbol{a}$ *n'a pas de composante suivant la binormale à la trajectoire.* Dans le cas général le vecteur $\boldsymbol{a}$ forme un angle avec la trajectoire. Le premier terme figurant dans (4.11)

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} \tag{4.12}$$

est un vecteur porté par la tangente à la trajectoire; on l'appelle *accélération tangentielle*. Le deuxième terme

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n} \tag{4.13}$$

est un vecteur porté par la normale principale et dirigé vers la concavité de la trajectoire ; on l'appelle *accélération normale*. Ainsi, dans le cas général, *l'accélération* $\boldsymbol{a}$ *peut être représentée sous forme de la somme géométrique de l'accélération normale et de l'accélération tangentielle*:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n. \tag{4.14}$$

L'accélération tangentielle ne fait varier que le module de la vitesse, tandis que l'accélération normale ne fait varier que sa direction.

La figure 11 illustre la décomposition de l'accélération totale d'un point mobile en accélérations tangentielle et normale. Soit $\boldsymbol{v}$ la vitesse du point mobile se trouvant en M à l'instant t. A un instant ultérieur $t + \Delta t$, la vitesse du mobile se trouvant en M_1 (non indiqué sur la figure) sera $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}$. Menons par un même point

M les deux vecteurs v et v_1 et décomposons l'accroissement Δv de la vitesse en deux composantes: la composante Δv_t dirigée suivant le vecteur v et la composante Δv_n dirigée suivant la normale à ce vecteur. A mesure que Δt diminue les rapports $\frac{\Delta v_t}{\Delta t}$ et $\frac{\Delta v_n}{\Delta t}$ tendent vers des limites déterminées. La limite du premier rapport est l'accélération tangentielle et celle du second est l'accélération normale.

Dans les calculs de la vitesse d'un point mobile, l'élément d'arc

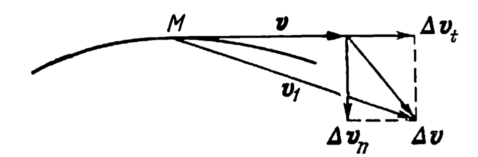


Fig. 11

infiniment petit de la trajectoire peut être remplacé par un segment de droite infiniment court dont la direction est celle de la tangente à la trajectoire au point considéré. Cette approximation n'est plus utilisable dans les calculs de l'accélération. Les considérations qui précèdent montrent cependant qu'un élément d'arc de la trajectoire infiniment petit peut être remplacé par un arc de cercle qui est contenu dans le plan osculateur et dont le rayon est égal au rayon de courbure de la trajectoire au point considéré. Cette approximation devient inacceptable pour le calcul des dérivées supérieures du rayon vecteur: $\dddot{r}$, $\ddddot{r}$, etc.

PROBLÈMES

1. Soit une bille qui, animée d'une vitesse horizontale v, tombe d'une hauteur h sur une plaque horizontale. Le choc de la bille contre la plaque s'accompagne d'une perte de vitesse (le rapport de la composante verticale de la vitesse après le choc à sa valeur avant le choc est une constante α).

Calculer à quelle distance x du point de chute la bille ne rebondira plus. On suppose qu'il n'y a pas de frottement, ce qui implique que la composante horizontale de la vitesse de la bille ne varie pas.

Réponse: $x = v\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$.

2. Soit un point qui se meut sur un plan; les coordonnées cartésiennes du point mobile sont définies par les équations

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = B\sin\omega t, \tag{4.15}$$

A, B et ω étant des constantes. Déterminer la trajectoire du point mobile et son accélération.

Solution. En éliminant le temps t entre les équations (4.15) on trouve

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Le point se meut le long d'une ellipse. Son rayon vecteur est $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ et son accélération est $\boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j}$. Différentions deux fois les équations (4.15)

$$\dot{x} = -\omega A \sin \omega t, \quad \ddot{x} = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x,$$

$$\dot{y} = \omega B \cos \omega t, \quad \ddot{y} = -\omega^2 B \sin \omega t = -\omega^2 y.$$

Par conséquent

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -\omega^2 \boldsymbol{r}. \tag{4.16}$$

L'accélération est dirigée vers le centre de l'ellipse et est proportionnelle à r. Dans le cas particulier où $A = B$, l'ellipse se réduit à un cercle et la formule (4.16) sa ramène à la formule connue de l'accélération centrale d'un mouvement circulaire uniforme.

3. Déterminer la relation existant entre le jour solaire moyen et le jour sidéral. L'*année sidérale* qui est l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du Soleil par le même point de son orbite apparente comporte

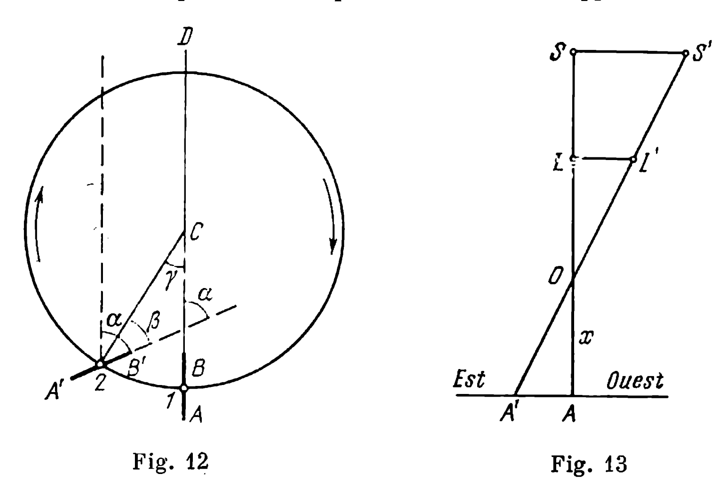


Fig. 12 Fig. 13

365,2564 jours solaires moyens. (On doit distinguer année sidérale et *année tropique* qui est l'intervalle de temps séparant deux équinoxes de printemps consécutifs et qui comporte 365,2422 jours solaires moyens).

S o l u t i o n. Supposons que dans la position *1* de la figure 12 le plan AB du méridien terrestre passe par le centre C du Soleil et une étoile D se trouvant à l'infini. Lorsque la Terre, du fait de son mouvement orbital, se trouvera dans la position *2*, le plan du méridien considéré aura tourné d'un angle α par rapport à la direction qui la relie à l'étoile et d'un angle β par rapport à la droite qui la relie au centre du Soleil. Les angles α et β peuvent devenir supérieurs à 2π, mais ils satisfont toujours à la relation $\alpha = \beta + \gamma$, où γ est l'angle entre les pointages du centre du Soleil dans les positions *1* et *2*. Au bout d'une année sidérale, lorsque la Terre viendra se replacer dans le plan initial $1CD$, l'angle γ deviendra égal à 2π et par suite dans cette position $\alpha = \beta + 2\pi$. A cet intervalle de temps correspondent $N_{\text{sid}} = \alpha/2\pi$ jours sidéraux et $N_{\text{sol}} = \beta/2\pi$ jours solaires moyens. Par suite $N_{\text{sid}} = N_{\text{sol}} + 1$. Si on dénote par T_{sid} la durée du jour sidéral et par T_{sol} la durée du jour solaire moyen, il est évident que $N_{\text{sid}} \cdot T_{\text{sid}} = N_{\text{sol}} \cdot T_{\text{sol}}$, puisque ces deux produits représentent tous deux

l'année sidérale. A l'aide de l'égalité $N_{\text{sid}} = N_{\text{sol}} + 1$ on trouve

$$T_{\text{sid}} = \frac{N_{\text{sol}}}{N_{\text{sol}}+1} T_{\text{sol}}, \quad T_{\text{sol}} - T_{\text{sid}} = \frac{1}{N_{\text{sol}}+1} T_{\text{sol}}.$$

En y portant $T_{\text{sol}} = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$ s, $N_{\text{sol}} = 365{,}2564$ on obtient:

$$T_{\text{sol}} - T_{\text{sid}} = 235{,}9003 \text{ s} \approx 236 \text{ s}, \quad T_{\text{sid}} \approx 86\,164 \text{ s}.$$

On notera que pour ce calcul il n'a pas été nécessaire de supposer que le mouvement de la Terre sur son orbite est uniforme.

4. Déterminer la vitesse de déplacement de l'ombre de la Lune sur la surface terrestre pendant une éclipse totale du Soleil.

Solution. Admettons pour simplifier que l'éclipse est observée à l'équateur et que l'axe terrestre est perpendiculaire aux plans des orbites du Soleil et de la Lune. Nous considérons la vitesse de la lumière comme étant infiniment grande comparativement à toutes les autres vitesses figurant dans notre problème. Supposons qu'à un instant donné la droite reliant le Soleil et la Lune soit perpendiculaire à la surface terrestre au point d'observation A (fig. 13). Nous pouvons admettre qu'au voisinage du point A la surface de la Terre est plane. Nous effectuerons nos calculs en adoptant un référentiel par rapport auquel la Terre est au repos. Soient ω_S et ω_L les vitesses angulaires du Soleil et de la Terre autour du centre de la Terre, R_S et R_L leurs distances jusqu'au centre de la Terre et enfin r le rayon de la Terre. En une seconde le Soleil et la Lune se déplaceront d'Est en Ouest d'une distance: $SS' = \omega_S R_S$ et $LL' = \omega_L R_L$. En reliant par une droite les nouvelles positions du Soleil et de la Lune, nous trouverons que le bord de l'ombre de la Lune se déplace sur la surface terrestre dans le sens ouest-est d'une distance $v = AA'$. Cette distance est la vitesse du mouvement de l'ombre de la Lune. Il ressort de la figure 13 que

$$\frac{v}{\omega_S R_S} = \frac{x}{OS} \approx \frac{x}{R_S},$$

puisque la distance Terre-Lune est petite par rapport à la distance au Soleil on peut poser $OS = R_S$. Par conséquent $v = \omega_S x$. Pour trouver x nous prendrons les rapports

$$\frac{\omega_S R_S}{\omega_L R_L} = \frac{SS'}{LL'} = \frac{OS}{OL}.$$

En posant $OS = R_S$, $OL = R_L - x - r$, nous trouvons l'équation pour x:

$$x = \frac{\omega_S - \omega_L}{\omega_S} R_L - r.$$

La vitesse de déplacement de l'ombre de la Lune de l'ouest vers l'est est donc:

$$v = \omega_S x = (\omega_S - \omega_L) R_L - \omega_S r.$$

Nous avons $\omega_S = \frac{2\pi}{T_j}$, $\omega_S - \omega_L = \frac{2\pi}{T_{\text{mois}}}$, avec $T_j = 86\,400$ s — durée du jour solaire et $T_{\text{mois}} = 29{,}6\ T_j$ — durée d'un mois. Utilisant ces relations et portant les valeurs numériques $R_L = 3{,}8 \cdot 10^5$ km, $r = 6400$ km, nous obtenons

$$v = \frac{2\pi R_L}{T_{\text{mois}}} - \frac{2\pi r}{T_j} \approx 0{,}47 \text{ km/s}. \tag{4.17}$$

Pour mieux apprécier la signification de ce résultat, il convient de passer dans le référentiel par rapport auquel le Soleil est immobile. En posant que le Soleil se trouve à une distance infinie, nous pouvons négliger le mouvement du centre de la Terre et ne tenir compte que de sa rotation autour de son propre axe et du mouvement de la Lune autour de la Terre. La Lune parcourt son

orbite dans le sens ouest-est à une vitesse $v_L = \frac{2\pi R_L}{T_{\text{mois}}}$. Si la Terre ne tournait pas autour de son axe, l'ombre de la Lune se déplacerait sur la surface terrestre à la même vitesse et dans le même sens. Mais comme elle tourne, ses points équatoriaux se meuvent dans le sens ouest-est à la vitesse $v_T = \frac{2\pi r}{T_j}$. Pour trouver la vitesse de l'ombre lunaire on doit soustraire cette dernière quantité de v_L, ce qui est fait dans la formule (4.17).

§ 5. Limites de validité de la description classique du mouvement

En mécanique classique on caractérise, à tout instant, l'état de mouvement d'une particule par sa position (coordonnée x pour le mouvement rectiligne) *et par sa vitesse* v. A la place de la vitesse on peut utiliser également l'*impulsion* $p = mv$, grandeur égale au produit de la *masse de la particule* m par sa vitesse *). L'image d'une particule élémentaire est le point géométrique qui décrit dans le temps une trajectoire continue. On démontre en mécanique quantique que ce procédé de description du mouvement a en principe une application limitée. Il est encore prématuré de s'engager dans une discussion de cette question, mais on peut donner ici un exposé succinct du résultat fondamental auquel conduit la mécanique quantique, sans le justifier d'aucune manière.

Selon la mécanique quantique, l'état d'une particule ne peut être caractérisé à aucun moment par les valeurs précises de sa coordonnée et de son impulsion instantanées. Si on connaît, pour un certain état de la particule, la valeur de sa coordonnée avec une incertitude δx et celle de son impulsion avec une incertitude δp, il est impossible de rendre simultanément ces deux quantités aussi petites que l'on veut, car elles sont liées l'une à l'autre par la relation

$$\delta x \cdot \delta p \geqslant h, \tag{5.1}$$

où h est une constante universelle appelée *constante de Planck* (1858-1947). Cette constante joue un rôle de premier plan dans tous les phénomènes quantiques; sa valeur numérique est

$$h = 6{,}63 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}. \tag{5.2}$$

La relation (5.1) exprime le *principe d'incertitude de Heisenberg* (né en 1901) qui fixe une limite de principe à la précision d'une mesure simultanée de la coordonnée et de l'impulsion d'une particule; cette limite ne peut être dépassée par aucun perfectionnement des appareils et des procédés de mesure. Il ne s'agit pas ici des erreurs de mesure, car c'est une manifestation de la nature des particules réelles dont les caractéristiques instantanées de mouvement ne se laissent pas déterminer par le procédé classique, c'est-à-dire par des

*) Nous supposons que le lecteur est déjà familier avec le concept de masse. Les concepts de masse et d'impulsion sont interprétés en détail au § 10.

valeurs exactes de leurs coordonnées et impulsions. Les particules ont un comportement plus compliqué que celui des points matériels de la mécanique classique. L'image classique du mouvement suivant des trajectoires continues ne reflète qu'approximativement les lois de la Nature. Les limites de validité de la mécanique classique sont fixées par la relation d'incertitude (5.1) selon laquelle l'état de mouvement d'une particule ne peut être décrit à un instant donné par des valeurs parfaitement exactes de sa coordonnée et de sa vitesse. Les indéterminations de ces grandeurs doivent satisfaire à la condition

$$\delta x \cdot m\delta v \gtrsim h. \tag{5.3}$$

Pour des corps macroscopiques le procédé de description classique ne saurait être mis en doute. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du mouvement d'une bille ayant une masse $m = 1$ g. Dans les conditions usuelles la position de la bille peut être déterminée à 0,1 ou 0,01 mm près. Plus généralement il serait dénué de sens de vouloir préciser la position de la bille avec une précision inférieure à la dimension de l'atome. On posera donc $\delta x = 10^{-8}$ cm. L'application de la relation d'incertitude (5.1) donne alors

$$\delta v \gtrsim \frac{6{,}63 \cdot 10^{-27}}{10^{-8}} \approx 10^{-18}\,\text{cm/s}$$

Comme les quantités δx et δv sont toutes deux et simultanément très petites, on en conclut que le procédé classique est pratiquement utilisable pour la description du mouvement des corps macroscopiques. Il en va tout autrement avec les phénomènes atomiques qui impliquent des particules de très petites masses et se produisent dans de très petites régions de l'espace. Considérons, par exemple, le mouvement de l'électron dans l'atome d'hydrogène. La masse de l'électron est $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g. L'erreur commise dans la détermination de la position de l'électron ne doit pas être supérieure à la dimension de l'atome, donc on doit avoir $\delta x < 10^{-8}$ cm. On tire alors de la relation d'incertitude

$$\delta v > \frac{h}{m\delta x} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-27}}{9{,}11 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-8}} \approx 7 \cdot 10^{8}\,\text{cm/s}$$

L'incertitude sur la valeur de la vitesse est déjà plus grande que la vitesse de l'électron au sein de l'atome, qui est égale à 10^8 cm/s. Dans cette situation la description classique du mouvement est dénuée de sens.

§ 6. Sur la signification de la dérivée et de l'intégrale en physique

1. Le procédé de passage à la limite (3.4) qui sert à définir la dérivée porte le nom de *dérivation*. La notion de dérivée est d'un emploi courant en mécanique et dans les autres domaines de la physi-

que. C'est précisément l'étude du problème de la détermination de la vitesse d'un mouvement arbitraire qui a conduit Newton à définir la notion de dérivée; Newton et Leibniz (1646-1716) sont les fondateurs du calcul différentiel et intégral. La notation $\frac{dx}{dt}$ de la dérivée fut introduite par Leibniz. En mathématiques le symbole $\frac{dx}{dt}$ doit être pris comme une entité et non comme le rapport de deux accroissements « infiniment petits » dx et dt. La signification de la dérivée $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ est définie par la relation (3.4). Pour arriver à la dérivée on commence par former le rapport des accroissements finis $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, Δt étant différent de zéro. Ensuite, mettant en œuvre des transformations convenables de ce rapport ou tout autre moyen, on doit déterminer la limite de ce rapport. Mais on ne peut en aucun cas concevoir qu'on effectue d'abord un passage à la limite de Δx et de Δt aux quantités « infiniment petites » dx et dt et qu'après on forme le rapport $\frac{dx}{dt}$ de ces différentielles. Néanmoins c'est cette approche qui était en vigueur tout au début du développement du calcul différentiel; notons qu'elle ne peut satisfaire à la condition de clarté des concepts mathématiques et est complètement dénuée de sens, bien que l'on puisse déterminer les différentielles dx et dt de manière que leur rapport devienne égal à la dérivée $\dot{x}$. En mathématiques on définit la différentielle dt comme un accroissement arbitraire de la variable t, et la différentielle dx de la fonction par la relation $dx = \dot{x}\, dt$. Avec cette dernière définition l'assertion que la dérivée est le rapport de deux quantités finies dx et dt devient évidente, puisque c'est une autre manière d'exprimer une notion. La notion primaire est toujours celle de dérivée et non de la différentielle.

Néanmoins dans les applications des mathématiques à la physique, on doit tenir compte de ce que la connaissance des grandeurs physiques résulte en fin de compte de mesures concrètes qui sont toutes entachées d'erreurs et perturbent l'évolution naturelle des phénomènes. C'est cette circonstance qui, en toute rigueur, ne permet pas de mettre en œuvre le passage à la limite $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, qui en mathématiques conduit à la définition de la dérivée. Supposons, par exemple, que l'on cherche à mesurer la vitesse dans l'air d'une balle tirée par une arme à feu. Il s'agit de mesurer la distance Δx que parcourt la balle dans l'intervalle de temps Δt. Si on prend un intervalle de temps Δt trop long, la vitesse de la balle peut diminuer notablement du fait de la résistance de l'air, et le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ peut avoir une valeur plus petite que la vitesse réelle de la balle à l'instant considéré. Si on diminue Δt on remarquera qu'à partir d'une

certaine valeur, le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ reste constant, aux erreurs expérimentales près, abstraction faite des erreurs fortuites. Il est inutile de réduire davantage Δt car alors le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ recommencera à varier et ce d'une façon de plus en plus irrégulière ; ce rapport prendra toutes sortes de valeurs, grandes ou très petites. Cela tient à ce que l'erreur relative de toute mesure est d'autant plus grande que la grandeur mesurée est petite. Il est, par exemple, assez facile de mesurer une longueur de 1 m à 1 mm près, donc avec une précision relative de 1/1000. Mais mesurer avec cette même précision relative une longueur de 1 mm est beaucoup plus difficile. Plus Δt est petit, plus l'erreur commise dans le calcul de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est grande. Même si on diminuait indéfiniment Δt, les valeurs calculées de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ne tendraient pas vers une limite déterminée. Ces remarques montrent que dans notre exemple, du fait des erreurs de mesure, on ne peut réaliser le passage à la limite $\Delta t \to 0$ dans son sens mathématique. Partant des résultats de mesures physiques, on ne peut calculer la vitesse vraie ou la dérivée $v = \dot{x}$ que de façon approchée, en l'identifiant au rapport des accroissements finis $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. L'intervalle de temps Δt optimum, pour lequel la précision du calcul de la vitesse vraie serait la meilleure, ne se laisse déterminer qu'en tenant compte des conditions concrètes. Les accroissements petits mais finis Δx et Δt, dont le rapport fournit avec une approximation suffisante la valeur de la dérivée $\dot{x}$, sont pour le physicien des infiniment petits ou plus précisément des quantités physiquement infiniment petites. Le physicien les désigne par dx et dt et les traite comme des différentielles du mathématicien. Ainsi, *en physique, la dérivée apparaît comme le rapport des accroissements finis et petits de la variable et de la fonction et non comme la limite de ce rapport.*

Ce ne sont pas seulement les erreurs de mesures qui s'opposent à ce que soit réalisé dans la pratique le passage à la vraie limite mathématique ; il se peut aussi que ce passage à la limite soit impossible par principe, pour des raisons inhérentes à la nature des grandeurs ou des lois de la physique. Ainsi, par exemple, un passage à la limite ne peut être rigoureux en vertu de la relation d'incertitude (5.1). Si, en effet, l'intervalle de temps Δt tend vers zéro, le chemin parcouru Δx tendra aussi vers zéro. L'indétermination δx dans la mesure du chemin parcouru ne doit pas dépasser Δx, sinon le calcul de la vitesse moyenne par application de la formule $v_{\text{moy}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ serait dénué de sens. Ainsi lorsque $\Delta t \to 0$ l'indétermination sur la coordonnée δx doit tendre aussi vers zéro. Mais selon la relation (5.1) l'indétermi-

nation sur la vitesse δv doit tendre alors vers l'infini, ce qui signifie que l'erreur que nous commettons en appliquant la formule (3.3) pour calculer la vitesse v est infiniment grande comparativement à la vitesse du mobile v.

2. Ces considérations s'appliquent non seulement à la dérivée de la coordonnée, mais aussi aux dérivées de toutes les autres grandeurs physiques. Soit à déterminer, par exemple, la densité d'une substance en un point de l'espace. Pour ce faire nous pouvons procéder comme suit. Entourons le point choisi par une surface fermée délimitant un volume ΔV. Soit Δm la masse de substance contenue dans ce volume. Le rapport

$$\rho_{\text{moy}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

est appelé *densité moyenne de la substance dans le volume* ΔV. Comme la densité moyenne dépend, en général, de la dimension et de la forme du volume ΔV, on introduit la notion de *densité vraie* de la substance que l'on détermine en faisant tendre ΔV vers zéro. On dit alors que la densité moyenne ρ_{moy} tend vers une limite déterminée ρ qui est la densité vraie de la substance au point considéré de l'espace :

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \tag{6.1}$$

La *densité vraie est donc définie comme la dérivée de la masse par rapport au volume.* Elle ne dépend que de la position du point concerné. Si cependant on voulait appliquer à la formule (6.1) le concept de passage à la limite dans le sens mathématique rigoureux, on ne pourrait le faire du fait de la structure atomique de la matière. A mesure que l'on ferait décroître le volume, il arriverait un moment où ce volume n'engloberait qu'un petit nombre de molécules, une par exemple, ou même aucune. D'autre part, comme les molécules sont animées de mouvements d'agitation thermique désordonnés, certaines molécules s'échappent du volume ΔV, d'autres y pénètrent. Par suite, le nombre de molécules contenues dans un petit volume ΔV invariable varie rapidement et de manière désordonnée. Aussi lorsqu'on diminue le volume ΔV, le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ subira des variations rapides entre la valeur zéro, si le volume ΔV ne contient aucune molécule, et une très grande valeur si ce même volume contient une ou plusieurs molécules. Il est clair que si on diminue indéfiniment le volume ΔV, le rapport $\Delta m/\Delta V$ ne tendra pas vers une limite bien déterminée. On en conclut que pour déterminer la densité vraie d'une substance, on ne doit pas rendre les quantités Δm et ΔV infiniment petites. Le volume ΔV doit être macroscopique et contenir donc un très grand nombre de molécules, tout en étant suffisamment petit pour que l'on puisse considérer la substance qu'il renfer-

me comme macroscopiquement homogène. Si on satisfait à ces deux conditions, le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ prendra une valeur bien déterminée ne changeant pas si on diminue encore le volume macroscopique ΔV. C'est ce rapport que nous assimilons en physique à la dérivée de la masse m par rapport au volume V. Les quantités Δm et ΔV qui satisfont aux deux conditions ci-dessus sont considérées en physique comme des quantités *physiquement infiniment petites*, et le physicien les assimile aux différentielles du mathématicien. Du point de vue des mathématiques, cela revient à substituer au corps réel un modèle idéalisé avec une répartition continue de la masse.

3. La situation est exactement la même en ce qui concerne la notion d'intégrale. En mathématiques l'intégrale est définie par le passage à la limite

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(x_i)\,\Delta x_i$$

L'intervalle numérique (a, b) est divisé en n intervalles plus petits $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. La longueur de chaque intervalle Δx_i est multipliée par la valeur que prend la fonction $f(x)$ en un point quelconque situé à l'intérieur du petit intervalle des valeurs de la variable. Ensuite on forme la somme $\sum f(x_i)\,\Delta x_i$ et on passe à la limite $n \to \infty$ en admettant que la longueur de chacun des petits intervalles tend vers zéro. Mais en physique, par suite d'erreurs de mesure ou de questions de principe (telles que la nature atomique de la matière), la subdivision de l'intervalle (a, b) en des intervalles plus petits qu'une certaine longueur (dépendant de conditions concrètes) est dénuée de sens. Il s'ensuit que le passage à la limite $\Delta x_i \to 0$ ne peut être entièrement réalisé et doit s'arrêter à une certaine valeur. Ainsi, *en physique, l'intégrale apparaît non comme la limite d'une somme, mais comme la somme d'un grand nombre de termes suffisamment petits* $\sum f(x_i)\,\Delta x_i$.

§ 7. Remarques sur les vecteurs et la composition des mouvements

1. Nous supposons connus la notion de vecteur et les fondements du calcul vectoriel. Nous nous proposons de préciser quelques questions de principe importantes en physique. Parmi les grandeurs physiques il en est qui ne sont pas orientées et d'autres qui le sont. Les premières portent le nom de *grandeurs scalaires*; telles sont les grandeurs: la masse, l'énergie, la température, la charge électrique, etc. Les grandeurs orientées sont appelées *vecteurs*. La vitesse, l'accélération, la force, l'intensité du champ magnétique ou électrique, etc., en sont des exemples. Il est d'usage de représenter les vecteurs par

des segments de droite orientés ou par des flèches et de les dénoter par des lettres de caractères demi-gras (**A**, **B**, **C**, ...) ou en plaçant le signe → au-dessus des lettres ($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, ...).

On complète parfois la définition de grandeur vectorielle en précisant que parmi les grandeurs orientées seules sont considérées comme des vecteurs celles qui peuvent être sommées *géométriquement* selon la *règle du parallélogramme*. Mais cette proposition reste vague tant que l'on n'a pas indiqué ce qu'on doit entendre par sommation des grandeurs physiques considérées. La signification de la sommation des grandeurs physiques n'est pas encore déterminée par leur nature physique ; avant d'établir les règles de sommation de ces quantités il importe de préciser d'abord ce que l'on entend par addition de deux grandeurs physiques et ce n'est qu'après que nous pourrons saisir la signification de la proposition complétant la définition de vecteur. Il arrive que pour trancher la question de savoir si telle grandeur physique est ou n'est pas un vecteur, on attribue à leur sommation une signification erronée.

2. En mécanique on attribue à la sommation des vitesses la signification suivante. Considérons un point qui se déplace à une vitesse $\mathbf{v}_1$ par rapport à un référentiel S_1 (par exemple, un passager marchant sur le pont d'un navire). Supposons que le référentiel S_1 se déplace à une vitesse $\mathbf{v}_2$ par rapport à un autre référentiel S_2 que l'on admet être fixe par convention (le navire est en mouvement par rapport aux côtes). Par sommation (composition) des mouvements on entend une opération qui permet de trouver, en partant des données initiales, la vitesse $\mathbf{v}$ du point matériel (le passager) par rapport au référentiel fixe S_2 (les côtes). En cinématique relativiste, on doit encore préciser que les vitesses v_1 et v_2 sont mesurées à l'aide de règles graduées et d'horloges placées dans le référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement. En cinématique non relativiste cette précision est inutile puisqu'elle postule que les longueurs et les intervalles de temps sont absolus, donc indépendants du référentiel choisi. Or voici qu'il s'avère que la composition des mouvements, prise dans le sens que nous venons d'indiquer en cinématique non relativiste, s'effectue par application de la règle du parallélogramme et qu'en mécanique relativiste cette règle n'est pas valable. Néanmoins dans les deux cinématiques, la vitesse du point est un vecteur. Cet exemple montre que la règle de composition des vitesses servant à l'étude du mouvement composé n'est d'aucune façon liée à la question de savoir si la vitesse est ou n'est pas un vecteur *).

---

*) Si toutes les vitesses étaient mesurées par rapport au même référentiel « fixe » S_2, la règle du parallélogramme aurait été également valable en cinématique relativiste. Mais la signification de la vitesse v_1 aurait été tout autre. On aurait dû entendre par v_1 la vitesse du point par rapport au référentiel mobile S_1, mais *mesurée dans le référentiel « fixe »* S_2. Dans l'exemple ci-dessus v_1 est

En cinématique non relativiste on peut trouver des quantités vectorielles dont la composition selon la règle du parallélogramme ne sera pas toujours possible si on attache à leur sommation le même sens que celui donné à la composition des vitesses dans l'exemple que nous venons de donner. L'accélération en est un exemple. Soit un point qui se déplace par rapport au référentiel S_1 avec une accélération $\boldsymbol{a}_1$, le référentiel S_1 ayant une accélération $\boldsymbol{a}_2$ par rapport à un référentiel « fixe » S_2. A l'aide de ces données on ne peut déterminer l'accélération $\boldsymbol{a}$ du point mobile par rapport au référentiel S_2 que si les mouvements que l'on cherche à composer sont des mouvements de translation. Dans ce dernier cas l'accélération $\boldsymbol{a}$ est trouvée par la règle du parallélogramme. Dans tous les autres cas la connaissance des accélérations $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ ne saurait suffire au calcul de $\boldsymbol{a}$, cette accélération résultante devant être calculée par une règle plus compliquée que nous donnerons au § 64.

3. Ces différents exemples montrent que la notion de vecteur doit être précisée, et ce, d'autant plus que l'on doit encore tenir compte d'autres considérations. Quel sens attribuer à telle ou telle grandeur physique n'est pas toujours évident. Dans le cas d'un segment géométrique AB la question de son sens ne se pose même pas. C'est soit le sens $A \to B$, soit le sens opposé $B \to A$. De même il ne peut y avoir aucun doute au sujet du sens du déplacement, de la vitesse ou de l'accélération d'un point mobile, ainsi que du sens de la force qui lui est appliquée. D'autre part, le sens d'une vitesse angulaire ou d'une surface géométrique, surtout si elle est courbe, n'est nullement évident à priori. Il importe donc de donner une définition précise du vecteur afin de pouvoir généraliser cette notion au cas de l'*espace multidimensionnel.* Considérons donc le vecteur le plus simple qui soit — un segment de droite dûment orienté. Nous représenterons ce segment de droite orienté par une flèche $\boldsymbol{a}$. Prenons un système arbitraire de coordonnées rectangulaires ou obliques et projetons notre segment de droite $\boldsymbol{a}$ sur les axes X, Y, Z. Nous effectuerons cette projection à l'aide de plans parallèles aux plans de coordonnées ; par exemple, pour trouver la projection sur l'axe X on fera passer par les extrémités du segment $\boldsymbol{a}$ des plans parallèles au plan YZ. L'intersection de ces plans avec l'axe X définira un segment de droite a_x qui est la projection du segment orienté $\boldsymbol{a}$ sur l'axe X. On trouvera de la même manière les deux autres projections a_y et a_z. En général on utilise des coordonnées rectangulaires et dans ce cas a_x, a_y et a_z seront les *projections orthogonales* du segment $\boldsymbol{a}$. Si on connaît les projections a_x, a_y et a_z dans un système de coordonnées S,

---

défini comme la vitesse du point par rapport au référentiel mobile S_1 *mesurée dans ce même référentiel.* C'est donc une quantité essentiellement différente. Ce n'est que dans le cas limite de mouvements infiniment lents que les deux vitesses se trouvent confondues. Ces questions seront examinées en détail lorsque nous exposerons la théorie de la relativité.

on peut les déterminer dans tout autre système de coordonnées S' dont les axes forment un angle arbitraire avec ceux du système S. Il suffit pour cela de rétablir dans le système S le segment $\boldsymbol{a}$ en construisant avec a_x, a_y et a_z un parallélépipède dont la diagonale est le segment $\boldsymbol{a}$. Ensuite on projettera ce segment $\boldsymbol{a}$ sur les axes X', Y', Z' du nouveau système S'. On obtient de nouveau trois nombres $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$ qui sont les projections du segment $\boldsymbol{a}$ dans le nouveau système de coordonnées S'. Nous pouvons donner maintenant la définition suivante du vecteur.

On appelle *vecteur* $\boldsymbol{a}$ un ensemble ordonné de trois nombres a_x, a_y, a_z donnés dans chaque système de coordonnées (dire que les nombres a_x, a_y et a_z sont ordonnés, c'est dire que le premier nombre a_x correspond à l'axe X, le deuxième a_y correspond à l'axe Y et le troisième a_z correspond à l'axe Z). Ces nombres sont les *projections du vecteur* $\boldsymbol{a}$ sur les axes de coordonnées correspondants. On les appelle aussi *composantes du vecteur. Lors d'un changement d'origine ou d'une rotation des axes de coordonnées, les composantes* a_x, a_y *et* a_z *se transforment selon la règle de transformation des projections des segments géométriques.*

Bref, on entend par *vecteur* un ensemble ordonné de trois nombres rapporté à un système de coordonnées qui, par suite d'un changement d'origine ou par suite d'une rotation des axes de coordonnées, se transforment comme la différence des coordonnées des points extrêmes d'un segment géométrique.

En portant ces nombres sur les axes de coordonnées X, Y Z, nous y découpons trois segments de droite. Si nous construisons avec ces trois segments un parallélépipède, la diagonale de celui-ci, assimilée à un segment orienté, sera une image du vecteur. Ce segment sera toujours le même, quel que soit le système de coordonnées utilisé pour le construire. C'est une manifestation de l'*invariance* des vecteurs, terme servant à indiquer que tout vecteur est indépendant du système de coordonnées utilisé pour le représenter. Dans différents systèmes de coordonnées, les composantes a_x, a_y, a_z d'un vecteur sont différentes, mais le vecteur $\boldsymbol{a}$ reste toujours le même. Une égalité vectorielle telle que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ rapportée à un système de coordonnées équivaut à trois égalités $a_i = b_i$ $(i = x, y, z)$. Lorsqu'on passe à un autre système de coordonnées (dénotées par des primes), les deux membres de ces égalités subissent les mêmes transformations, de sorte que dans le nouveau système ils conservent leur forme, soit: $a_{i'} = b_{i'}$ $(i' = x', y', z')$. Lorsque, après changement de coordonnées, les deux membres d'une équation se transforment de la même manière et présentent donc la même forme dans les deux systèmes, on dit que cette équation est invariante par rapport au changement de coordonnées considéré. Il s'ensuit que *l'équation vectorielle* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ *est invariante par rapport à un changement d'origine et à une rotation des axes de coordonnées. Etant invariantes, les équations qui exprimen*

les lois physiques sous forme vectorielle sont indépendantes du choix des axes de coordonnées. La mise en œuvre des vecteurs permet de formuler les lois physiques sous une forme simple, qui ne se conserve pas si ces lois sont exprimées en termes de projections de vecteurs sur les axes d'un système quelconque.

Il y a lieu de remarquer que la rotation n'implique pas nécessairement une rotation simultanée de tous les axes, comme celle d'un corps solide. Notre définition admet les cas où les axes X, Y, Z tournent indépendamment les uns des autres. A l'aide de telles rotations on assure le passage de n'importe quel système rectangulaire à un autre système rectangulaire direct ou inverse, dont les axes sont orientés de façon arbitraire. Avec de telles rotations on peut aussi effectuer une inversion des axes, c'est-à-dire inverser les sens positifs de tous les axes.

Dans le cas où les deux systèmes sont rectangulaires, les formules de transformation des projections d'un vecteur sont de la forme

$$\begin{aligned} a_{x'} &= \alpha_{x'x}a_x + \alpha_{x'y}a_y + \alpha_{x'z}a_z, \\ a_{y'} &= \alpha_{y'x}a_x + \alpha_{y'y}a_y + \alpha_{y'z}a_z, \\ a_{z'} &= \alpha_{z'x}a_x + \alpha_{z'y}a_y + \alpha_{z'z}a_z, \end{aligned} \tag{7.1}$$

où $\alpha_{x'x}$, $\alpha_{x'y}$, ... sont les cosinus des angles entre les axes correspondants des deux systèmes de coordonnées. Par exemple, l'angle $\alpha_{y'z}$ est le cosinus de l'angle formé par les directions positives des axes Y' et Z.

4. On appelle de même *scalaire* ou *invariant* tout nombre donné dans n'importe quel système de coordonnées, qui reste inchangé lorsqu'on déplace l'origine des coordonnées ou lors d'une rotation des axes de coordonnées. Ainsi cette définition, tout comme celle du vecteur, ne se réfère qu'à une translation de l'origine et à une rotation des axes de coordonnées, et sous-entend que les deux systèmes sont fixes l'un par rapport à l'autre. Comme exemples de quantités scalaires, citons le temps, la masse, la charge électrique, etc. L'abscisse x d'un point immobile n'est cependant pas un scalaire, puisque sa valeur numérique est différente suivant le système de coordonnées choisi. Un scalaire peut être formé à partir de vecteurs. Par exemple, la *longueur du vecteur* et son *carré*, qui dans un système rectangulaire est donné par l'expression $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, sont des scalaires. *Le produit scalaire de deux vecteurs* $\boldsymbol{a}$ *et* $\boldsymbol{b}$, *soit* $(\boldsymbol{ab}) = ab \cos \vartheta$, *où* ϑ *est l'angle entre les vecteurs, est un scalaire.* Dans un système rectangulaire le produit scalaire est donné par l'expression bien connue: $(\boldsymbol{ab}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ (voir problèmes 1 et 3 à la fin de ce paragraphe).

5. De ce qui précède, il apparaît clairement que pour établir le caractère vectoriel d'une grandeur physique orientée il suffit de s'interroger sur le mode de détermination de ses composantes le long

des axes de coordonnées et sur leurs transformations lors du passage d'un système de coordonnées à un autre dont les axes ne coïncident pas avec ceux du premier système sans rotation. On suppose implicitement que les deux systèmes sont fixes l'un par rapport à l'autre.

Si on prend, par exemple, deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de composantes a_x, a_y, a_z et b_x, b_y, b_z, on peut leur faire correspondre dans tout système de coordonnées une triade ordonnée de nombres tels que $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$. Il est facile de se rendre compte que ces trois nombres définissent un vecteur, puisqu'ils se plient aux mêmes règles de transformation que les composantes des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. On dit que le vecteur $\boldsymbol{c}$ (c_x, c_y, c_z) est *somme des vecteurs* $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. On démontre aisément que le vecteur $\boldsymbol{c}$ peut être obtenu à partir des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ par une construction géométrique (règle du parallélogramme). On définit de manière analogue l'opération de *soustraction de deux vecteurs*. La *différence de deux vecteurs* $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ est un vecteur $\boldsymbol{d}$, défini par trois nombres ordonnés: $d_x = a_x - b_x$, $d_y = a_y - b_y$, $d_z = a_z - b_z$. Pour construire ce nouveau vecteur, on doit d'abord inverser le sens du vecteur $\boldsymbol{b}$, puis bâtir le parallélogramme sur les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $-\boldsymbol{b}$.

En procédant comme nous venons de le faire, nous avons introduit la somme et la différence des vecteurs à l'aide d'une *définition mathématique*. De cette manière, nous pouvons introduire d'autres opérations pouvant être effectuées sur les vecteurs, par exemple, le produit d'un scalaire par un vecteur, le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs. Nous dirons que ce sont des opérations *mathématiques*, puisque leurs propriétés découlent de théorèmes mathématiques. Il est parfaitement inutile de soumettre à une vérification expérimentale les résultats obtenus à l'aide de ces opérations mathématiques. D'une opération d'addition de vecteurs, conforme à la définition donnée, on dira que c'est une *addition mathématique*. Mais lorsque les vecteurs représentent une grandeur physique, leur addition ou leur soustraction a encore une autre signification. En effet, pour trouver la somme ou la différence de vecteurs, on doit les soumettre à certaines *opérations physiques*, même si ce ne sont que des opérations imaginaires. Nous conviendrons de dire que dans ce cas il s'agit d'une addition ou d'une soustraction *physique*. On ne peut préjuger si une addition physique concrète coïncidera avec le résultat d'une addition mathématique (règle du parallélogramme) et si le résultat de l'addition donnera un nouveau vecteur; ces questions exigent une étude plus poussée, notamment expérimentale.

6. Analysons, par exemple, les questions suivantes. Soit un point qui s'est déplacé d'abord de A en B le long d'un segment de droite $\overrightarrow{AB}$ (fig. 14), ensuite de B en C suivant le segment de droite $\overrightarrow{BC}$. Si on se demande le long de quel segment de droite ce point doit se déplacer pour passer de A en C, il est clair que la réponse est: sui-

vant le segment de droite $\vec{AC}$; on peut considérer que $\vec{AC}$ est la somme géométrique de $\vec{AB}$ et de $\vec{BC}$. La composition des déplacements s'effectue ici selon la règle du parallélogramme et coïncide donc avec la composition mathématique des vecteurs. Cette même règle s'applique à la composition des vitesses, prise dans le sens suivant. Un point mobile se déplace en une seconde de A en B à une vitesse constante v_1. Au cours de la seconde suivante, il se déplace de B en C à une vitesse constante v_2. A quelle vitesse constante v doit se déplacer le point pour passer en une seconde de A en C? Or ce n'est pas ainsi qu'on entend généralement la composition des vitesses. L'exemple suivant nous le montrera clairement. Sur le pont d'un navire un point mobile passe de A en B suivant un segment de droite, à une vitesse constante v_1. Dans le même intervalle de temps le navire se sera déplacé par rapport à la côte d'un segment de droite BC avec une vitesse constante v_2. Quelle est la vitesse v du point mobile par rapport à la côte? Dans ce deuxième exemple la composition des mouvements et des vitesses prend un tout *autre sens*, puisque les deux mouvements sont considérés dans des référentiels *différents* en mouvement l'un par rapport à l'autre. L'un des référentiels est le navire et la vitesse v_1 du point mobile y est mesurée à l'aide de règles graduées et d'horloges. L'autre référentiel est la côte et c'est dans ce système que l'on mesure, à l'aide de règles graduées et d'horloges, les vitesses v_2 et v. Considérée sous cet aspect, la question du résultat de la composition des vitesses ne peut être tranchée définitivement que par voie expérimentale. La cinématique prérelativiste affirmait que le résultat de la composition doit être le même dans les deux cas. Cette assertion résultait de ce qu'en physique prérelativiste les longueurs des segments et les intervalles de temps ne dépendent pas du référentiel dans lequel ils étaient mesurés. On effectuait donc la composition des vitesses du deuxième exemple par la même règle du parallélogramme et le résultat coïncidait avec la composition mathématique des vecteurs. Il en va tout autrement en cinématique relativiste. *Prise dans son second sens, la composition des vitesses n'obéit plus à la règle du parallélogramme.* Cette règle n'est approximativement vraie qu'à la limite où les deux vitesses à composer sont très petites par rapport à la vitesse de la lumière.

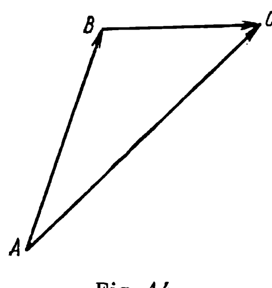


Fig. 14

7. A tout vecteur $\boldsymbol{a}$ (a_x, a_y, a_z) et à tout scalaire λ on peut faire correspondre à priori un objet $\lambda\boldsymbol{a}$ défini par trois nombres ordonnés λa_x, λa_y, λa_z. Il est facile de s'assurer que cet objet est un vecteur que l'on appelle *produit du scalaire λ par le vecteur $\boldsymbol{a}$*. Un accrois-

sement infiniment petit du vecteur $\boldsymbol{da}$ est lui-même un vecteur. Un accroissement infiniment petit d'un scalaire t est un scalaire dt. A ces deux quantités on peut faire correspondre le vecteur $\frac{1}{dt}\boldsymbol{da} = \frac{\boldsymbol{da}}{dt}$, appelé *dérivée du vecteur* $\boldsymbol{a}$ *par rapport au scalaire* t.

8. Après ces considérations préalables nous sommes en mesure de démontrer le caractère vectoriel de nombreuses grandeurs physiques, importantes pour la mécanique. En premier lieu, *le déplacement d'un point d'une position A en une position B suivant le segment de droite AB est un vecteur.* Cette proposition est évidente puisque par définition, dans toute translation de l'origine et dans toute rotation des axes de coordonnées, les composantes des vecteurs doivent être transformées exactement comme les projections d'un segment de droite orienté. Désignons par $\boldsymbol{r}$ le segment de droite et dérivons-le par rapport au temps t en supposant que l'origine du segment est fixe. *La dérivée* $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ *sera un vecteur* puisque le temps est un scalaire. Mais une telle dérivée représente la vitesse $\boldsymbol{v}$ d'un point mobile. On en conclut que la *vitesse* $\boldsymbol{v}$ est également un *vecteur.* En dérivant de nouveau $\boldsymbol{v}$ par rapport à t on obtient un *autre vecteur* — l'*accélération du point mobile* $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. *La masse m du point matériel est un scalaire*; si on le multiplie par la vitesse $\boldsymbol{v}$, on obtient le *vecteur* $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, appelé *impulsion du point.* En prenant sa différentielle par rapport au temps, on aboutit à la *force* $\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$ appliquée au point. Il s'ensuit que *la force est un vecteur.*

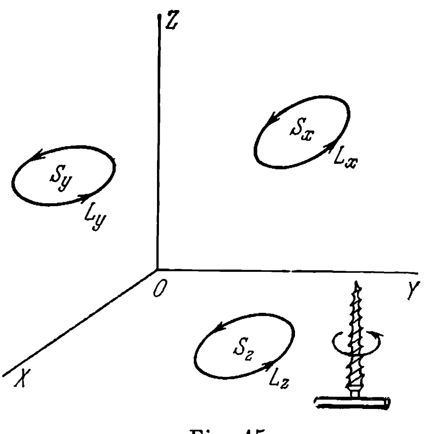


Fig. 15

9. Considérons maintenant des exemples de vecteurs plus compliqués. Traçons dans l'espace un *contour orienté L*, donc une courbe fermée non croisée pouvant être parcourue dans un sens déterminé. Projetons ce contour sur les plans de coordonnées d'un système de coordonnées rectangulaires XYZ. Nous obtenons ainsi trois contours fermés, plans et orientés L_x, L_y et L_z, se trouvant respectivement dans les plans YZ, ZX et XY (sur la figure 15 le contour L n'est pas représenté, seules ses projections le sont). Désignons par S_x, S_y et S_z les aires limitées par les contours fermés L_x, L_y, L_z. Nous affecterons à ces aires le signe positif ou négatif suivant que la circulation sur le contour est positive ou négative. Le sens posi-

tif de la circulation sur les contours L_x, L_y, L_z dépend de l'orientation du système de coordonnées; nous distinguerons les systèmes rectangulaires direct et inverse. Un trièdre trirectangle direct est tel qu'un tire-bouchon ordinaire progresse dans le sens des Z positifs (on le fait donc tourner de gauche à droite). Le système inverse se définit de la même façon à condition d'utiliser un tire-bouchon inversé (à filetage à gauche). Dans le système direct les sens de circulation sur les contours L_x, L_y et L_z seront considérés comme positifs

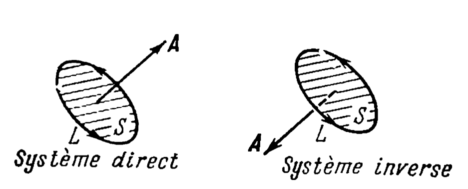


Fig. 16

s'ils coïncident avec le sens dans lequel il faut faire tourner un tire-bouchon ordinaire. De même dans un système inverse, le sens positif de circulation correspond au sens dans lequel il faut faire tourner un tire-bouchon inversé pour qu'il progresse dans le sens des Z positifs. Avec cette convention sur les signes, les aires S_x, S_y et S_z sont données par les intégrales

$$S_x = \int_{L_x} y\,dz, \quad S_y = \int_{L_y} z\,dx, \quad S_z = \int_{L_z} x\,dy \tag{7.2}$$

prises le long des contours L_x, L_y, L_z dans les systèmes de coordonnées direct et inverse.

Nous affirmons que les trois nombres S_x, S_y et S_z définissent un vecteur, bien qu'une condition dont il sera question ci-dessous doit encore être satisfaite. Pour le démontrer prenons le cas particulier d'un contour L plan. Portons le long de la normale au plan du contour un segment orienté A dont la longueur est numériquement égale à l'aire S limitée par le contour L et dont le sens correspond à la règle du tire-bouchon que nous venons d'indiquer (fig. 16). Nous utiliserons d'abord un système de coordonnées d un type donné, direct ou inverse. Le segment A, que nous venons de définir et qui est absolument indépendant du choix des axes de coordonnées, est un vecteur. Ses projections sur les axes de coordonnées sont : $A_x = A \cos(A, X)$, $A_y = A \cos(A, Y)$, $A_z = A \cos(A, Z)$. D'autre part, selon un théorème géométrique connu, on a

$$S_x = S \cos(A, X), \quad S_y = S \cos(A, Y), \quad S_z = S \cos(A, Z).$$

Comme nous avons choisi pour le segment A une longueur numériquement égale à S, on doit avoir dans tout système de coordonnées :

$S_x = A_x$, $S_y = A_y$, $S_z = A_z$. Il en résulte qu'à la suite d'une rotation des axes de coordonnées S_x, S_y, S_z se transforment comme les composantes du vecteur A. On en conclut que S_x, S_y, S_z définissent un vecteur que nous désignerons par $\boldsymbol{S}$ et que nous appellerons *vecteur de la surface* limitée par le contour orienté L. Avec cette définition on peut dire que la surface est un vecteur, ce qui vient d'être démontré pour le cas de contours plans et de surfaces planes.

La généralisation de ce résultat à des contours et à des surfaces non plans ne présente pas de difficultés. Soit L un contour non plan

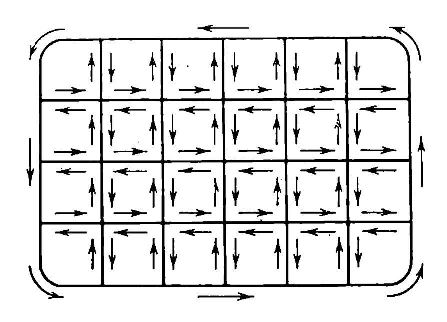


Fig. 17

quelconque. Prenons une surface arbitraire limitée par ce contour et subdivisons-la en un grand nombre n d'éléments de surface orientés de la manière indiquée sur la figure 17. En projetant ces éléments de surface sur les plans de coordonnées, on obtient

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{ix}, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{iy}, \quad S_z = \sum_{i=1}^{n} S_{iz},$$

S_{ix}, S_{iy} et S_{iz} étant les projections du i-ème élément de surface sur les mêmes plans. On peut rendre n aussi grand que l'on veut et considérer que chaque élément de surface S_i est plan. En se fondant sur les résultats obtenus ci-dessus on peut affirmer que S_{ix}, S_{iy} et S_{iz} définissent un vecteur. De même les trois nombres S_x, S_y et S_z définissent également un vecteur puisque ces nombres résultent de l'addition des composantes des vecteurs $\boldsymbol{S}_i$.

10. Les trois nombres S_x, S_y, S_z se distinguent cependant d'un vecteur sous le rapport suivant. Lors d'une *rotation* d'ensemble *du système de coordonnées*, ce dernier restant constamment direct ou inverse, c'est-à-dire tel qu'il était initialement, les trois nombres ordonnées S_x, S_y et S_z se transforment de la même façon que les composantes d'un vecteur. Mais si on modifie le système de coordonnées, par inversion des axes par exemple, pour déterminer le sens de $\boldsymbol{S}$ on doit passer d'un tire-bouchon ordinaire à un tire-bouchon inver-

sé. Si dans un trièdre de référence direct on représente la quantité S par un segment de droite orienté, après passage dans un trièdre de référence inverse on devra inverser le sens d'orientation du segment de droite. Les quantités qui se comportent de cette manière sont appelées *pseudo-vecteurs* ou *vecteurs axiaux* pour les distinguer des *vecteurs polaires* auxquels nous avons eu affaire jusqu'ici. *Lors d'une rotation d'ensemble du système de coordonnées les vecteurs axiaux se comportent exactement comme les vecteurs polaires. Lors d'une inversion des axes de coordonnées les composantes des vecteurs polaires changent de signe, tandis que les composantes des vecteurs axiaux conservent leur signe.*

On aurait pu se passer de l'introduction des vecteurs axiaux, mais alors dans les systèmes de coordonnées direct et inverse certaines formules auraient eu des formes différentes. Si, par exemple, dans un système direct on avait défini trois nombres S_x, S_y, S_z à l'aide des formules (7.2), puis à l'aide des mêmes formules où on aurait inversé les signes, on avait défini cette même triade, on aurait défini ainsi un vecteur polaire. L'introduction des vecteurs axiaux permet justement de conserver la même forme des formules dans les systèmes de référence direct et inverse.

De même on introduit à côté des *scalaires vrais* des quantités appelées *pseudo-scalaires*. Un *scalaire* ou *invariant* est un nombre qui reste inchangé, que le système de coordonnées soit direct ou inverse. *Un pseudo-scalaire ou pseudo-invariant ne reste inchangé que si l'on passe d'un système direct (inverse) à un autre système direct (inverse); mais si on passe d'un système direct à un système inverse, ou inversement, un pseudo-scalaire change de signe, restant inchangé en valeur absolue. Le produit d'un pseudo-scalaire par un vecteur polaire est un vecteur axial. Le produit d'un pseudo-scalaire par un vecteur axial est un vecteur polaire.* Dans le cas où on n'utiliserait qu'un seul système de coordonnées, qu'il soit direct ou inverse (en Physique on utilise presque exclusivement le système direct) il serait superflu de subdiviser les vecteurs en vecteurs axiaux et polaires et les scalaires en scalaires vrais et pseudo-scalaires.

L'addition de deux vecteurs n'a de sens que dans le cas où ils sont tous deux ou axiaux ou polaires. La somme $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ où un vecteur est axial et l'autre polaire n'a aucun sens, car une telle somme ne se laisse transformer ni selon la règle des vecteurs polaires, ni selon la règle des vecteurs axiaux et ne représente aucune classe de vecteurs.

11. Le *produit vectoriel* de deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ est un cas particulier de vecteurs représentant une surface ou une aire. On le définit comme le vecteur de l'aire du parallélogramme construit avec les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. Pour fixer l'orientation de ce parallélogramme on doit parcourir son périmètre en allant de l'origine du vecteur $\boldsymbol{a}$ vers son extrémité, puis de cette extrémité parallèlement au vecteur $\boldsymbol{b}$, etc., jusqu'à ce qu'on revienne à l'origine du vecteur $\boldsymbol{a}$ (fig. 18).

Cela implique que l'on parcourt le vecteur $\boldsymbol{a}$ dans le sens direct et le vecteur $\boldsymbol{b}$ dans le sens inverse. Conformément aux considérations développées plus haut, tout produit vectoriel se laisse représenter par un segment orienté porté par la normale au plan du parallélogramme et dont le sens de circulation correspond à un système direct ou inverse. La longueur de ce segment orienté est numériquement égale à l'aire du parallélogramme, soit $ab \sin \vartheta$, ϑ étant l'angle entre

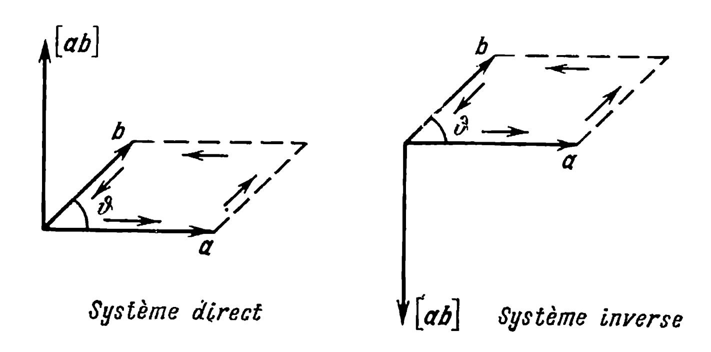


Fig. 18

les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. Nous désignerons le produit vectoriel par le symbole $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}]$, c'est-à-dire que les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ doivent être placés entre crochets. On utilise aussi le symbole $\times$: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. *Si les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont polaires, leur produit vectoriel sera un vecteur axial. Le produit vectoriel d'un vecteur polaire par un vecteur axial est un vecteur polaire. Le produit vectoriel de deux vecteurs axiaux est un vecteur axial.*

PROBLÈMES

1. Démontrer que si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont deux vecteurs polaires ou axiaux, l'expression $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ est un invariant dans un système de coordonnées rectangulaires. (Cette expression porte le nom de *produit scalaire* des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$; on le dénote par le symbole $(\boldsymbol{ab})$ ou $\boldsymbol{ab}$.)

R e m a r q u e. On utilisera pour faire la démonstration les invariants $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, $b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$ et $(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$.

2. Démontrer que le produit scalaire d'un vecteur polaire par un vecteur axial est un pseudo-scalaire (pseudo-invariant).

3. Démontrer que le produit scalaire de deux vecteurs quelconques $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ a pour expression $(ab) = ab \cos \vartheta$, où ϑ est l'angle entre ces deux vecteurs.

D é m o n s t r a t i o n. Dirigeons l'axe X le long du vecteur $\boldsymbol{a}$. On a alors $a_y = a_z = 0$, $b_x = b \cos \vartheta$. Comme le produit scalaire $(\boldsymbol{ab}) \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ est un invariant, on a $(ab) = a_x b_x = ab \cos \vartheta$.

4. Le produit scalaire d'un vecteur $\boldsymbol{a}$ par le produit vectoriel $[\boldsymbol{bc}]$ de deux autres vecteurs est appelé produit mixte des trois vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$. On le note $(\boldsymbol{a}\ [\boldsymbol{bc}])$. Montrer que ce produit mixte sera un pseudo-scalaire si les trois vecteurs ou l'un d'eux sont polaires. Lorsqu'aucun vecteur n'est polaire ou lorsque les deux le sont, le produit mixte doit être une quantité scalaire (inva-

riante). Démontrer que le produit mixte est numériquement égal au volume du parallélépipède construit avec les vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$. Partant de ce dernier résultat, démontrer que

$$(a\,[bc]) = (b\,[ca]) = (c\,[ab]) = -(a\,[cb]) = -(b\,[ac]) = -(c\,[ba]), \qquad (7.3)$$

c'est-à-dire qu'*un produit mixte ne change pas dans le cas d'une permutation cyclique des termes*, mais change de signe si la permutation n'est pas cyclique.

5. Vérifier la formule

$$[a\,[bc]] = (ac)\,b - (ab)\,c. \qquad (7.4)$$

Démonstration. Présentons le vecteur $\boldsymbol{a}$ sous la forme $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\parallel} + \boldsymbol{a}_{\perp}$, où $\boldsymbol{a}_{\parallel}$ est la composante du vecteur $\boldsymbol{a}$ suivant le vecteur $\boldsymbol{d} \equiv [bc]$ et $\boldsymbol{a}_{\perp}$ est la composante perpendiculaire à $\boldsymbol{d}$. On écrira alors

$$[a\,[bc]] \equiv [ad] = [a_{\perp}d].$$

Les trois vecteurs $\boldsymbol{a}_{\perp}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont contenus dans un même plan que nous confonderons avec le plan de la figure 19. Le vecteur $\boldsymbol{d}$ est perpendiculaire à ce plan et sa longueur est égale à $bc \sin \alpha$, α étant l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$.

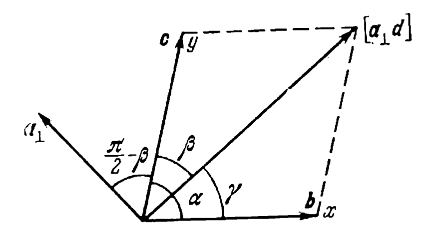


Fig. 19

Il s'ensuit que la longueur du vecteur $[a_{\perp}d]$ est égale à $a_{\perp}bc \sin \alpha$. Comme ce vecteur est contenu dans le plan de la figure, on peut le décomposer suivant les vecteurs $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ et le mettre sous la forme

$$[a_{\perp}d] = xb + yc.$$

On détermine x et y par le théorème des sinus:

$$\frac{xb}{a_{\perp}bc \sin \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \qquad \frac{yc}{a_{\perp}bc \sin \alpha} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

De là

$$x = a_{\perp}c \sin \beta = a_{\perp}c \cos (a_{\perp}, c) = (a_{\perp}c) = (ac),$$

$$y = a_{\perp}b \sin \gamma = -a_{\perp}b \cos (a_{\perp}, b) = -(a_{\perp}b) = -(ab).$$

6. Vérifier la formule

$$([ab]\,[cd]) = (ac)\,(bd) - (ad)\,(bc).$$

7. Montrer que tout produit vectoriel $[ab]$ peut être exprimé sous forme d'un déterminant symbolique

$$[ab] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \qquad (7.5)$$

à condition de le décomposer suivant les éléments de la première ligne qui sont les vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$ portés par les axes d'un système rectangulaire. L'expression (7.5) est valable dans les systèmes direct et inverse ; dans les deux systèmes de coordonnées rectangulaires les composantes du produit vectoriel sont données par les mêmes formules. C'est justement ce qui détermine le caractère axial du produit vectoriel.

8. Démontrer que dans un système de coordonnées rectangulaires on a

$$(A\,[BC]) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{7.6}$$

9. Soient e_1, e_2, e_3 trois vecteurs non coplanaires arbitrairement choisis. Les vecteurs

$$e_1^* = \frac{[e_2e_3]}{(e_1\,[e_2e_3])}, \quad e_2^* = \frac{[e_3e_1]}{(e_1\,[e_2e_3])}, \quad e_3^* = \frac{[e_1e_2]}{(e_1\,[e_2e_3])} \tag{7.7}$$

sont dits *vecteurs réciproques* des vecteurs e_1, e_2, e_3. Il est évident que ces vecteurs ne sont pas coplanaires. Démontrer que

$$e_1 = \frac{[e_2^*e_3^*]}{(e_1^*\,[e_2^*e_3^*])}, \quad e_2 = \frac{[e_3^*e_1^*]}{(e_1^*\,[e_2^*e_3^*])}, \quad e_3 = \frac{[e_1^*e_2^*]}{(e_1^*\,[e_2^*e_3^*])}. \tag{7.8}$$

Démontrer aussi que

$$(e_ie_k^*) = \delta_{ik}, \tag{7.9}$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker, c'est-à-dire que $\delta_{ik} = 1$ si $i = k$ et $\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$.

Soient A et B deux vecteurs quelconques qui se laissent représenter sous la forme

$$A = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3, \qquad B = B_1^*e_1^* + B_2^*e_2^* + B_3^*e_3^*.$$

Démontrer que

$$(AB) = A_1B_1^* + A_2B_2^* + A_3B_3^*. \tag{7.10}$$

§ 8. Degrés de liberté et coordonnées généralisées

1. La position d'un point dans l'espace peut être repérée par indication de trois coordonnées rectangulaires x, y, z. Mais on peut aussi utiliser à la place des coordonnées rectangulaires des coordonnées *polaires* ou tout autre système de coordonnées. Quel que soit le système choisi, ce qui importe c'est que le nombre de coordonnées indépendantes requises pour une détermination univoque de la position du point se mouvant dans l'espace de façon arbitraire soit égal à *trois*. D'un point ainsi défini on dira qu'il possède *trois degrés de liberté*.

Dans certaines conditions le mouvement du point ne peut être arbitraire. Considérons, par exemple, une bille attachée à une extrémité d'un fil inextensible, l'autre extrémité étant fixe (pendule mathématique). Lorsque le fil est tendu, la bille ne peut se déplacer que sur la surface d'une sphère ayant pour centre le point de fixation du fil. Il existe un grand nombre d'autres exemples où le point matériel est assujetti à rester sur une surface donnée. Dans tous ces

cas on dit que le mouvement est *lié*. Les coordonnées x, y, z d'un tel point doivent vérifier une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$ qui n'est autre que l'équation de la surface considérée. Il s'ensuit que deux coordonnées seulement sont indépendantes, x et y par exemple. La troisième coordonnée z peut être calculée par résolution de l'équation de liaisons $f(x, y, z) = 0$. On dira dans ces cas que le point possède *deux degrés de liberté*.

Si le point ne peut se déplacer que le long d'une courbe donnée, le nombre de coordonnées indépendantes nécessaires pour caractériser sa position se réduit à un. Pour coordonnée, on peut prendre, par exemple, la distance du point matériel à un point de la courbe et l'évaluer le long de celle-ci. Dans ces cas on dit que le point ne possède qu'*un seul degré de liberté*.

2. Il est facile de généraliser ces considérations à un système mécanique constitué par un nombre arbitraire n de points matériels. Si tous ces points peuvent se déplacer sans aucune restriction, on devra connaître $3n$ coordonnées pour caractériser leurs positions instantanées (3 coordonnées par point). On dit alors que le système possède $3n$ *degrés de liberté*. Dans certains problèmes on impose des restrictions aux mouvements des points matériels. Cela revient à dire qu'on impose aux $3n$ coordonnées des conditions supplémentaires appelées *liaisons*. Pour déterminer univoquement les positions de tous les points matériels du système, il suffit de connaître un plus petit nombre de coordonnées que nous noterons f. Les autres $3n - f$ coordonnées se laissent calculer par les équations de liaison. Il n'est nullement nécessaire de choisir comme coordonnées indépendantes les coordonnées rectangulaires. On peut prendre n'importe quelles f quantités $q_1, q_2, \ldots, q_f$ dont la connaissance détermine univoquement les positions des points matériels du système. Ces quantités portent le nom de *coordonnées généralisées*. Le mouvement du système sera entièrement défini si l'on connaît la variation des coordonnées généralisées en fonction du temps. Les dérivées des coordonnées généralisées par rapport au temps $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ portent le nom de *vitesses généralisées*. Lors du mouvement d'un point matériel sur un cercle, sa position peut être repérée par la valeur de l'angle au centre φ formé par le rayon vecteur du point mobile et la position du rayon vecteur à un instant donné ($t = 0$ par exemple). Dans ce cas la vitesse généralisée $\omega = \dot{\varphi}$ est la vitesse angulaire du point en rotation.

Les coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_f$ peuvent être choisies de façon arbitraire, mais à tout instant elles doivent déterminer complètement la position du système mécanique. Dans tous les cas le nombre f des coordonnées généralisées indépendantes sera le même; c'est le *nombre de degrés de liberté du système*.

3. Déterminons, par exemple, le nombre de degrés de liberté d'un *solide parfait*. En mécanique on entend par solide parfait un système

de points matériels dont les distances mutuelles demeurent invariables dans le temps lorsque le solide est en mouvement. Nous allons démontrer que *tout solide parfait dont le mouvement n'est soumis à aucune restriction possède six degrés de liberté*. En effet pour déterminer univoquement la position d'un solide, il suffit de connaître trois points A, B, C non alignés (fig. 20). Pour démontrer cette proposition, choisissons arbitrairement un quatrième point D du solide. On admet que les distances AD, BD et CD sont connues pour un solide donné puisque les distances séparant les points doivent demeurer invariables quels que soient les mouvements du solide. En outre, pour tout mouvement du solide, le point D doit se trouver toujours du même côté du plan du triangle ABC, sans jamais l'intercepter. Pour déterminer la position du point D dans l'espace, construisons sur les longueurs fixées AC, AD et CD le triangle ADC. Sa base AC est fixée dans l'espace. Faisons tourner le triangle ADC autour de sa base AC jusqu'à ce que son sommet D se trouve à une distance donnée du troisième point B. Cette condition est vérifiée pour deux points: D et D'. Le point D' ne satisfait pas aux conditions du problème, puisqu'il se trouve de l'autre côté du plan ABC. Ainsi, connaissant les positions de trois points A, B, C, on peut trouver la position de tout autre point du solide à l'aide d'une construction géométrique simple.

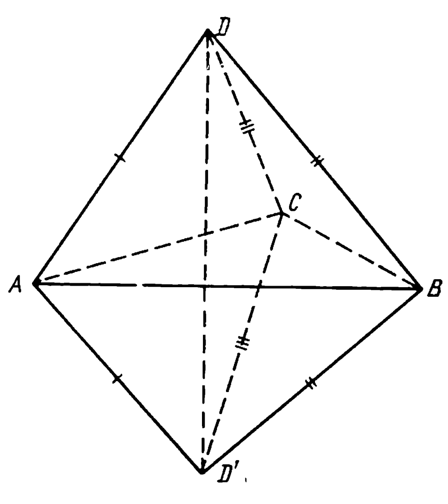


Fig. 20

On peut repérer les positions des trois points A, B et C par leurs coordonnées rectangulaires: x_A, y_A, z_A; x_B, y_B, z_B; x_C, y_C, z_C. Ces neuf coordonnées ne sont pas indépendantes, étant liées entre elles par les relations:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2 = \text{const},$$
$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = BC^2 = \text{const},$$
$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = CA^2 = \text{const}$$

(les longueurs AB, BC et CA sont invariables). Il ne subsiste ainsi que six coordonnées indépendantes et le solide possède donc six degrés de liberté.

Si on impose une restriction à la liberté de mouvement du solide, le nombre de degrés de liberté diminue. Ainsi *un solide dont l'un des points est fixe ne peut que tourner autour de ce point fixe et ne possède alors que trois degrés de liberté. Un solide qui est assujetti à tourner autour d'un axe fixe ne possède qu'un seul degré de liberté. Dans le cas où le solide peut tourner autour d'un axe fixe tout en glissant le long de cet axe, le nombre de degrés de liberté devient égal à deux*, etc.

CHAPITRE II

LES LOIS DE NEWTON

Ce chapitre est consacré à l'exposé des lois fondamentales de la Dynamique, partie de la mécanique classique qui a pour objet l'étude du mouvement d'un corps soumis à l'action de forces. La force agissant sur un corps sert de mesure des interactions de ce corps avec les objets matériels qui l'entourent (autres corps matériels ou champs de force). Nous donnerons plus loin une définition plus précise du concept de force.

Les lois de la dynamique ont été établies par Newton et portent donc son nom. Comme tous les principes fondamentaux de la Physique, les lois de la dynamique sont des *généralisations de faits expérimentaux.* Ces lois doivent être considérées non comme des propositions isolées et indépendantes, mais comme un *système de lois intercorrélées.* La vérification expérimentale ne porte pas sur chacune de ces lois, mais sur tout l'ensemble.

Etant donné le rôle exceptionnel que jouent en mécanique les lois de Newton, nous estimons utile de les exposer telles qu'il les formula. Newton a donné en préambule à ses lois huit définitions dont quatre seulement nous seront utiles.

Définition 1. *La quantité de matière (masse) en est la mesure définie comme une quantité proportionnelle à la densité et au volume de la matière.*

Définition 2. *La quantité de mouvement en est la mesure définie comme une quantité proportionnelle à la vitesse et à la masse.*

Définition 3. *La force innée de la matière est son aptitude inhérente à la résistance grâce à laquelle tout corps isolé, abandonné à lui-même, garde son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme.*

Définition 4. *L'application d'une force est une action à laquelle on soumet un corps pour modifier son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme.*

Loi 1. *Tout corps garde son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, tant qu'il n'est pas astreint à modifier cet état par application de forces.*

Loi 2. *La variation de la quantité de mouvement est proportionnelle à la force motrice appliquée; sa direction est celle de la droite suivant laquelle s'exerce la force appliquée au corps.*

Loi 3. *A toute action correspond toujours une réaction qui lui est égale et opposée ou, ce qui revient au même, les interactions de deux corps sont toujours égales et opposées.*

Chez Newton la notion de masse est exposée d'une manière vague parce qu'il avait omis de donner une définition de la densité. En outre, le concept de masse défini par le produit du volume du corps par la densité de la substance renfermée dans ce volume est valable pour les corps macroscopiques, mais ne peut être appliqué aux particules élémentaires et atomiques. C'est pourquoi la définition de la masse donnée par Newton n'a pas été retenue et fut remplacée par d'autres définitions.

Aristote et ses disciples considéraient la force comme cause du mouvement, mais estimaient que dès que cesse l'action de la force, cesse le mouvement. Autrement dit, la force est nécessaire pour maintenir le mouvement. La découverte de la première loi de Newton signifiait que cette conception était erronée puisqu'aucune « force » n'est nécessaire pour maintenir un mouvement uniforme. La force fut dès lors considérée comme la *cause déterminant une variation de la quantité de mouvement d'un corps* et, comme cette variation est provoquée par d'autres corps, on peut donner à la force la définition suivante. *La force est une mesure de l'intensité d'interaction des corps se manifestant par une variation de leurs quantités de mouvement.*

Dans ce qui suit nous exposerons en détail le contenu des lois de Newton et des notions qui y sont rattachées, sans nous en tenir à la méthode utilisée par Newton.

§ 9. La loi d'inertie. Référentiel d'inertie

1. La *première loi de Newton* n'est autre que la *loi d'inertie* de Galilée. D'après cette loi, *tout corps (ou point matériel) non soumis à des actions extérieures se trouve soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme.* Un tel corps est dit *libre* et son mouvement est dit *mouvement libre* ou *mouvement d'inertie.*

En toute rigueur aucun corps n'est libre, de sorte que la notion de corps libre est une abstraction physique. On peut cependant placer un corps dans des conditions où les actions extérieures pouvant l'influencer sont éliminées ou se compensent mutuellement. Si on suppose que ces actions extérieures décroissent indéfiniment, on peut, à la limite, se faire une idée d'un corps et d'un mouvement libres.

Mais on se heurte alors à une difficulté: comment s'assurer que le corps n'est soumis à aucune action extérieure? La méthode d'investigation doit être indépendante; en juger par l'absence d'accélération reviendrait à dépouiller la loi de son contenu. En fait il n'existe aucune réponse satisfaisante à cette question. S'il n'existe pas de ressorts ou de cordes attachés au corps, ou d'autres corps exerçant

une pression sur le corps considéré, et on pourrait affirmer que ce corps n'est pas soumis à des actions extérieures. Cependant les corps subissent des actions non seulement au contact d'autres corps, mais encore de la part de différents *champs de forces* générés par d'autres corps. La vraie question consiste donc à s'assurer que le corps considéré n'est pas soumis à l'action de champs de forces.

Toutes les forces naturelles actuellement connues se ramènent aux forces d'*attraction gravitationnelle*, aux *forces électromagnétiques* et aux autres forces d'interaction entre les noyaux atomiques et les particules élémentaires (*forces nucléaires, interactions faibles*). Il est aisé de se libérer de ces dernières forces car ce sont des forces à courte distance qui ne se manifestent qu'à des distances inférieures à 10^{-12} cm.

Les forces électromagnétiques et gravitationnelles sont des forces qui résultent d'une action à distance ; elles décroissent lentement avec la distance. Les forces statiques sont inversement proportionnelles au carré de la distance ; les forces variables (ondes électromagnétiques) décroissent encore plus lentement, étant inversement proportionnelles à la distance. L'existence des planètes, des étoiles, des pulsars, des galaxies ne nous est révélée que par les ondes électromagnétiques (lumière, ondes radioélectriques, rayons X) qu'émettent ces corps célestes. Il n'y a donc pas lieu d'affirmer que les objets éloignés ne font pas apparaître de champs électromagnétiques et gravitationnels notables dans la région de l'espace qui nous intéresse. Comme ces champs électromagnétiques agissent différemment sur les charges positives et négatives que comporte tout corps matériel, on peut s'assurer de leur présence ou de leur absence par l'étude expérimentale de la séparation des charges électriques. Un corps d'épreuve portant une charge électrique placé au même point de l'espace où règne un champ électromagnétique se déplacerait différemment suivant que sa charge est positive ou négative. Toutes les données disponibles permettent d'affirmer que les corps éloignés de l'Univers ne créent pas de champs électromagnétiques statiques décelables dans des régions limitées de l'espace (système solaire ou Galaxie).

Quant aux champs gravitationnels, on ne peut avancer une telle proposition avec la même certitude. Mais même si ces champs existaient, on n'aurait pas à en tenir compte, car en effet, le même champ gravitationnel communique exactement la même accélération à tous les corps indépendamment de leur composition. On peut donc admettre que le champ gravitationnel statique créé par des corps éloignés dans l'Univers peut être considéré comme uniforme dans des régions restreintes de l'espace. On peut alors introduire un référentiel qui tomberait en chute libre dans un tel champ gravitationnel uniforme. L'existence de ce champ gravitationnel uniforme n'affecte en rien les phénomènes observés dans un tel référentiel. Tout se passe comme à l'intérieur d'un vaisseau spatial en mouvement libre dans

5—01433

l'espace cosmique; les cosmonautes qui s'y trouvent ne remarquent pas l'existence d'un champ gravitationnel (apesanteur). Quant aux champs gravitationnels périodiques (ondes gravitationnelles), ils sont trop faibles pour que leur action se fasse sentir. Ce n'est que depuis peu que des tentatives ont été faites pour les déceler; cependant par suite de la petitesse des effets qu'ils peuvent produire, on n'a pas encore réussi à les mettre en évidence de façon expérimentale. Ces quelques remarques suffisent pour l'instant puisque la question est étudiée en détail au chapitre IX.

2. En cinématique le choix du référentiel n'était pas essentiel, car tous les référentiels sont *cinématiquement équivalents.* Il en va tout autrement en dynamique. La loi de l'inertie pose avec acuité la question du choix d'un système de référence. Un seul et même mouvement se présente *différemment* dans différents référentiels. Si dans un certain référentiel le mouvement d'un corps est rectiligne et uniforme, dans un référentiel qui se déplace avec accélération par rapport au premier référentiel, le mouvement du corps sera différent. Il s'ensuit que la loi d'inertie ne peut être vérifiée dans tous les systèmes de référence et qu'elle perd toute signification si on n'indique pas les systèmes de référence utilisés. La mécanique classique postule qu'*il existe un système de référence dans lequel tous les corps libres ont un mouvement rectiligne et uniforme.* Ce système porte le nom de *référentiel d'inertie.* Le contenu de la loi d'inertie se ramène en fait à affirmer qu'il existe au moins un référentiel d'inertie.

Cette proposition est une généralisation d'une énorme masse de faits expérimentaux. Ce n'est qu'en procédant aux expériences qu'on peut décider quels systèmes sont inertiels et quels autres ne le sont pas. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du mouvement des étoiles ou d'autres objets astronomiques observables dans notre partie de l'Univers. On peut affirmer alors que le système de référence lié à la Terre, considérée comme immobile (référentiel dit *terrestre*) ne sera pas un système inertiel. En effet, par rapport à ce référentiel, les corps sidéraux effectuent sur la sphère céleste des rotations diurnes. Comme leurs distances à la Terre sont très grandes, ce mouvement doit donner lieu à de très grandes accélérations centripètes, dirigées vers la Terre. Or chacun des corps sidéraux se trouvant à distance énorme de tout autre corps est pratiquement libre. Mais dans le référentiel terrestre ils effectuent un mouvement non pas rectiligne, mais circulaire. Ce mouvement ne se conformant pas à la loi d'inertie, le référentiel terrestre ne peut être un système inertiel. Il faut donc voir si d'autres systèmes ne vérifieraient pas la loi d'inertie. Essayons, par exemple, le *système de référence héliocentrique* appelé aussi *référentiel copernicien.* L'origine du trièdre de référence est placée au centre du Soleil (plus précisément au centre de masse du système solaire); les axes de coordonnées sont des droites joignant ce centre à trois étoiles extrêmement éloignées et ne se trouvant pas dans un

même plan. Les objets matériels servant à matérialiser ces axes sont les rayons lumineux issus des étoiles et arrivant dans le système solaire. Comme les étoiles sont en mouvement relatif les unes par rapport aux autres, les angles entre les axes de coordonnées du référentiel copernicien ne restent pas invariables au cours du temps. Cependant, compte tenu du très grand éloignement des étoiles, les variations de direction des axes sont tellement lentes qu'on peut généralement les négliger. Pratiquement, le référentiel copernicien est un système inertiel, tout au moins en ce qui concerne les mouvements à l'échelle de notre système planétaire, ainsi que de tout autre système dont l'étendue est petite par rapport à sa distance jusqu'à trois étoiles choisies comme repères fixes dans le référentiel copernicien. Cette proposition est confirmée par des expériences en majorité indirectes. On examinera certaines expériences directes (le pendule de Foucault par exemple) au chapitre IX ; les mêmes expériences servent aussi à démontrer que le référentiel terrestre n'est pas un système inertiel.

3. Le référentiel terrestre ne vérifie pas la loi d'inertie car la Terre tourne autour de son propre axe et autour du Soleil et se trouve donc en *mouvement accéléré par rapport au référentiel copernicien*. On remarque que ces deux mouvements de rotation de la Terre sont lents *), ce qui fait que *vis-à-vis d'un très grand nombre de phénomènes, le référentiel terrestre se comporte pratiquement comme un système inertiel.* Les observations et les expériences usuelles, somme toute assez grossières, sur les mouvements des corps, ne permettent pas de déceler des écarts à la loi d'inertie dans le référentiel terrestre. Il faudrait alors mettre en œuvre des expériences plus délicates et plus précises. Aussi, pour établir les lois fondamentales de la dynamique, peut-on partir d'une étude du mouvement des corps par rapport à la Terre, et négligeant sa rotation, la considérer comme un *système approximativement inertiel.*

4. Lorsque les trois étoiles utilisées dans le système copernicien pour fixer les directions des axes de coordonnées appartiennent à notre Galaxie, le référentiel ainsi défini ne pourra être pris comme système inertiel, ou plus exactement approximativement inertiel que s'il s'agit du mouvement d'objets petits par rapport aux dimensions de la Galaxie, le système solaire par exemple. Mais lorsqu'il s'agit du mouvement de la Galaxie ou de plusieurs Galaxies, le référentiel copernicien ne convient plus. Pour bâtir un autre système approximativement inertiel on peut utiliser quatre corps sidéraux séparés les uns des autres par des distances qui sont grandes comparativement à l'espace où s'effectue le mouvement des corps considérés. Le centre de l'un de ces corps sidéraux peut être pris pour origine

*) On précisera au chapitre IX ce qu'il faut entendre par rotation lente.

des coordonnées, les trois autres corps étant utilisés pour fixer les directions des axes de coordonnées.

Dans nos études du mouvement des corps, nous supposerons tout d'abord que le mouvement est rapporté à un référentiel d'inertie. Plus tard, au chapitre IX, nous verrons comment on doit modifier la forme des lois de mouvement pour les adapter à des systèmes non inertiels.

§ 10. La masse et la loi de conservation de l'impulsion

1. Chaque fois que l'on cherche à mettre un corps en mouvement, à modifier le module, la direction ou le sens de la vitesse d'un corps, celui-ci oppose une résistance à ces changements. Cette aptitude des corps à s'opposer aux changements de leurs états de repos ou de mouvement s'appelle *inertie.* Elle se manifeste plus ou moins intensément selon les corps. Ainsi, par exemple, il est beaucoup plus difficile de conférer la même accélération à une grosse pierre qu'à une petite balle en caoutchouc. La grandeur physique caractérisant l'inertie d'un corps s'appelle *masse* du corps.

Pour donner une définition quantitative précise de la masse, nous commencerons par introduire la notion de *système isolé* ou *fermé.* C'ess un système de corps se trouvant tellement éloignés de tous les autres corps que ceux-ci n'exercent pratiquement aucune action sur les corps du système considéré. Les corps constituant le système isolé ne peuvent être qu'en interactions mutuelles. Considérons donc un système isolé constitué par deux points matériels dont les vitesses sont petites par rapport à la vitesse de la lumière. Du fait des interactions entre les points matériels, leurs vitesses varient. Soient $\boldsymbol{v}_1$ la vitesse du point *1*, $\boldsymbol{v}_2$ la vitesse du point *2*, $\Delta\boldsymbol{v}_1$ et $\Delta\boldsymbol{v}_2$ les accroissements de ces vitesses pendant le même intervalle de temps Δt. Les quantités $\Delta\boldsymbol{v}_1$ et $\Delta\boldsymbol{v}_2$, de sens contraires, sont liées par la relation

$$m_1\Delta\boldsymbol{v}_1 = -m_2\Delta\boldsymbol{v}_2, \qquad (10.1)$$

où les quantités invariables m_1 et m_2 sont de même signe et ne dépendent absolument pas de la nature des interactions entre les points matériels *1* et *2*. Par exemple, les interactions peuvent résulter de chocs entre les points *1* et *2*. On peut aussi communiquer aux points matériels des charges électriques ou disposer entre eux un petit ressort pour assurer un type donné d'interaction. On peut faire varier arbitrairement la durée de l'intervalle de temps Δt et déterminer ainsi une variation des vecteurs $\Delta\boldsymbol{v}_1$ et $\Delta\boldsymbol{v}_2$. Mais les quantités m_1 et m_2 (ou plutôt leur rapport) n'en seront nullement affectées et resteront constantes. Ces résultats doivent être considérés comme des *faits expérimentaux* maintes fois confirmés. Les coefficients m_1 et m_2, qui ne dépendent que des *points matériels du système*, sont dé-

nommés *masses* ou plus exactement *masses d'inertie* des points matériels *1* et *2*.

Ainsi, par définition, *le rapport des masses de deux points matériels est égal au rapport changé de signe des accroissements que prennent les vitesses de ces points du fait de leur interaction*, à condition que les points matériels considérés forment un système isolé et se meuvent à des vitesses non relativistes.

2. Pour passer du rapport des masses aux masses elles-mêmes, il faut choisir une unité de masse, donc choisir un certain corps dont la masse sera posée égale à l'unité ; ce sera l'*étalon de masse*. L'étalon de masse une fois fixé, les masses des autres corps pourront être déterminées de façon univoque. Toutes les masses seront *positives* puisque toutes les masses sont de même signe et que la masse du corps étalon est positive. En physique, l'unité de masse fondamentale est le *kilogramme*. C'est la masse d'un poids étalon en alliage irridium-platine déposé au Bureau international des poids et mesures, se trouvant à Sèvres, en France. Le kilogramme est approximativement égal à la masse d'un décimètre cube d'eau pure dont la température est de 4 °C. La millième partie du kilogramme s'appelle le *gramme*. A la différence de la longueur et du temps pour lesquels on a adopté des *unités de mesure naturelles*, l'unité de masse a été définie comme étant la masse d'un corps choisi arbitrairement. Il aurait mieux valu choisir pour unité de masse une unité naturelle, par exemple la masse d'une particule élémentaire telle que le proton.

Notons encore une circonstance essentielle résultant de l'expérience. On peut déterminer la valeur du rapport m_2/m_1 non seulement par comparaison directe des masses des corps considérés, mais aussi par le procédé indirect suivant. On détermine d'abord les rapports entre les masses des deux corps et celle d'un troisième corps, puis on divise l'un par l'autre les rapports ainsi déterminés. Le résultat ne dépend pas de la masse du troisième corps et coïncide avec la valeur du rapport m_2/m_1 déterminée par comparaison directe des masses m_1 et m_2.

En divisant les deux membres de l'égalité (10.1) par la durée Δt de l'interaction des corps, on obtient

$$m_1 \mathbf{a}_{1\text{moy}} = -m_2 \mathbf{a}_{2\text{moy}}, \tag{10.2}$$

ce qui donne après passage à la limite :

$$m_1 \mathbf{a}_1 = -m_2 \mathbf{a}_2. \tag{10.3}$$

Ces relations permettent de trouver le rapport des masses de deux corps par comparaison des *accélérations moyennes* ou *vraies* apparaissant lors de l'interaction entre ces corps.

3. Ecrivons la relation (10.1) sous une forme différente. Soient $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ les vitesses des corps avant leur interaction mutuelle et $\mathbf{v}_1'$ et $\mathbf{v}_2'$ leurs vitesses après interaction. On aura alors $\Delta \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' -$

$-\ v_1$, $\Delta v_2 = v_2' - v_2$. En portant ces expressions dans (10.1) on obtient

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{10.4}$$

Appelons *impulsion* ou *quantité de mouvement d'un point matériel* le vecteur défini comme le produit de la masse du point matériel par sa vitesse:

$$p = mv. \tag{10.5}$$

Nous appellerons *impulsion* ou *quantité de mouvement d'un système de points matériels* la somme vectorielle des impulsions des points matériels constituant le système. Pour un système de deux points matériels, on aura $p = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$. L'égalité (10.4) peut donc s'écrire

$$p = p', \tag{10.6}$$

où $p = p_1 + p_2$ et $p' = p_1' + p_2'$ sont les impulsions du système avant et après interaction. Ainsi *l'impulsion d'un système isolé de deux points matériels se conserve, c'est-à-dire demeure invariable dans le temps, quelles que soient les interactions entre ces points.* Cette proposition porte le nom de *loi de conservation de l'impulsion.* Cette loi découle de l'expérience et de la définition de la masse donnée ci-dessus. Le fait que la quantité mv satisfasse à une « loi de conservation » justifie que l'on dénote ce produit par un symbole spécial et qu'on lui donne une dénomination particulière. La quantité $m^2 v$, par exemple, ne jouit pas de cette propriété et ne joue donc pas un rôle semblable en mécanique. Nous étendrons plus tard la loi de conservation de l'impulsion aux systèmes isolés comportant un nombre arbitraire de points matériels.

4. La forme que nous avons donnée à la loi de conservation de l'impulsion est celle en usage en mécanique non relativiste; elle n'est donc vérifiée que pour des mouvements lents. En mécanique relativiste cette loi est généralisée au cas de mouvements rapides; nous l'étudierons dans le cadre de la théorie de la relativité. Pour l'instant nous nous contenterons de résumer le principal résultat auquel conduit cette généralisation. En mécanique relativiste l'impulsion d'une particule est également définie par la formule (10.5), mais la masse m dépend de la vitesse conformément à la formule

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{10.7}$$

m_0 est une quantité constante pour une particule donnée et portant le nom de *masse au repos*. La masse au repos coïncide avec la masse que l'on fait intervenir en mécanique non relativiste. La quantité m définie par la formule (10.7) est la *masse de mouvement* ou *masse relativiste*. En mécanique relativiste, la loi de conservation de l'impulsion d'un système isolé, constitué de deux particules en interaction

dont les masses au repos sont m_{01} et m_{02}, s'exprime donc par la formule mathématique suivante:

$$\frac{m_{01}v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}+\frac{m_{02}v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}=\frac{m_{01}v_1'}{\sqrt{1-\frac{v_1'^2}{c^2}}}+\frac{m_{02}v_2'}{\sqrt{1-\frac{v_2'^2}{c^2}}}. \quad (10.8)$$

Dans le cas de mouvements lents, lorsque $v^2/c^2 \ll 1$, on peut négliger la variation de la masse avec la vitesse et poser $m = m_0$. La mécanique relativiste se ramène alors à la mécanique non relativiste qui est un cas limite approché. Pour donner une idée de l'erreur que l'on commet en usant de cette approximation, considérons un vaisseau spatial se mouvant à une vitesse $v = 8$ km/s. On a alors $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{8}{300\,000}\right)^2 \approx 7\cdot10^{-10}$. Si la masse du vaisseau est $m = 5\text{t} = 5\cdot10^6$ g, la masse relativiste m ne sera supérieure à la masse au repos que de $m - m_0 = 3{,}5\cdot10^{-3}$ g. Dans tous les calculs du mouvement du vaisseau cosmique cette correction peut et doit être négligée pour la raison que les données initiales utilisées dans les calculs ne peuvent être mesurées avec ce degré de précision.

§ 11. Deuxième loi de Newton. La force

1. Toute description du mouvement se ramène en fin de compte à la détermination des coordonnées des points matériels du système mécanique en fonction du temps. Mais en procédant ainsi il est difficile de mettre en évidence les lois générales régissant le mouvement. Pour y parvenir, on doit avoir recours aux équations différentielles où, à côté des coordonnées et des vitesses, figurent les dérivées des impulsions par rapport au temps (en mécanique non relativiste, les accélérations).

Si le point matériel n'est pas isolé, du fait de ses interactions avec les corps environnants son impulsion ne se conserve pas. Il est donc tout indiqué de caractériser l'intensité des interactions par la dérivée de l'impulsion par rapport au temps $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \dot{\boldsymbol{p}}$. *Une des principales généralisations de la mécanique classique consiste à affirmer que la dérivée $\dot{\boldsymbol{p}}$ dépend de la position du point matériel considéré par rapport aux corps environnants et parfois de sa vitesse.* Cette dérivée est fonction du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ et de la vitesse $\boldsymbol{v}$ du point matériel et peut dépendre aussi des coordonnées et des vitesses des points matériels environnants, considérées comme des paramètres. Désignons cette fonction par $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$. On écrira alors

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}. \quad (11.1)$$

La fonction des coordonnées et de la vitesse du point matériel $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ qui détermine la dérivée de son impulsion par rapport au

temps porte le nom de *force* *). La *force* est un *vecteur*, car elle résulte de la dérivation du vecteur $\boldsymbol{p}$ par rapport au scalaire t.

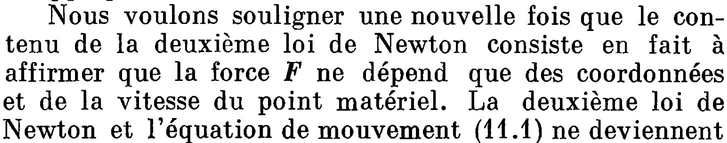
Ainsi *la dérivée de l'impulsion d'un point matériel par rapport au temps est égale à la force qui lui est appliquée.*

Cette proposition porte le nom de *deuxième loi de Newton.* L'équation (11.1) exprimant cette loi est l'*équation de mouvement du point matériel.* Dans le cas de mouvements aux vitesses non relativistes, on peut négliger la variation de la masse avec la vitesse et écrire la deuxième loi de Newton sous la forme

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}, \tag{11.2}$$

soit

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}. \tag{11.3}$$



Le produit de la masse par l'accélération est égal à la force appliquée.

Nous voulons souligner une nouvelle fois que le contenu de la deuxième loi de Newton consiste en fait à affirmer que la force $\boldsymbol{F}$ ne dépend que des coordonnées et de la vitesse du point matériel. La deuxième loi de Newton et l'équation de mouvement (11.1) ne deviennent concrètes qu'une fois déterminée la fonction $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$. La mécanique physique a pour objet essentiel la détermination de la forme de ces fonctions dans chaque cas concret.

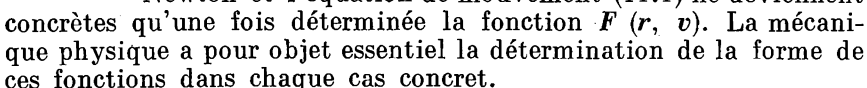


Fig. 21

2. Donnons quelques exemples simples de détermination des équations de mouvement. Ces exemples servent en même temps à démontrer la validité de la deuxième loi de Newton.

Suspendons un corps à un ressort à boudin (fig. 21). Après avoir établi l'équilibre, tirons le corps vers le bas pour le faire sortir de sa position d'équilibre, puis relâchons-le. On voit alors apparaître des oscillations de haut en bas. Si les paramètres du système ont été convenablement choisis, l'affaiblissement de ces oscillations sera faible, et le corps pourra effectuer plusieurs dizaines d'oscillations avant qu'elles soient notablement amorties. La position instantanée du corps peut être caractérisée par une seule coordonnée x qui est le déplacement du corps par rapport à sa position d'équilibre. Pour déterminer la forme de la fonction $x = x(t)$, on peut photographier le corps à de courts intervalles de temps puis dépouiller le film et construire le graphique $x = x(t)$. On peut aussi utiliser un autre procédé. Pour des oscillations faiblement amorties, le graphi-

*) Mettant en œuvre le principe de relativité et l'hypothèse de l'homogénéité de l'espace, on arrive à démontrer que la force $\boldsymbol{F}$ dépend non pas des coordonnées et des vitesses elles-mêmes, mais des *différences des coordonnées* et des *différences des vitesses* du point matériel considéré et des points environnants avec lesquels interagit ce point (voir problème 3 au § 38). Cependant cette précision ne nous est pas nécessaire pour le moment.

que obtenu sera peu différent d'une sinusoïde (fig. 22) et pourra donc être traduit par l'équation

$$x = A\cos\frac{2\pi t}{T}, \tag{11.4}$$

où A et T sont des constantes appelées, la première, *amplitude* et la

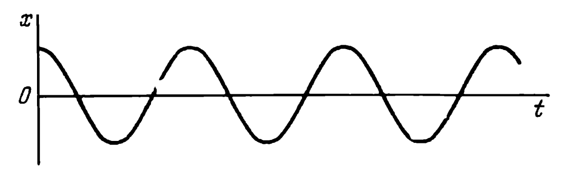


Fig. 22

seconde, *période des oscillations.* En dérivant deux fois cette équation on trouve la vitesse et l'accélération de notre corps:

$$\dot{x} = -\frac{2\pi A}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}, \quad \ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

En comparant cette dernière expression avec (11.4) on a

$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x,$$

ou en multipliant par la masse m du corps

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{11.5}$$

où

$$k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m. \tag{11.6}$$

Comparant (11.5) et (11.3) on trouve la force

$$F = -kx. \tag{11.7}$$

On voit que la force F ne dépend que de l'allongement x du ressort qui est le seul paramètre variable déterminant la position des corps environnants exerçant une action sur le corps étudié. Si on suspend au ressort un autre corps de masse différente, on fera varier la période T des oscillations. L'expérience montre cependant que le rapport m/T^2 et donc le coefficient k auront les mêmes valeurs. Il s'ensuit que la force F ne dépend que de l'extension du ressort et non du corps qui aura déterminé cette extension. Ces données expérimentales démontrent la validité de la deuxième loi de Newton. On peut donc prévoir que si le corps ne subit aucune autre action que celle qu'exerce le ressort, son accélération aura toujours pour module $k\frac{x}{m}$ et sera dirigée le long de l'axe du ressort dans le sens opposé à

l'allongement x. L'accélération ne dépend absolument pas de la façon (rectiligne, circulaire ou autre) dont le corps se meut. Cette conclusion est également vérifiée par voie expérimentale.

On voit aussi que *la force de tension F du ressort est proportionnelle à son allongement x.* Des études expérimentales plus précises ont montré que ce dernier résultat n'est qu'approché et ne peut être utilisé que si l'allongement du ressort n'est pas très grand. C'est la *loi de Hooke* (1635-1703). La quantité k porte le nom de *coefficient d'élasticité* ou *de dureté du ressort*. Pour un ressort donné le coefficient k est une constante; il peut avoir des valeurs différentes pour des ressorts différents.

L'expérience montre que les oscillations d'un corps suspendu à un ressort s'amortissent peu à peu pour cesser finalement. Il s'ensuit que l'équation du mouvement (11.5) n'est qu'une approximation. Il apparaît que tout corps qui se meut dans un milieu gazeux ou liquide éprouve une résistance dont la valeur dépend de la vitesse du corps. Tant que la vitesse du corps n'est pas trop grande (par rapport au milieu environnant), cette force de résistance est approximativement proportionnelle à la vitesse. Ainsi pour une sphère suspendue à un ressort, l'amortissement de ses oscillations dans un milieu gazeux s'exprime avec une bonne précision par l'équation

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \tag{11.8}$$

b étant un facteur constant dont la valeur dépend des dimensions de la sphère et de la nature du gaz ambiant. C'est un exemple de force dépendant aussi bien de la position que de la vitesse du corps sphérique.

3. Pour résoudre les problèmes de mouvement des points matériels et des systèmes de points, on doit disposer d'*équations différentielles décrivant ces mouvements*. Le procédé utilisé pour obtenir ces équations importe peu; on pourrait fort bien les établir et bâtir toute la mécanique sans recourir à la notion de force.

Dans l'étude des problèmes dynamiques, la mécanique pose et résout deux types de problèmes: 1) connaissant le mouvement d'un corps, calculer les forces auxquelles ce corps est soumis; 2) connaissant les forces agissant sur un corps, déterminer son mouvement. Les problèmes du premier type sont relativement simples, puisqu'ils se ramènent au calcul des accélérations des points matériels constituant le système étudié. Un exemple de ce type de problèmes est le problème concernant la force agissant sur un corps oscillant suspendu à un ressort, que nous avons traité plus haut. Les problèmes du second type, les plus importants en mécanique, sont notablement plus compliqués. Dans ces problèmes on doit commencer par écrire les équations de mouvement de chacun des points matériels constituant le système. On doit donc déterminer les forces en fonction des coordonnées et des vitesses des points en interactions mutuelles. On aboutit

ainsi à un système d'équations différentielles dont la résolution (pour des conditions initiales données) donne une description complète du mouvement du système. Cela revient à dire que la résolution de ce type de problèmes implique l'*intégration des équations différentielles*, opération plus compliquée que la dérivation.

On peut aussi se trouver en présence de problèmes d'un type mixte. C'est le cas, par exemple, lorsqu'on impose des restrictions bien déterminées au mouvement du système (le point mobile est assujetti à rester, par exemple, sur une certaine droite ou sur un certain plan). Ces restrictions imposées au mouvement sont appelées des « *liaisons* ». L'action exercée par toute liaison, que ce soit une droite ou une surface qui impose des restrictions à la liberté de mouvement d'un corps, se ramène à l'application à ce corps de forces portant le nom de *réactions* (ou forces) *de liaison*. Le problème consiste alors non seulement à déterminer le mouvement de chaque point du système, mais encore à calculer les réactions de liaison.

4. Voyons quelle est la corrélation entre la première et la deuxième loi de Newton. Si on pose $\boldsymbol{F} = 0$ dans l'équation (11.1), on obtient $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0$. Il en résulte que $\boldsymbol{p} =$ const, ce qui implique qu'aussi bien l'impulsion que la vitesse d'un point matériel en mouvement libre sont constantes. Ainsi, formellement, la première loi pourrait être considérée comme une conséquence de la deuxième loi. On peut se demander alors pourquoi en faire une loi indépendante? Parce que l'équation (11.1) exprimant la deuxième loi n'a de sens que si on précise le système de référence dans lequel cette loi est vérifiée. Or on ne peut définir un tel système de référence qu'en ayant recours à la première loi qui affirme qu'il existe un système de référence dans lequel un point matériel libre se meut sans accélération. Dans un tel référentiel, le mouvement de tout point matériel est décrit par l'équation (11.1) (deuxième loi). On ne peut donc considérer la première loi comme une conséquence logique de la deuxième loi, vu qu'il existe entre elles une corrélation plus profonde qu'il n'apparaît au premier abord.

5. L'équation (11.2) prédétermine le choix de l'unité de force. Les unités de longueur, de masse et de temps étant déjà fixées, l'unité de force doit correspondre à une force qui communique à l'unité de masse une accélération égale à l'unité. En 1960, la XIe Conférence générale des poids et mesures adopta le *Système international des unités de mesure* (système SI). A la base de ce système on trouve six unités de mesure indépendantes: unité de longueur — le *mètre* (m), unité de temps — la *seconde* (s), unité de masse — le *kilogramme* (kg), unité de différence de température — le *kelvin* (K), unité d'intensité de courant — l'*ampère* (A) et unité d'intensité lumineuse — la *candela* (cd). Toutes les autres unités de mesure dérivent des unités fondamentales. Il est facile de montrer ce que l'on entend par

unité dérivée en prenant l'exemple de l'unité de force. Dans le système SI l'unité de force est le *newton* (N). Le newton est la force qui, agissant sur une masse de 1 kg, lui imprime une accélération de 1 m/s². En physique, à côté du système SI, on continue à utiliser l'ancien système C.G.S. Dans le système C.G.S. les unités fondamentales sont: le *centimètre* (cm) pour l'unité de longueur, la *seconde* (s) pour l'unité de temps et le *gramme* (g) pour l'unité de masse. Dans ce système, l'unité de force est la *dyne* (dyn). La dyne est la force qui, appliquée à une masse de 1 g, lui communique une accélération de 1 cm/s². Il est évident que

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dynes.}$$

En mécanique les deux systèmes sont également commodes pour la bonne raison qu'ils ne diffèrent pas essentiellement l'un de l'autre. En mécanique ils ne diffèrent que par l'échelle des unités fondamentales de masse et de longueur. Dans les deux systèmes toutes les notions de mécanique ont exactement la même signification et toutes les formules s'écrivent de la même façon. Il en va tout autrement en Electricité, en Optique et en Physique atomique; le système C.G.S. est beaucoup mieux adapté à leur étude que le système SI. C'est pour cela que nous avons donné la préférence au système C.G.S. dans notre cours de Physique Générale.

6. Pour conclure ce paragraphe nous examinerons la question de la *composition des forces*. Nous avons déjà dit que *la force est un vecteur*. Nous avons voulu indiquer tout simplement qu'à la suite d'une rotation des axes de coordonnées les composantes d'une force se transforment comme celles d'un vecteur. Comme pour tout autre vecteur, on peut introduire pour les forces l'opération d'addition, dans le sens mathématique de ce terme (cf. § 7). Par définition on fait correspondre à deux forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ une nouvelle quantité représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$. On démontre aisément que cette nouvelle quantité est un vecteur que l'on appelle *résultante* ou *somme géométrique* des forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$. Il est tout aussi absurde de vouloir vérifier expérimentalement l'exactitude de telles sommations que de vérifier expérimentalement l'égalité arithmétique $2 + 3 = 5$. Le résultat est correct *par définition même* de la composition des vecteurs. Parfois on confère à la composition des forces une signification *physique*. C'est ce qui se passe en physique élémentaire lorsqu'on y parle pour la première fois de la composition des forces. Mais la question que l'on cherche à traiter n'est jamais parfaitement claire. En effet on commence par dire qu'un corps (point matériel) est soumis à l'action simultanée de deux forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$. Puis on demande par quelle force unique $\boldsymbol{F}$ on peut remplacer ces deux forces pour que le résultat de l'action soit le même. Le manque de clarté de ce problème vient de ce que l'on ne précise pas ce qu'il faut entendre par « action simultanée de

deux forces ». Dans des conditions données, tout point matériel n'est jamais soumis qu'à une seule force dont le module, la direction et le sens sont déterminés par la position du point matériel par rapport à tous les corps qui l'environnent. Pour expliquer la signification de la question posée par ce problème de physique élémentaire, nous examinerons deux exemples simples.

Supposons qu'à un point matériel A soit fixé un ressort tendu qui applique au point A une force de traction $\boldsymbol{F}_1$. Supprimons ce ressort et faisons agir sur le point matériel A un autre ressort exerçant une force de traction $\boldsymbol{F}_2$. La direction et le module des forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ nous sont donnés par les directions des axes des ressorts et par leurs allongements. Attachons maintenant notre point matériel à ces deux ressorts dont les directions et les allongements seront les mêmes que précédemment. Il s'agit de déterminer la force $\boldsymbol{F}$ agissant sur le point A soumis à l'action des deux ressorts.

Notre second exemple concerne une charge ponctuelle q, immobile en un point A de l'espace. Supposons qu'aux points B et C se trouvent les charges ponctuelles q_1 et q_2 exerçant simultanément sur la charge q une force $\boldsymbol{F}$. Supprimons la charge q_2 et dénotons par $\boldsymbol{F}_1$ la force exercée par la charge q_1 sur la charge q. On définira de même la force $\boldsymbol{F}_2$ qu'exerce sur q la seule charge q_2. Le problème consiste à déterminer la force $\boldsymbol{F}$, les forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ étant connues.

Soit, en général, $\boldsymbol{F}_i$ la force qu'exerce sur le point matériel considéré un certain i-ème corps (source de la force $\boldsymbol{F}_i$), toutes les autres sources de force étant supprimées ($i = 1, 2, \ldots, n$). Quelle sera la force appliquée $\boldsymbol{F}$ lorsque toutes les n sources de force seront présentes ? Nous avons là une *question de physique* qui ne peut être tranchée à l'aide de définitions. On dit généralement que la force $\boldsymbol{F}$ est égale à la somme géométrique des forces $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$. Or une telle réponse ne constitue pas une conséquence logique des lois de Newton ou de n'importe quelle autre loi. Cette réponse peut être vraie ou fausse et seule l'expérience permet de trancher la question. L'expérience montre que pour des ressorts tendus et des forces électriques issues des charges ponctuelles, l'énoncé ci-dessus est correct. On dit alors que les forces $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots$ vérifient *le principe de superposition*. Ce principe se fonde sur l'idée que *les forces appliquées sont indépendantes*. On dit que les forces agissent *indépendamment* si chaque force $\boldsymbol{F}_i$ communique au corps considéré la même accélération $\boldsymbol{a}_i$, que le corps soit soumis à l'action d'une seule ou de toutes les n sources de forces à la fois. Comme l'accélération est un vecteur, l'accélération résultante s'obtient en prenant la somme vectorielle de tous les $\boldsymbol{a}_i$. Par suite, la force résultante $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ est égale elle aussi à la somme vectorielle des forces indépendantes $\boldsymbol{F}_i = m\boldsymbol{a}_i$. On en conclut que la possibilité de mettre en œuvre la règle du parallélogramme résulte de l'hypothèse que les forces appliquées sont indépendantes. Dans le cas où les corps qui sont les sources de forces

interagissent entre eux et modifient de ce fait leurs états, ce mode de calcul de la force résultante $\boldsymbol{F}$ peut s'avérer incorrect. C'est ce qui se produirait si, dans notre second exemple, on remplaçait les sources ponctuelles q_1 et q_2 par des corps étendus portant des charges électriques. Lors du rapprochement de tels corps la répartition des charges électriques qui les recouvrent se trouve modifiée du fait de l'induction, ce qui se répercute sur le module de la force produite. Mais même dans ce cas on pourra mettre en œuvre le principe de superposition si on subdivise en pensée les charges occupant leurs positions définitives en des parties suffisamment petites. Assimilant alors ces parties à des charges ponctuelles, on pourra calculer par application de la *loi de Coulomb* les champs électriques créés, puis utiliser le principe de superposition. Cette proposition doit être considérée comme une généralisation de faits expérimentaux.

PROBLÈMES

1. Un ascenseur se déplace avec une accélération $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{g}$, avec $|\alpha| < 1$. Connaissant le poids P de l'ascenseur au repos (charge comprise), déterminer la tension T du câble de l'ascenseur lors de son mouvement accéléré.

Réponse. $T = P(1 - \alpha)$. On considérera que le nombre fractionnaire α est positif lorsque l'accélération a est dirigée vers le bas, et négatif lorsque l'accélération est dirigée vers le haut.

2. On suspend à un ressort un corps assujetti à se déplacer le long d'une droite donnée (par exemple, le long d'une tige sur laquelle est enfilé le corps). Un tel système peut servir d'*accéléromètre* (de dispositif de mesure des accélérations) que l'on fixe sur le corps dont on étudie le mouvement (automobile, avion, train, etc.). Donnez une description du fonctionnement de cet accéléromètre.

3. Un avion effectue un virage en se déplaçant à vitesse constante le long d'une circonférence et en restant toujours à la même altitude. Calculer le rayon r de cette circonférence sachant que le plan de l'aile de l'avion fait un angle constant α avec le plan horizontal.

Réponse. $r = \dfrac{v^2}{g \operatorname{tg} \alpha}$.

Indication. Lorsque l'avion vole en ligne droite le plan de l'aile est horizontal. La force ascensionnelle est alors dirigée suivant la verticale vers le haut, donc perpendiculaire au plan de l'aile. Lorsque le corps de l'avion tourne autour d'un axe longitudinal d'un certain angle, la force ascensionnelle tourne du même angle et reste normale au plan de l'aile puisque les forces d'interaction de l'avion avec le milieu ne dépendent que du mouvement relatif de l'avion et du milieu.

§ 12. La troisième loi de Newton et la loi de conservation de l'impulsion

1. Considérons un système fermé constitué par deux points matériels interagissant entre eux. La loi de conservation de l'impulsion

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \text{const}$$

est alors vérifiée. En dérivant cette relation par rapport au temps on obtient

$$\dot{p}_1 + \dot{p}_2 = 0,$$

ce qui, en vertu de la deuxième loi de Newton (11.1), conduit à

$$F_1 = -F_2, \tag{12.1}$$

où F_1 et F_2 sont les forces qu'exercent l'un sur l'autre les points matériels du système. Utilisons le fait expérimental selon lequel les forces F_1 et F_2 sont portées par la *droite* reliant entre eux les points matériels. Nous aboutirons alors à la *troisième loi de Newton*:

Les forces d'interaction s'exerçant entre deux points matériels ont même module, sont de sens opposés et sont dirigées suivant la droite reliant ces points l'un à l'autre.

Selon Newton, l'une de ces forces peut être appelée *action*, et l'autre, *réaction*. La troisième loi s'énonce alors comme suit. *A toute action correspond une réaction égale et de sens opposé.* Notons cependant que de par sa nature physique, l'action ne se distingue en rien de la réaction. Si la force active est due à une déformation, à la gravitation universelle ou à un champ électrique, la force de réaction a la même origine. Un corps pesant reposant sur une table exerce une pression sur celle-ci et subit lui-même une pression dirigée en sens inverse. L'action qui est ici la pression qu'exerce sur la table le corps pesant est déterminée par la déformation de ce corps, tandis que la pression exercée par la table sur le corps est due à la déformation de la table. La subdivision des forces en forces d'action et de réaction découle de l'idée de l'existence de *corps actifs* produisant une action et de *corps passifs* opposant une réaction. Ainsi, dans le cas d'un cheval tirant une charrette, le corps actif produisant l'action sera le cheval et le corps passif, source de réaction, est la charrette. Il n'est cependant pas toujours possible de classer les corps en corps actifs et passifs. Par exemple, dans le cas du Soleil et d'une planète, entre lesquels se manifeste une force d'attraction déterminée par la gravitation universelle, on ne saurait dire lequel des deux corps célestes est actif et lequel est passif. Laquelle des deux forces F_1 et F_2 devra être appelée force d'action et laquelle sera appelée force de réaction est, avant tout, une question de convention.

2. Nous avons formulé la troisième loi de Newton pour un système fermé comportant deux points matériels en interaction mutuelle. Postulons maintenant que cette loi s'applique à tout système comportant un nombre arbitraire de points matériels, en supposant que dans ce cas également les points matériels *interagissent deux à deux*. Soient F_{ik} la force avec laquelle le point matériel i agit sur le point matériel k, et F_{ki} la force qu'exerce le point k sur le point i. La troisième loi affirme que ces forces sont portées par la droite reliant les points i et k avec $F_{ik} = -F_{ki}$. Dans cette interprétation la troi-

sième loi de Newton permet de passer *de la mécanique d'un point matériel à la mécanique d'un système de points matériels* et d'étendre la loi de conservation de l'impulsion à un système comportant un nombre arbitraire n de points matériels interagissant entre eux. Examinons de plus près cette question, ainsi que d'autres également importantes.

On peut subdiviser l'ensemble des forces agissant sur les points matériels d'un système en forces *intérieures* et *extérieures*. Les forces intérieures sont les forces d'interaction entre les points matériels du système. Ci-dessus nous avons désigné ces forces par les symboles $\boldsymbol{F}_{ik}$ avec deux indices i et k dénotant les points matériels concernés. Les forces extérieures sont les forces qu'exercent sur les points matériels du système les corps qui l'entourent. Selon la troisième loi de Newton $\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki}$, soit $\boldsymbol{F}_{ik} + \boldsymbol{F}_{ki} = 0$. Il s'ensuit que la somme géométrique de toutes les forces intérieures se manifestant dans le système est nulle. Ecrivons ce résultat sous la forme

$$\boldsymbol{F}_1^{(i)} + \boldsymbol{F}_2^{(i)} + \ldots + \boldsymbol{F}_n^{(i)} = 0, \tag{12.2}$$

l'indice supérieur (i) indiquant qu'il s'agit uniquement de forces intérieures. L'indice inférieur est le numéro d'ordre du point matériel soumis à l'action de ces forces. Ainsi, par exemple, $\boldsymbol{F}_1^{(i)}$ dénote la force intérieure totale s'exerçant sur le point matériel numéro 1. Désignons par les symboles $\boldsymbol{F}_1^{(e)}$, $\boldsymbol{F}_2^{(e)}, \ldots$ les forces extérieures agissant sur les points matériels du système. Conformément à la deuxième loi de Newton on écrira

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_1^{(i)} + \boldsymbol{F}_1^{(e)},$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_2^{(i)} + \boldsymbol{F}_2^{(e)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En additionnant ces équations membre à membre et tenant compte de (12.2), nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_n) = \boldsymbol{F}_1^{(e)} + \boldsymbol{F}_2^{(e)} + \ldots + \boldsymbol{F}_n^{(e)},$$

soit

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)}, \tag{12.3}$$

où $\boldsymbol{p}$ est l'impulsion du système tout entier et $\boldsymbol{F}^{(e)}$ est la résultante de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées. Ainsi *la dérivée par rapport au temps de l'impulsion d'un système de points matériels est égale à la somme géométrique de toutes les forces extérieures agissant sur ce système.* En vertu de la troisième loi de Newton les forces intérieures sont exclues. L'équation (12.3) est la généralisation de l'équation concernant un seul point matériel.

Supposons maintenant que la somme géométrique de toutes les forces extérieures soit nulle (c'est ce qui se produit, par exemple, pour un système fermé). On aura alors $\frac{dp}{dt} = 0$. La dérivée d'une constante est égale à zéro. La proposition inverse est aussi valable: si la dérivée d'une certaine quantité est nulle, cette quantité est une constante. Nous voyons donc que la dernière équation entraîne $p = \text{const}$.

Ainsi, *chaque fois que la somme géométrique de toutes les forces extérieures appliquées au système est nulle, l'impulsion du système se conserve, i.e. reste invariable dans le temps.* C'est ce qui a lieu en particulier pour les systèmes fermés.

Supposons maintenant que $F^{(e)} \neq 0$, mais que la projection de la force $F^{(e)}$ sur un axe quelconque, l'axe X par exemple, est égale à zéro. Il résulte alors de l'équation (12.3) que pour cette projection $\frac{dp_x}{dt} = 0$ et par suite $p_x = \text{const}$. L'impulsion totale du système ne se conserve pas, mais la projection de l'impulsion du système sur l'axe X se conserve. Par exemple, l'impulsion d'un corps en chute libre ne peut se conserver puisque le corps est soumis à l'action de la force de pesanteur dirigée vers le bas. Sous l'action de cette force, la composante verticale de l'impulsion varie sans discontinuer, mais la composante horizontale de l'impulsion reste invariable pendant toute la durée de la chute du corps. (Nous ne tenons compte ici que de la force de pesanteur, négligeant la force de résistance de l'air et et les autres forces.)

3. La démonstration de la loi de conservation de l'impulsion que nous venons de donner appelle quelques remarques. Elle est fondée sur l'hypothèse que les points matériels du système fermé interagissent deux par deux, ces interactions vérifiant la troisième loi de Newton. Pour que le résultat final soit correct, il suffit d'exiger que soit remplie la condition (12.2) qui est moins stricte. Il suffit en effet que soit nulle la somme géométrique des forces intérieures s'exerçant dans le système. Nous montrerons au § 38 que cette condition n'est satisfaite que parce que l'espace jouit de la propriété d'être *homogène*. Il est possible que même la condition (12.2) ne soit pas nécessaire et que la loi de conservation de l'impulsion soit également vérifiée lorsque la subdivision du système en parties est dénuée de sens et qu'il n'est plus possible d'utiliser la notion d'interactions mutuelles entre ces parties du système, ainsi que les autres concepts de la mécanique classique. Il n'est pas exclu que cette situation ait lieu à l'intérieur des noyaux atomiques et dans les transmutations des particules « élémentaires ». L'expérience montre que, adéquatement généralisée, *la loi de conservation de l'impulsion est une loi fondamentale de la Nature ne souffrant aucune exception.* Mais prise dans ce sens large, cette loi ne peut plus être considérée comme une simple conséquence des lois de Newton.

6—01433

4. Dans l'exposé que nous venons de donner, la loi de conservation de l'impulsion d'un système fermé comportant deux points matériels en interaction mutuelle a été simplement postulée. La vérification de cette loi est fournie par l'expérience. Nous avons procédé ainsi rien que pour introduire la notion de masse. On peut cependant introduire cette notion tout autrement, notamment en déterminant le rapport des masses des corps considérés en se fondant sur le rapport inverse des accélérations communiquées à ces corps par des forces égales. Ce procédé *n'implique pas une mesure préalable des forces*

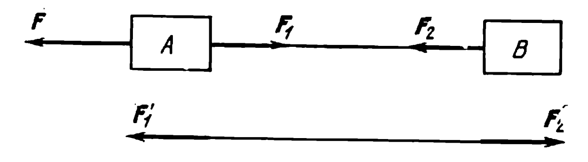


Fig. 23

puisqu'il suffit de disposer d'un critère *d'égalité des forces* mises en œuvre. Si, par exemple, on soumet successivement deux corps à l'action d'un même ressort dans un état de tension tel que l'allongement du ressort soit le même, on peut en inférer que les forces appliquées aux deux corps sont égales. En somme, le procédé de détermination de la masse d'un corps, que nous avons utilisé au § 10, est un cas particulier de ce second procédé, de portée plus générale. Ce dernier procédé est fondé sur le fait que deux corps mis en interaction mutuelle sont soumis, en vertu de la troisième loi de Newton, à des forces de même module. Il est bien évident que si on avait défini la notion de masse en s'appuyant non sur la troisième loi de Newton, mais en usant d'un *procédé indépendant*, on n'aurait pas été amené à considérer plus particulièrement le cas de l'interaction entre deux points matériels pour établir la loi de conservation de l'impulsion. Cette loi serait dans ce cas aussi un théorème de la mécanique. Notons cependant que la définition de la masse donnée au § 10 présente l'avantage de ne recourir à aucun critère d'égalité des forces agissantes. En général, il n'est pas facile de définir un tel critère sans s'appuyer sur la troisième loi de Newton.

5. Il arrive parfois que l'interaction de deux corps A et B s'effectue par l'intermédiaire d'un troisième corps C. Nous avons alors affaire à un système de trois corps et on doit faire intervenir l'équation de mouvement du troisième corps. Néanmoins, dans nombre de cas, on raisonne comme si le troisième corps n'existait pas. Il s'agit de voir dans quels cas un tel procédé est valable et n'introduit pas d'erreur. Prenons pour cela l'exemple suivant.

Les corps A et B sont attachés l'un à l'autre par un fil inextensible (fig. 23). Le corps A est soumis à l'action d'une force $\boldsymbol{F}$ faisant

apparaître une tension dans le fil, ce qui fait que les corps A et B se meuvent avec la même accélération a. D'habitude on raisonne ainsi. Désignons par F_1 le module de la force qu'exerce par l'intermédiaire du fil le corps B sur le corps A, et par F_2 le module de la force opposée exercée par le corps A sur le corps B. On a alors

$$m_A a = F - F_1, \quad m_B a = F_2, \tag{12.4}$$

m_A et m_B étant les masses des corps A et B. Selon la troisième loi de Newton, $F_1 = F_2$. En éliminant F_1 et F_2, nous trouvons d'abord l'accélération

$$a = \frac{F}{m_A + m_B},$$

puis les forces F_1 et F_2:

$$F_2 = F_1 = \frac{m_B}{m_A + m_B} F.$$

Ce raisonnement est incomplet et peut conduire à des conclusions erronées. En effet, dans ce raisonnement ne figure pas le troisième corps — le fil qui se meut aussi avec accélération. Les corps A et B n'interagissent pas directement entre eux, mais chacun d'eux interagit avec le *fil*; ces interactions doivent donc être régies par la troisième loi de Newton. Un raisonnement correct doit tenir compte de l'accélération communiquée au fil. On entendra donc par F_1 et F_2 les forces qu'exerce sur les corps A et B le *fil tendu*. Dénotons par F'_1 et F'_2 les forces qu'exercent sur le fil les corps A et B. On doit adjoindre aux équations (12.4) l'équation de mouvement du fil: $ma = F'_1 - F'_2$, m étant la masse du fil. En vertu de l'égalité de l'action et de la réaction $F'_1 = F_1$ et $F'_2 = F_2$, de sorte que

$$ma = F_1 - F_2.$$

En résolvant ensemble cette dernière équation et les équations (12.4), on obtient

$$a = \frac{F}{m_A + m_B + m},$$

$$F_2 = m_B a, \qquad F_1 = (m_B + m)\,a.$$

Maintenant $F_1 \neq F_2$ puisque $m \neq 0$. Si on suppose cependant que la masse du fil est négligeable par rapport à celles des corps A et B, on peut rejeter le terme ma, ce qui conduit à l'égalité approchée $F_1 = F_2$. Dans cette approximation on obtient le même résultat que celui qui correspond au cas d'une interaction *directe* entre les corps A et B. En idéalisant le problème on dit que l'interaction des corps A et B s'effectue par l'intermédiaire d'un corps (le fil) *dénué de masse*. Cette situation se rencontre fréquemment et on ne tient aucun compte des corps dénués de masse. Comme tout corps possède une masse, on a alors affaire à une abstraction idéalisée. Il importe de bien savoir

quels sont les cas qui permettent une telle abstraction et quels sont les cas qui ne la permettent pas. Dans l'exemple ci-dessus, ce serait une erreur grossière d'utiliser l'égalité $F_1 = F_2$ lorsque la masse du fil est comparable aux masses des corps A et B.

§ 13. Interactions à distance et interactions des champs

1. L'interaction des corps peut résulter soit d'un contact *direct* soit de forces *à distance*. Dans le premier cas les corps exercent, l'un sur l'autre, une traction ou une pression. Les forces qui apparaissent lorsque des corps viennent en contact sont dénommées *déformations des corps*. Si les déformations sont petites, leur rôle dans le phénomène étudié peut être peu important; on peut alors les négliger et tenir compte de leur influence éventuelle par introduction des forces *de tension* et *de pression*. Mais si on s'attache à connaître l'origine et le mode d'action des forces, il devient nécessaire d'étudier soigneusement la carte des déformations dont les corps sont le siège. Ainsi, dans l'exemple donné à la fin du paragraphe précédent, le fil agit sur les corps A et B (voir fig. 23) parce qu'il se trouve dans un état de tension. Dans nos calculs nous avons pu négliger cette circonstance parce que nous avons supposé que l'allongement du fil était suffisamment petit pour pouvoir admettre que les vitesses des corps liés A et B étaient égales. Dans ce cas les résultats du calcul ne dépendent pas du degré d'extension du fil. Il n'en aurait pas été ainsi si nous avions remplacé le fil par un ressort de faible dureté. D'autre part, si nous voulons connaître l'origine des forces F_1 et F_2 exercées par le fil sur les corps A et B, il ne peut être question de négliger les déformations du fil qui les relie. Pour savoir pourquoi les corps A et B tendent le fil, il importe d'étudier leurs déformations propres; car ce sont ces déformations qui déterminent l'extension du fil. Faisons tourner une pierre attachée à une corde. La pierre subira inéluctablement des déformations, car s'il n'y en avait pas, la pierre ne pourrait tourner avec accélération. Si nous découpons en pensée une petite partie dans cette pierre, cette partie n'est en mouvement accéléré que parce qu'elle est soumise à l'action des parties de la pierre qui l'environnent. Or cela n'est possible que si la pierre est déformée.

En dehors des forces tirant leur origine de la déformation des corps, on peut avoir affaire à des cas plus compliqués. Par exemple, les forces d'interaction peuvent dépendre non seulement du taux de déformation, mais aussi de la *vitesse de déformation*. Tel est le cas des forces de frottement. Mais ces forces apparaissent elles aussi par contact direct des corps interagissants. Dans tous ces cas on dit que les forces d'interaction sont des *forces de contact*.

2. Outre les forces de contact il existe des forces qui, à l'observation directe, semblent agir *à distance*, sans intervention du milieu intermédiaire. Ces forces subsistent même lorsque les corps en interaction sont séparés par un espace « vide ». Telles sont les forces gravitationnelles et les forces d'interaction des corps électrisés ou aimantés.

Conformément aux conceptions fondamentales de la mécanique de Newton, les forces appliquées à un corps à un instant donné dépendent des positions et des vitesses qu'ont tous les autres corps au même instant. Si les corps en interaction mutuelle ne sont pas en contact, cette assertion présuppose soit une action directe à distance,

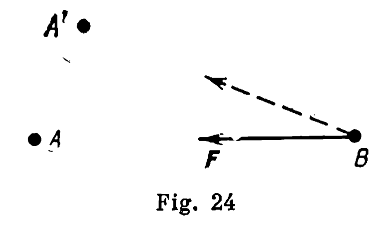


Fig. 24

soit une transmission des interactions à une *vitesse infiniment grande*. La mécanique de Newton admettait, en principe, l'existence d'interactions transmises à une vitesse infiniment grande. Comme cette hypothèse ne peut être réfutée par la logique, la question doit être tranchée par voie expérimentale. Les résultats expérimentaux ont conduit à conclure qu'il n'existe pas d'interactions instantanées et que leurs vitesses de transmission sont limitées (inférieures à la vitesse de la lumière dans le vide). Il s'ensuit que la mécanique classique ne décrit correctement les interactions que lorsque les vitesses de tous les corps du système considéré sont négligeables comparativement à la *vitesse de propagation des interactions* (la vitesse da la lumière). Mais une telle description est incorrecte par principe. Pour illustrer cette assertion, considérons l'application de la troisième loi de Newton. Comme la vitesse de propagation des interactions est finie, cette loi ne peut être toujours vérifiée pour les interactions à distance. Considérons deux points matériels qui se trouvent longtemps au repos dans les positions A et B (fig. 24). Supposons que les forces d'interaction qu'ils échangent alors vérifient la troisième loi de Newton. Si maintenant le premier point matériel se déplace de sa position A vers une nouvelle position A' à une vitesse suffisamment grande pour que, pendant ce déplacement, l'interaction n'ait pas le temps d'arriver jusqu'au point B, la force $\boldsymbol{F}$ demeure inchangée. Cette force sera déterminée non par la nouvelle disposition des points matériels, mais par l'ancienne et sera donc portée par la droite BA et non par la droite BA', comme l'implique la troisième loi de Newton. La loi de Newton se trouve donc en défaut, ce qui entraîne

l'invalidation de la loi mécanique de conservation de l'impulsion. *L'impulsion totale des corps A et B ne peut, en général, se conserver pour une vitesse finie de propagation des interactions.*

3. Un physicien du XIXe siècle aurait affirmé que l'invalidation de la troisième loi de Newton et de la loi de conservation de l'impulsion n'est qu'apparente, puisque les interactions à distance entre les corps ne peuvent être directes. Une interaction directe à distance impliquerait qu'un corps soit susceptible d'exercer une action en un point où il ne se trouve pas et dont il est séparé par un espace vide. Il s'ensuit qu'une telle action serait impossible, toute interaction s'effectuant par l'intermédiaire d'un certain milieu; le corps A agissant sur le milieu ambiant modifierait ses propriétés, faisant apparaître, par exemple, des variations des tensions et des pressions qui se propagent à des vitesses finies. Lorsque ces variations arrivent jusqu'au corps B, elles se manifestent sous forme de forces appliquées au corps B. Et qu'adviendrait-il si les corps interagissants se trouvent séparés par un espace absolument vide? Un physicien du XIXe siècle aurait répondu qu'il n'existe pas d'espace absolument vide puisque tout l'espace est occupé par un certain milieu, l'*éther* par exemple, par l'intermédiaire duquel s'effectueraient les interactions. Ces physiciens du XIXe siècle attribuaient à ce milieu hypothétique des propriétés analogues à celles des corps solides, liquides et gazeux ordinaires. Aussi concluraient-ils que la troisième loi de Newton est toujours vérifiée, à condition de l'appliquer non à des forces d'échange entre des corps A et B séparés (puisque ces forces ne sont qu'apparentes) mais aux forces d'interaction de ces corps avec le milieu intermédiaire. Dans ce cas la loi de conservation de l'impulsion serait toujours vérifiée. On notera cependant que l'impulsion totale devrait comprendre non seulement les impulsions des corps appartenant au système, mais encore l'impulsion du milieu intermédiaire transmettant les interactions.

Les physiciens contemporains raisonnent d'une façon analogue, mais à un plus haut niveau d'abstraction et avec plus de circonspection. Eux aussi récusent l'action directe à distance, nient l'existence d'un milieu intermédiaire transmettant les interactions, mais pensent que toutes les interactions sont assurées par des *champs* — gravitationnels, électromagnétiques, etc. Le corps A suscite l'apparition, dans le milieu ambiant, d'un *champ de forces* qui se manifeste par des forces appliquées au corps B. Le corps B crée lui aussi un champ analogue agissant sur le corps A. La physique moderne n'admet pas l'existence des interactions autres que celles dues aux champs de forces. Les interactions par contact ne sont que des cas particuliers des interactions dues aux champs; il s'agit en l'occurrence de *champs moléculaires*. Les champs moléculaires décroissent rapidement avec la distance et ne se manifestent que lorsque la distance entre les corps en interaction est inférieure à 10^{-7} cm environ. C'est

pour cela que ces *interactions de champs* apparaissent à l'échelle macroscopique comme des « *interactions au contact* ».

4. On peut se demander si la différence entre les conceptions des physiciens des XIXe et XXe siècles ne se réduirait pas à une question de terminologie: avant on parlait de milieu intermédiaire, maintenant on parle de champs. Il s'agit non de terminologie, mais des propriétés physiques réelles du champ et du milieu hypothétique (éther) par l'intermédiaire duquel, selon la physique du XIXe siècle, s'effectueraient les interactions des corps. On attribuait à l'éther des propriétés analogues à celles des corps ordinaires. Aussi pouvait-on parler de l'état de repos ou de mouvement de l'éther, de son élasticité, de sa densité, des forces agissant sur l'éther, du mouvement des corps par rapport à l'éther; on pouvait aussi attacher à l'éther un référentiel, etc. On n'aura pas à invoquer de telles considérations en parlant des champs. La physique moderne considère tout champ comme une réalité objective par l'intermédiaire de laquelle sont transmises les interactions. Un champ peut exister indépendamment des corps qui l'ont généré, par exemple les ondes électromagnétiques générées par les émetteurs. Un radioémetteur peut cesser d'émettre, mais le champ électromagnétique qu'il avait créé continue d'exister et de se propager dans l'espace. Lorsqu'il parvient à un poste récepteur éloigné il lui apporte les informations qui avaient été émises un peu plus tôt par le poste émetteur. Il n'y a pas d'espace absolument vide, car tout espace est rempli de champs. A côté de la substance le champ est *une des formes d'existence de la matière*. Les physiciens du XIXe siècle s'imaginaient que pour comprendre la nature des forces d'interaction il fallait les réduire à des forces mécaniques, par exemple aux forces élastiques, apparaissant lors de la mise en contact des corps. La physique moderne récuse de telles approches.

Les forces élastiques, les forces de pression et de tension, la force musculaire et d'autres forces étaient connues des hommes depuis longtemps. Ces forces leur semblaient simples et bien compréhensibles. Plus tard, lorsque l'homme se trouva en présence des forces électriques et magnétiques, elles lui semblèrent mystérieuses et tout naturellement il chercha à ramener ces forces aux forces connues de tension, de pression et élastiques. En réalité, c'est l'inverse qui est vrai, et ce sont les forces d'interactions électromagnétiques qui sont plus faciles à interpréter que les forces élastiques, par exemple, qui sont plus compliquées. Selon les conceptions modernes, les forces élastiques, les forces de frottement, les forces d'affinité chimique, les forces moléculaires, les forces musculaires et les autres forces usuelles pour l'homme, les forces de la gravitation universelle exceptées, sont des manifestations diverses de forces électromagnétiques. Il ne peut donc être question de chercher à ramener les forces électromagnétiques à des forces élastiques.

Tout champ agit sur les corps avec des forces bien déterminées,

mais il serait illusoire de parler de forces mécaniques appliquées à un champ. Aussi lorsqu'il s'agit d'interaction par champ, la troisième loi de Newton peut se trouver en défaut : le corps subit bien l'action d'une force, mais il n'y a pas de force de réaction appliquée à un autre corps. Néanmoins la loi de conservation de l'impulsion reste valable, car les champs, tout comme les corps, peuvent posséder une impulsion. L'impulsion du champ se manifeste par une variation de l'impulsion du corps ayant absorbé ou émis l'énergie du champ. Par

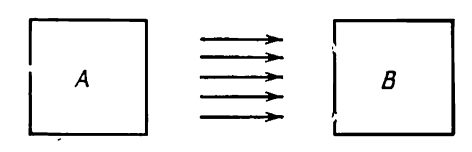


Fig. 25

émission le corps perd une impulsion qui est emportée par le champ et par absorption il acquiert une impulsion due à l'absorption de l'énergie du champ.

5. L'existence d'une impulsion de champ électromagnétique se manifeste, par exemple, dans l'effet de *pression lumineuse*. Les expériences de P. N. Lébédev (1866-1912) ont démontré que la lumière incidente exerce sur le corps irradié une certaine pression. Considérons un système isolé de deux corps A et B (fig. 25). Supposons que le corps A ait émis dans la direction de B un court signal lumineux. Lorsque la lumière émise parvient jusqu'à B, elle en est absorbée et exerce une pression sur ce corps. Le corps B est mis en mouvement et son impulsion varie. La loi de conservation de l'impulsion aurait été violée si la lumière se propageant vers B ne possédait pas d'impulsion. Nous devons donc attribuer à la lumière une impulsion égale à l'impulsion acquise par B après absorption de la lumière. Mais si la lumière possède une impulsion, à l'instant de son émission par le corps A ce dernier doit subir un *recul*. S'il n'en était pas ainsi, la loi de conservation de l'impulsion serait en défaut.

Ces considérations peuvent être exprimées sous forme mathématique, ce qui permet d'en déduire d'importantes relations. Soit un corps B parfaitement absorbant ; faisons tomber normalement à sa surface un faisceau de rayons lumineux parallèles. Les expériences de Lébédev ont montré que la pression π qu'exerçait la lumière sur l'unité de surface du corps B était égale à la densité spatiale d'énergie du faisceau incident. Soient l la longueur et S l'aire de la section droite du faisceau lumineux; on a alors $\pi = \frac{\varepsilon}{Sl}$, ε étant l'énergie du faisceau. La force appliquée au corps B est $F = \pi S = \varepsilon/l$. Cette force agit pendant l'intervalle de temps $\tau = l/c$ (c est la vitesse de la lumière dans le vide) et communique au corps l'impulsion $p =$

$= F\tau = \varepsilon/c$ (cf. § 18). C'est justement l'impulsion de la lumière absorbée par le corps B. Ainsi une lumière se propageant dans une certaine direction possède une impulsion égale à

$$p = \frac{\varepsilon}{c}. \tag{13.1}$$

Comme la lumière se propage à la vitesse c, il est tout indiqué de présenter l'impulsion sous la forme $p = mc$, la quantité m étant assimilée à la *masse de la lumière*. Celle-ci est égale à

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2}. \tag{13.2}$$

La relation (13.2) est établie pour l'énergie de la lumière. La théorie de la relativité démontre que cette relation est valable pour toutes les formes d'énergie. Ainsi généralisée, la relation (13.2) exprime la loi fondamentale d'Einstein sur *l'équivalence de la masse et de l'énergie.*

6. En mécanique nous ne rencontrerons pas de phénomènes faisant intervenir les impulsions de champs. Nous n'étudierons en mécanique que les phénomènes pour lesquels la troisième loi de Newton et la loi de conservation de l'impulsion, dans leur signification newtonnienne, sont vérifiées.

§ 14. Importance des conditions initiales

1. L'équation vectorielle (11.3) exprimant le mouvement d'un point matériel peut être mise sous *forme analytique*:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \tag{14.1}$$

Une seule équation vectorielle (11.3) équivaut à trois équations analytiques (14.1). Ces dernières sont des équations *différentielles* et ne suffisent donc pas à la détermination univoque du mouvement d'un point matériel. Chacune de ces équations est une équation du *deuxième ordre*. (L'ordre d'une équation différentielle est donné par la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation.) Pour décrire univoquement le mouvement du point matériel, il faut adjoindre aux équations du mouvement des données supplémentaires concernant deux constantes vectorielles ou six constantes numériques. Le plus souvent ces données supplémentaires sont les modules du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ et de la vitesse $\boldsymbol{v}$; on peut aussi choisir les valeurs que deux fonctions prennent à l'instant $t = 0$. Ces valeurs portent le nom de *conditions initiales.* Nous allons illustrer ces considérations par l'étude du mouvement libre d'un point matériel dans le champ de la gravité terrestre.

2. Galilée avait établi que *dans le vide tous les corps tombent avec la même accélération.* Pour confirmer qualitativement cette proposi-

tion on peut utiliser un tube de verre de 1 m de long dans lequel on peut faire le vide. Introduisons dans ce tube différents objets: un plomb de chasse, un morceau de bouchon, une plume, des morceaux de papier. Tant que le tube n'est pas évacué, la plume et les morceaux de papier tombent beaucoup plus lentement que les autres corps, ce qui est dû à la résistance de l'air. Mais lorsque le tube est évacué, tous ces corps tombent à la même vitesse. Une preuve plus précise peut être obtenue par observation des oscillations d'un pendule; l'expérience montre que la période d'oscillations du pendule ne dépend pas du matériau avec lequel il a été fabriqué. L'accélération de la pesanteur g varie avec la latitude géographique; elle atteint sa plus grande valeur (9,83 m/s²) aux pôles et sa valeur minimale à l'équateur (9,78 m/s²). La valeur de g diminue avec l'accroissement de l'altitude au-dessus de la surface terrestre de $3\cdot 10^{-6}$ m/s² par mètre. Aux latitudes moyennes, on peut poser qu'au niveau du sol $g = 9{,}80$ m/s². Dans les calculs n'exigeant pas une grande précision on peut poser que l'accélération en chute libre g est constante en tous les points du globe terrestre.

Dans le champ de la gravité terrestre tout corps est soumis à une force $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$. Par suite l'équation du mouvement (11.8) doit s'écrire

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{g}. \qquad (14.2)$$

Nous avons négligé toutes les autres forces et n'avon tenu compte que de la force de pesanteur. Nous négligerons aussi les variations de g avec la latitude et l'altitude, de sorte que l'accélération g sera considérée comme constante. L'équation (14.2) est équivalente aux deux équations:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{g}, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}. \qquad (14.3)$$

Il est facile de s'assurer par une simple dérivation que ces équations sont vérifiées par les solutions suivantes:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}t + \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \qquad (14.4)$$

quelles que soient les constantes vectorielles $\boldsymbol{v}_0$ et $\boldsymbol{r}_0$. La solution (14.4) est *générale*, ce qui signifie que toute solution de l'équation (14.2) peut être présentée sous la forme (14.4). En fait, une solution générale est non pas une solution, mais toute une *famille de solutions* dépendant de deux constantes vectorielles arbitraires $\boldsymbol{r}_0$ et $\boldsymbol{v}_0$. En attribuant à ces constantes des valeurs concrètes, nous tirons de cette famille une *solution particulière* bien déterminée. La constante $\boldsymbol{v}_0$ est la vitesse initiale du point mobile et $\boldsymbol{r}_0$ est le rayon vecteur caractérisant sa position à l'instant initial. Il est facile de s'en assurer en cherchant à l'aide des formules (14.4) les valeurs de $\boldsymbol{v}$

et de r pour $t=0$. On ne peut déterminer les constantes r_0 et v_0 à l'aide de l'équation différentielle du mouvement (14.2), puisque pour toutes les valeurs de ces constantes, les expressions (14.4) sont solutions de (14.2). Les valeurs de r_0 et v_0 sont définies par les *conditions initiales* et les mouvements du point matériel peuvent être très différents selon les valeurs de ces constantes. Le corps peut monter ou descendre suivant une droite, il peut décrire une parabole en passant ou en ne passant pas par le maximum ; le rayon de courbure de la parabole peut être petit ou grand, etc. Autant dire que les mouvements sont très diversifiés. Le grand mérite de Newton a été d'avoir décelé que cette complexité n'était qu'apparente et que tous les mouvements se laissaient décrire par une seule et même formule; si on remplace dans cette formule les positions et les vitesses du mobile par son accélération, la formule ne contiendra plus aucune constante arbitraire.

3. Ces résultats peuvent être généralisés. Supposons que l'on ait affaire à un système de N points matériels en interactions mutuelles et avec des corps extérieurs dont les positions sont supposées connues à tout instant. En écrivant la deuxième loi de Newton pour chacun des points matériels, on obtient un système de N équations vectorielles ou de $3N$ équations différentielles analytiques équivalentes d'ordre 2. On démontre que pour résoudre ces équations de façon univoque il faut se donner $2N$ quantités vectorielles ou $6N$ valeurs numériques caractérisant les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses des N points matériels du système.

PROBLÈME

Un corps est projeté vers le haut sous un angle α par rapport à l'horizontale, à une vitesse initiale v_0. Etudier son mouvement en négligeant la résistance de l'air. Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile, sa portée et la hauteur maximale à laquelle il monte au-dessus de la surface terrestre supposée horizontale. Pour quel angle de tir α la portée sera-t-elle maximale?

S o l u t i o n. Prenons pour origine des coordonnées le point de la surface terrestre d'où est projeté le corps ($r_0 = 0$). La formule (14.4) montre que le mouvement doit s'effectuer dans le plan vertical contenant les vecteurs g et v_0. Prenons-le pour plan des coordonnées XY en dirigeant l'axe X le long de l'horizontale et en le pointant dans le sens du mouvement, et l'axe Y le long de la verticale ascendante. Exprimons l'équation (14.4) en termes de projections sur les axes de coordonnées en remarquant que $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2.$$

En éliminant t entre les deux dernières équations, nous trouverons l'équation de la trajectoire

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

C'est l'équation de la parabole. La portée du mobile est

$$x=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

et la hauteur de montée maximale du mobile est

$$y_{\max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

La portée maximum s'obtient pour $\alpha = 45°$:

$$x_{\max}=\frac{v_0^2}{g}.$$

§ 15. Le principe de relativité de Galilée

1. L'équation exprimant la deuxième loi de Newton

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{15.1}$$

monltre clairement que cette loi ne peut être vérifiée dans n'importe que référentiel. D'une façon générale, l'accélération $\boldsymbol{a}$ doit avoir des valeurs différentes dans différents référentiels en mouvement accéléré les uns par rapport aux autres. Mais la force $\boldsymbol{F}$ ne peut dépendre du référentiel choisi puisqu'elle ne dépend que des positions et des vitesses relatives des points matériels du système puisque, selon la cinématique non relativiste, ces quantités sont indépendantes du référentiel choisi. Il s'ensuit que la deuxième loi de Newton, tout en étant valable dans un certain référentiel, ne saurait l'être dans un autre référentiel en mouvement accéléré par rapport au premier référentiel.

2. Supposons que le référentiel S soit un système inertiel. Prenons un second référentiel S' animé, par rapport au premier, d'un mouvement de translation à une vitesse constante $\boldsymbol{V}$. Supposons connu le mouvement d'un point matériel dans l'un de ces référentiels, le référentiel S par exemple. Comment faire pour calculer le mouvement du même point dans le système S'? Posé en termes pré-relativistes, le problème consiste à établir les formules exprimant à un même instant les coordonnées x', y', z' du mobile dans le système S' en fonction de ses coordonnées x, y, z dans le système S. On peut fixer arbitrairement les origines et les directions des axes de coordonnées dans les deux systèmes S et S'. Si les systèmes de coordonnées sont immobiles l'un par rapport à l'autre et s'ils ne se distinguent que par la position de leurs origines et par les directions de leurs axes de coordonnées, la transformation des coordonnées est un problème purement géométrique dont la solution est connue. Il reste à élucider ce qu'il advient de cette transformation lorsqu'un des référentiels est en mouvement par rapport à l'autre. Posons pour simplifier que les axes X', Y', Z' sont respectivement parallèles aux axes X, Y, Z et qu'à l'instant $t = 0$ l'origine O' coïncide avec

l'origine O. On posera aussi que la vitesse $\boldsymbol{V}$ est parallèle à l'axe X. Dans ces conditions l'axe X' coïncidera toujours avec l'axe X. Ces simplifications n'affectent en rien la généralité des problèmes posés puisqu'on pourra toujours passer aux formules générales par déplacement de l'origine des coordonnées et par rotation des axes de coordonnées.

Soit M la position du point mobile à l'instant t (fig. 26). On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Au bout d'un temps t, l'origine du système S' passera de la position O à la position O' avec $\overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{V}t$. Par suite la relation précédente s'écrira

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t', \quad t = t', \tag{15.2}$$

où $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$, $\boldsymbol{r}' = \overrightarrow{O'M}$ sont les rayons vecteurs du point mobile respectivement dans les systèmes S et S'. Ecrivons (15.2) en termes des projections sur les axes de coordonnées:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{15.3}$$

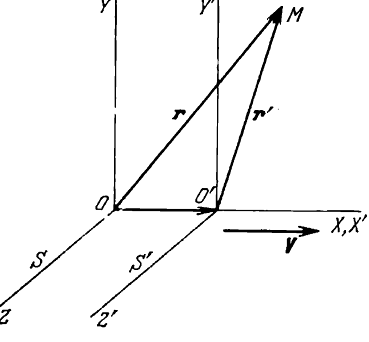


Fig. 26

Les formules de la transformation inverse sont

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t, \quad t' = t, \tag{15.4}$$

et en termes de coordonnées

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{15.5}$$

Ces formules donnent la solution cherchée et portent le nom de *transformations de Galilée*. Nous avons adjoint aux formules de transformation des coordonnées la formule $t' = t$ pour bien souligner qu'en cinématique non relativiste le temps est considéré comme une grandeur absolue qui ne se transforme pas.

Du point de vue du « bon sens » la transformation de Galilée est parfaitement évidente. Son établissement se fonde sur l'hypothèse du caractère absolu des longueurs et du temps, qui est le propre de la cinématique non relativiste. L'équation $t = t'$ reflète parfaitement le caractère absolu du temps. Les autres formules ont été établies en postulant le caractère absolu des longueurs. En effet, les formules (15.2), (15.3) et (15.4) auraient été évidentes par elles-mêmes si les rayons vecteurs $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ et donc toutes les coordonnées x, y, z, x', y', z' étaient mesurés dans un seul et même référentiel, S par exemple. Mais les formules impliquent que les quantités $\boldsymbol{r}, x, y, z$ sont mesurées dans le système S et les quantités $\boldsymbol{r}', x', y', z'$ le sont

dans le système S'. C'est pour cela que l'établissement des formules de transformation de Galilée n'est possible qu'en postulant le caractère absolu des longueurs et du temps. La Physique relativiste récusa le caractère absolu des longueurs et du temps et remplaça la transformation de Galilée par la *transformation de Lorentz*. Nous examinerons cette question dans notre exposé de la théorie de la relativité; ici, il suffit de noter que la transformation de Galilée est un cas limite de la transformation de Lorentz et s'en déduit en posant que la vitesse V est très petite par rapport à la vitesse de la lumière dans le vide. Dans l'étude des « mouvements lents » ($V^2/c^2 \ll \ll 1$) on peut utiliser la transformation de Galilée, mais si le mouvement est « rapide », on ne peut le faire.

3. En dérivant (15.2) par rapport à t, on a

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}+\boldsymbol{V}=\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}+\boldsymbol{V}',$$

soit

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}, \tag{15.6}$$

où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse du mobile dans le référentiel S et $\boldsymbol{v}'$ sa vitesse dans le référentiel S'. Cette formule exprime la *loi non relativiste de la composition des vitesses* (dans le sens physique de ce terme). Cette formule a été établie en supposant que la vitesse $\boldsymbol{V}$ est constante. Néanmoins elle est valable si la vitesse $\boldsymbol{V}$ n'est pas constante; pour nos besoins actuels le cas de $\boldsymbol{V}$ = const suffit.

En supposant $\boldsymbol{V}$ = const, une seconde dérivation conduit au résultat suivant:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt'},$$

soit

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}', \tag{15.7}$$

$\boldsymbol{a}$ étant l'accélération du mobile dans le référentiel S et $\boldsymbol{a}'$ l'accélération de ce même mobile dans le référentiel S'. Ainsi l'accélération du mobile est la même dans les deux référentiels. On dit que l'*accélération est invariante par rapport à la transformation de Galilée.*

Un point matériel libre se meut dans le référentiel S sans accélération puisque, par hypothèse, c'est un référentiel d'inertie. La formule (15.7) montre que son mouvement dans le référentiel S' ne sera pas accéléré non plus. Il en résulte que S' est aussi un référentiel d'inertie. Donc *tout référentiel effectuant un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est lui-même un référentiel d'inertie.* S'il existe un seul référentiel d'inertie, il doit exister un nombre infini de référentiels d'inertie dont les mouvements relatifs sont rectilignes et uniformes. La force n'est fonction que de quantités invariantes: différence des coordonnées de position et différence des vitesses des points matériels en interaction. Par

suite, la force ne change pas lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$. Cela signifie que *la force est invariante par rapport à la transformation de Galilée*. Comme l'accélération est aussi invariante: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$, il découle de (15.1) que

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}'.$$

Cette équation exprime la deuxième loi de Newton dans le référentiel S'. Sa forme est la même que dans le référentiel S. Les équations qui restent inchangées lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre sont dites *équations invariantes*. On peut donc dire que *les équations de la mécanique de Newton sont invariantes vis-à-vis des transformations de Galilée*. Cette proposition exprime le *principe de relativité de Galilée*.

4. Le principe de relativité de Galilée établit l'équivalence absolue de tous les référentiels. Doit-on en inférer qu'un seul et même mouvement apparaît identique dans tous les référentiels? Assurément pas. Le mouvement d'un corps tombant d'un filet à bagage dans un wagon en mouvement uniforme est rectiligne par rapport au wagon. Mais dans un référentiel lié à la voie, il s'effectue suivant une parabole, bien que les lois de la mécanique de Newton soient les mêmes dans les deux référentiels. *Le mouvement apparaît différent tout simplement parce que les lois de Newton s'expriment par des équations différentielles dont la connaissance ne peut suffire à une complète détermination du mouvement.* Pour y arriver il faut connaître de plus les conditions initiales, c'est-à-dire se fixer la position et la vitesse initiales du corps. Dans l'exemple ci-dessus les équations différentielles du mouvement de l'objet sont les mêmes dans les deux référentiels, mais les conditions initiales y sont différentes. A l'intérieur du wagon, le corps tombe avec une vitesse initiale nulle, tandis que dans le référentiel lié à la voie, ce même corps possède une vitesse initiale non nulle dirigée suivant l'horizontale. C'est pourquoi le mouvement est différent suivant le référentiel adopté. Pour que le mouvement soit le même, il faut créer dans les deux référentiels des conditions initiales identiques. C'est ce que nous allons expliquer maintenant.

Supposons que l'on dispose de deux systèmes fermés de corps, plus précisément deux grands laboratoires se déplaçant l'un par rapport à l'autre d'un mouvement rectiligne et uniforme. Chacun de ces laboratoires peut servir de système de référence. Admettons que ces systèmes soient inertiels. Supposons encore que les deux laboratoires soient parfaitement identiques, c'est-à-dire qu'ils renferment les mêmes ensembles d'objets et soient aménagés de la même façon. Les phénomènes qui se produisent dans ces laboratoires sont parfaitement indépendants de ce qui se passe dans le monde ambiant, puisque nous avons postulé que c'étaient des systèmes fermés. Le principe de relativité de Galilée affirme que *les lois fondamentales*

de la mécanique régissant les changements de l'état de mouvement des corps sont les mêmes dans les deux laboratoires. Par lois fondamentales de la mécanique on entend les lois susceptibles de décrire univoquement le mouvement du système d'après les conditions initiales dans lesquelles se trouvait ce système, i.e. d'après les valeurs des coordonnées et des vitesses de tous ses points matériels à un instant quelconque qu'on adopte comme temps zéro. Si on crée dans les deux laboratoires exactement les mêmes conditions initiales pour tous les corps, sans exception aucune, tous les mouvements ultérieurs évolueront exactement de la même façon dans les deux laboratoires. C'est ainsi qu'interprétait le principe de la relativité Galilée lui-même qui écrivait :

« Isolez-vous avec un camarade dans un grand local sous le pont d'un gros navire et lachez-y des mouches, des papillons et autres petits insectes volants. Que s'y trouve aussi un grand aquarium avec de petits poissons vivants. Suspendez-y au plafon un seau plein d'eau d'où l'eau s'écoulerait goutte à goutte par un trou pour tomber dans une cruche à gorge étroite se trouvant sous le seau. Tant que le navire reste immobile, observez attentivement comment tous les insectes volent indifféremment en tous sens à la même vitesse. Vous constaterez que les poissons nagent en tous sens et que les gouttes d'eau s'engouffrent toutes dans la cruche. Si vous jetez à votre camarade un objet quelconque, vous le lancerez avec la même force dans un sens ou dans l'autre, à condition que la distance soit la même. Si vous sautez à pieds joints, la longueur de votre saut sera la même dans toutes les directions. Observez tous ces faits bien attentivement même si vous êtes absolument certain que tant que le navire est immobile, tout se passe comme on s'y attendait. Mettez maintenant le navire en marche à une vitesse quelconque. Si le mouvement du navire est uniforme et s'il n'y a pas de roulis, vous n'observerez aucun changement dans les faits précités et aucune observation ne vous permettra de dire si le navire est immobile ou en mouvement. »

Ensuite Galilée décrit le déroulement des mêmes événements observés sur le navire en mouvement. Il remarque notamment que si on jette un même objet, avec la même force (on devrait dire à la même vitesse par rapport au navire) d'abord vers l'avant, puis vers l'arrière du navire, la distance que parcourra cet objet par rapport au sol du navire sera la même dans les deux cas, bien que pendant le temps que l'objet se trouve en l'air le sol se déplace à l'encontre de cet objet d'une distance appréciable. Il formule des remarques analogues au sujet des autres événements observés. Notant l'indépendance de tous les phénomènes, observés dans un local fermé sous le pont du navire, de son mouvement uniforme, Galilée arrive à la conclusion suivante :

« La raison de la concordance de tous les effets observés tient à ce que le mouvement du navire entraîne tous les objets qui s'y trouvent, l'air y compris. C'est pour cela que j'avais bien précisé que vous deviez vous trouver sous le pont du navire ».

5. Il serait incorrect d'énoncer le principe de la relativité de la manière suivante : « Soient deux référentiels d'inertie. Si on place à un certain instant *tous les corps et objets de l'Univers, sans en excepter un seul*, dans des conditions identiques, à partir de ce moment tous les phénomènes évolueront de la même manière dans les deux référentiels ». Une telle proposition est complètement dénuée de sens et ne reflète aucune loi de la physique. En effet, si les deux référentiels

sont en mouvement, l'un par rapport à l'autre, il est impossible qu'*absolument tous les corps de l'Univers* se trouvent à un instant donné exactement dans les mêmes conditions, puisque les vitesses des mêmes corps seront différentes dans les deux référentiels. Aussi la prémisse de la formulation donnée ci-dessus (qui est incorrecte) ne peut être satisfaite puisqu'elle implique la totalité des corps de l'Univers. Pris dans sa vraie signification, le principe de la relativité n'est pas une loi physique ordinaire, car il concerne non pas les phénomènes de tout l'Univers, mais seulement ceux qui se produisent dans des *systèmes fermés de dimensions finies* ou dans des *systèmes se trouvant dans des conditions extérieures immuables.* Un exemple en est fourni par le local clos à bord du navire invoqué par Galilée. Le local devait être clos, sinon les phénomènes qui y étaient observés auraient dépendu de la vitesse du vent variant avec la vitesse du navire. Mais un tel local n'est cependant pas un système vraiment fermé puisque les corps qui s'y trouvent sont soumis à des influences extérieures, notamment au champ de la gravité terrestre. Mais comme ce champ est le même, que le navire soit immobile ou en marche, le local clos avec tous ses objets se comporte comme un système fermé, bien que soumis au champ de pesanteur extérieur.

Parfois on formule le principe de la relativité de la manière suivante: « Les lois de la Nature sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie ». Le défaut de cette formulation est que l'« identité des lois de la Nature » peut être interprétée dans le sens d'une évolution identique d'un phénomène donné dans n'importe quel référentiel. Or nous venons de montrer qu'il n'en est pas ainsi : le mode d'évolution des phénomènes physiques est déterminé non seulement par les lois fondamentales de la Nature, mais également par les valeurs des paramètres caractérisant les conditions initiales du système. Afin d'éviter tout malentendu, il serait préférable de parler non pas des « lois de la Nature » mais, comme le suggéra Einstein, de « lois *régissant les changements d'état des systèmes physiques* ». L'énoncé du principe de la relativité est alors:

« *Les lois de la Nature régissant les changements d'état des systèmes physiques ne dépendent pas du référentiel d'inertie auquel se rapportent ces changements* ».

Cette dernière formulation du principe est d'une portée plus générale que celle où on invoquait l'invariance des lois de Newton par rapport à la transformation de Galilée, et ce, pour les raisons suivantes. Premièrement, il s'agit ici de l'invariance de *toutes les lois physiques* et pas seulement des lois de la mécanique (lois de Newton). Deuxièmement, on ne précise pas la forme des transformations des coordonnées et du temps par rapport auxquelles sont invariantes les lois de la Nature. Ces transformations doivent être déduites du *principe de relativité* et de certaines autres considérations. C'est en procédant ainsi que l'on avait établi, en théorie de la relativité, les

transformations de Lorentz mentionnées ci-dessus. Les lois de la Nature sont invariantes vis-à-vis des transformations de Lorentz. Ainsi formulé, le principe de relativité est appelé *principe de relativité d'Einstein*. On l'étudiera dans la suite de notre Cours.

§ 16. Additivité et loi de conservation de la masse

1. Soient deux corps de masses m_1 et m_2 qui après collision s'unissent pour former un seul corps composé. Un exemple en est l'agglomération de deux boules de glaise résultant de leur choc. Un autre exemple est fourni par les *réactions chimiques* ou *nucléaires* dans lesquelles deux atomes ou noyaux s'unissent pour former une nouvelle molécule ou un nouveau noyau. Le problème consiste à calculer la masse m du corps composé, connaissant les masses m_1 et m_2 des corps initiaux. A première vue, la réponse paraît toute simple : $m = m_1 + m_2$. Bien que cette réponse soit dans une certaine mesure correcte, il importe de la justifier. Pour ce faire, nous ferons appel au principe de relativité de Galilée.

Etudions le processus de collision dans un référentiel d'inertie S. Dénotons par $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ les vitesses des corps avant leur collision, et par $\mathbf{v}$ la vitesse du corps composé après collision. En vertu de la loi de conservation de l'impulsion

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}. \qquad (16.1)$$

Considérons maintenant ce même processus de collision dans un autre référentiel S' animé d'un mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse $\mathbf{V}$ par rapport au référentiel S. Conformément au principe de relativité, la loi de conservation de l'impulsion est également vérifiée pour le système S' et s'écrit sous la forme

$$m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2 = m\mathbf{v}'. \qquad (16.2)$$

Les deux systèmes inertiels étant tout à fait équivalents, les masses de tous les corps sont les mêmes dans les référentiels S' et S. En physique non relativiste les vitesses $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$ et $\mathbf{v}'$ dans le référentiel S' sont liées aux vitesses correspondantes dans le référentiel S par les relations

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

Par suite (16.2) se transforme en

$$m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}) = m(\mathbf{v} - \mathbf{V}),$$

et compte tenu de (16.1), en

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V} = m\mathbf{V}.$$

On en tire

$$m = m_1 + m_2. \qquad (16.3)$$

Comme on s'y attendait, *la masse du corps composé est égale à la somme des masses des corps initiaux. Cette propriété s'appelle additivité de la masse.*

Cette démonstration peut être généralisée. Il n'est pas nécessaire de supposer que seuls deux corps entrent en collision et s'unissent pour former un corps unique. On peut fort bien considérer une réaction chimique à laquelle participent plusieurs molécules ou atomes qui après réaction donnent naissance à plusieurs autres molécules ou atomes. Reprenant le raisonnement qui a conduit à la relation (16.3), nous arriverons à un énoncé plus général : *la somme des masses des substances avant réaction est égale à la somme des masses des substances après réaction.* C'est la *loi de conservation de la matière* ou plus exactement la *loi de conservation de la masse.* Comme la masse est proportionnelle au poids, cette loi s'appelait jadis *loi de conservation du poids.* Cette dénomination était usuelle dans les anciennes publications, mais elle est malencontreuse et n'est plus utilisée. Or, aussi bien Lomonossov (1711-1765) que Lavoisier (1743-1794), qui ont introduit dans la science la loi de conservation de la matière, découvrirent cette loi en se fondant sur les pesées des produits des réactions chimiques. Ce qu'ils démontrèrent ainsi mérite d'être appelé « loi de conservation du poids ».

2. Newton définissait la masse d'un corps comme la *quantité de substance* qu'il renferme. Une telle définition exige que soit d'abord précisé ce qu'il faut entendre par « quantité de substance ». Newton ne fit que remplacer le terme « quantité de substance » par un nouveau terme « masse », sans se soucier de leur donner des définitions précises. Mais la définition newtonnienne de la masse sous-entend implicitement l'idée de l'additivité des masses. Si on réunit en un seul deux poids ayant chacun une masse de 1 kg, on conçoit intuitivement que l'on obtient un poids d'une masse de 2 kg, puisque la « quantité de substance » y est deux fois plus grande que dans l'un des poids initiaux. L'intuition a toujours été une source de création scientifique, mais en science elle ne peut se substituer à une démonstration. Toute démonstration doit s'appuyer sur des déterminations précises et sur les lois de la Nature. Nous avons donné au § 10 une définition précise de la notion de masse. Mais partant de cette définition, il n'est nullement évident que la masse soit une grandeur additive. Il est d'autant plus important de le démontrer que *l'additivité et la loi de conservation de la masse ne sont vérifiées que de façon approchée.* Effectivement nous avons déduit cette loi du principe de relativité de Galilée. Or *ce principe n'est pas une loi naturelle parfaitement précise, n'étant qu'un cas limite approché du principe de relativité d'Einstein.* Il s'ensuit que notre raisonnement doit être révisé et fondé non plus sur le principe de Galilée mais sur celui d'Einstein. Nous le ferons plus tard dans l'étude de la théorie de la relativité. Pour l'instant nous nous contenterons d'en énoncer le principal ré-

sultat qui est d'importance fondamentale. *La loi de conservation de la masse dans son ancienne formulation — la somme des masses avant réaction est égale à somme des masses après réaction — s'est avérée inexacte. Les lois de conservation de la masse et de l'énergie, que la physique prérelativiste considérait comme deux lois de la Nature précises et indépendantes, ont perdu leur indépendance en physique relativiste qui les a réunies en une seule loi de conservation de la masse et de l'énergie. Toute forme d'énergie possède une masse égale au quotient de la quantité d'énergie par le carré de la vitesse de la lumière dans le vide.* C'est la conclusion à laquelle nous sommes parvenus dans le cas particulier de l'énergie radiante (fin du § 13). Dans le bilan de la masse on doit faire figurer non seulement la masse de la substance, mais encore la masse de l'énergie émise ou absorbée. Dans tout processus naturel la somme de la masse de la substance et de l'énergie reste constante.

Le fait que dans l'étude des réactions chimiques on n'a pas décelé de variations de masse des substances tient à la petitesse de l'effet énergétique qui les accompagne. La variation de masse résultant de la libération ou de l'absorption d'énergie y est tellement petite qu'elle se trouve au-delà de la précision des mesures. Ainsi, dans la combustion de 12 g de carbone avec formation de bioxyde de carbone (CO_2), il se dégage 99 kcal de chaleur. En ergs cela représente $\varepsilon = 99 \cdot 4{,}19 \cdot 10^{10} \approx 4 \cdot 10^{12}$ erg. D'après la formule (13.2), à cette énergie correspond une masse

$$\Delta m \approx \frac{4 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{20}} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ g}.$$

La masse totale des substances engagées dans la réaction est $m = 12 + 32 = 44$ g. Ainsi

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-8}}{44} \approx 10^{-10}.$$

Pour pouvoir déceler par pesée la variation de masse des substances accompagnant leur réaction chimique, il faudrait que la précision relative des mesures soit au moins égale à 10^{-10}.

Le rendement énergétique des réactions nucléaires est plusieurs millions de fois plus grand que celui des réactions chimiques. La relation (13.2) entre la masse et l'énergie a été confirmée expérimentalement sur les réactions nucléaires. Cette relation joue un rôle exceptionnel en physique nucléaire et en physique des particules élémentaires.

§ 17. Les lois de frottement

1. En mécanique on a généralement affaire aux forces de la gravitation universelle, aux forces élastiques et aux forces de frottement. Parfois on inclut dans la mécanique des problèmes sur le

mouvement des corps portant des charges électriques dans des champs électriques et magnétiques. On doit alors adjoindre aux forces précitées les forces électromagnétiques qui sont les forces auxquelles sont soumises les particules chargées se trouvant dans des champs électriques et magnétiques. Nous étudierons en détail les forces de la gravitation universelle et les forces élastiques dans les chapitres ultérieurs de ce volume. Ici nous nous proposons d'examiner brièvement les *forces de frottement*. Notons que la mécanique ne s'occupe pas de la nature des forces de frottement, question qui est traitée dans d'autres parties de la physique. Aussi laisserons-nous de côté la question de l'origine des forces de frottement et n'exposerons que les lois empiriques régissant le frottement. Il est bien évident que quelle que soit l'importance de cette question, elle ne présente pas le même caractère fondamental que les lois de Newton par exemple. D'ailleurs les lois de frottement sont des lois approchées et souvent même ce sont des approximations assez grossières.

Les forces élastiques, de gravitation, de répulsion et d'attraction mutuelle des corps chargés ne dépendent que de la *configuration des corps*, donc de leurs positions relatives et nullement de leurs vitesses. Les forces de frottement dépendent, elles, non seulement de la configuration des corps, mais encore des *vitesses relatives des corps* entre lesquels elles s'exercent.

Les forces de frottement peuvent s'exercer entre des corps en contact, ou entre différentes parties d'un corps lorsqu'ils sont en mouvement relatif ou dans un état de repos relatif. Le frottement est dit *extérieur* s'il se manifeste entre des corps différents en contact mutuel, mais ne constituant pas un corps unique (par exemple, frottement entre un barreau et un plan incliné sur lequel il repose ou glisse). Lorsque le frottement se manifeste entre différentes parties d'un seul et même corps, par exemple entre différentes couches d'un liquide ou d'un gaz, dont les vitesses varient continuellement d'une couche à une autre, on dit qu'on a affaire à un frottement *intérieur*. Cette subdivision en frottement extérieur et intérieur est d'ailleurs toute conventionnelle. Si on réunit les corps en contact en un seul système mécanique, le frottement qui était d'abord considéré comme extérieur devient intérieur. La force de frottement appliquée à un corps solide en mouvement dans un fluide (liquide ou gaz) est la force de frottement intérieur dans le fluide et non une force de frottement extérieur s'exerçant entre le solide et le liquide. L'expérience montre en effet que les couches du liquide ou du gaz les plus proches de la surface du solide y adhèrent et se déplacent avec lui ; le frottement s'exerce entre différentes couches adjacentes du fluide.

On dit qu'un frottement est *sec* lorsqu'il s'exerce entre deux surfaces solides entre lesquelles il n'y a pas de couche liquide ou gazeuse intermédiaire (absence de lubrifiant). Lorsque ces corps sont en mouvement relatif, on distingue le *frottement de glissement* et le

frottement de roulement. Le frottement qui s'exerce entre la surface d'un corps solide et un milieu liquide ou gazeux dans lequel il se meut, ainsi que le frottement s'exerçant entre les différentes couches d'un fluide, est dit *frottement fluide* ou *visqueux*.

2. Examinons d'abord les lois du frottement sec. Un tel frottement apparaît aussi bien lorsqu'un corps glisse sur la surface d'un second corps que lorsqu'on cherche à le mettre en mouvement. Dans ce dernier cas on dit qu'il s'agit d'un *frottement de repos* (*frottement statique*) ou d'un *frottement d'adhésion*. L'existence d'un frottement de repos est caractéristique du frottement sec. Dans un sens plus général et sans tenir compte des caractéristiques des corps en présence, on dira que le frottement est *sec* si les forces de frottement ne

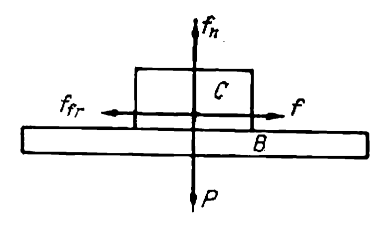


Fig. 27

s'annulent pas avec les vitesses relatives des corps en contact. Dans le cas contraire le frottement est dit *fluide*. Posons un barreau pesant sur la surface horizontale d'une table (fig. 27). Au repos le poids P du barreau est équilibré par la force de réaction normale f_n de la table ($P = f_n$). Appliquons au barreau une force de traction horizontale f se trouvant dans le plan vertical passant par le centre de masse du barreau aussi près que possible de la surface de la table afin d'éviter le basculement du barreau à l'instant de son démarrage. L'expérience montre que tant que la force f n'excédera pas une valeur limite f_0 ($f < f_0$) le barreau ne démarrera pas. On en conclut que la table exerce sur le barreau une force f_{fr} égale et opposée à f et la compensant exactement. C'est justement la force de frottement au repos. La même force de frottement mais dirigée en sens inverse est exercée par le barreau sur la table. La force de frottement au repos prend automatiquement une valeur égale et opposée à la force extérieure f. Sa valeur maximale est f_0.

Supposons maintenant que le barreau glisse sur la table à une vitesse v. Tant que son mouvement est uniforme, la force agissante f est encore compensée par la force de frottement f_{fr}. Si le système est déséquilibré, le mouvement du barreau sera accéléré. Dans les deux cas la force de frottement f_{fr} est fonction de la vitesse v. La figure 28 illustre l'allure de cette dépendance. La force de frottement appli-

quée au barreau est toujours orientée dans le sens contraire à son mouvement. Sur la figure ce résultat est reflété par le fait que les signes de f_{fr} et de v sont toujours opposés. Pour $v = 0$ le graphique dégénère en un segment de droite verticale, ce qui exprime que la force de frottement au repos peut avoir toute valeur comprise entre $-f_0$ et $+f_0$. Lorsque croît la valeur absolue de la vitesse, la valeur absolue de la force de frottement diminue d'abord jusqu'au minimum, puis commence à croître. Toute la courbe de cette variation est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées : $f(+v) = -f(-v)$. Les expériences de Coulomb (1736-1806) ont montré que la valeur de

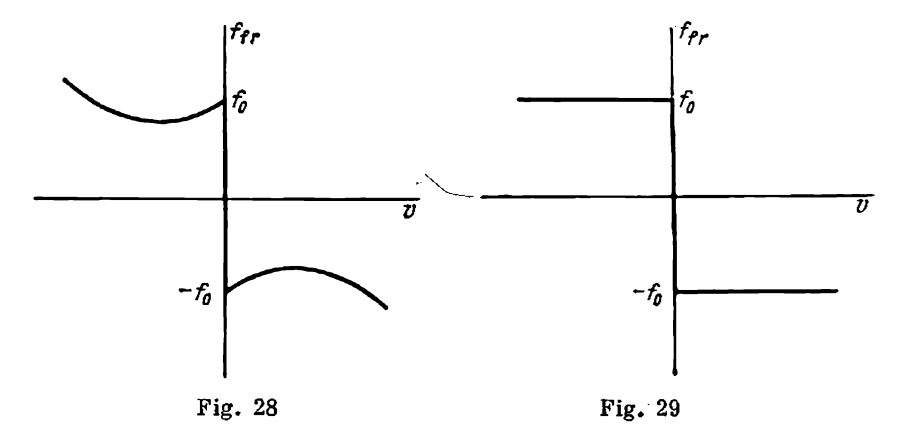


Fig. 28 Fig. 29

la force de frottement f_{fr} ne dépend pas de l'aire des surfaces de contact et est proportionnelle à la force de réaction normale f_n des corps. On peut donc écrire

$$f_{fr} = \mu f_n. \tag{17.1}$$

La constante μ porte le nom de *coefficient de frottement*; sa valeur dépend de la nature et de l'état des surfaces en contact. Lorsqu'un corps glisse vraiment sur la surface d'un autre corps, μ s'appelle *coefficient de frottement dynamique*. Si les deux corps sont immobiles l'un par rapport à l'autre, on l'appellera *coefficient de frottement statique*. Dans ce dernier cas on admet que dans la formule ci-dessus f_{fr} prend la valeur f_0 qui est la plus grande valeur que peut assumer la force de frottement au repos. Conformément à la figure 28, le coefficient de frottement μ doit en général dépendre de la vitesse v. D'ailleurs comme l'avait déjà noté Coulomb, cette dépendance est faible, de sorte que lors d'études approchées on peut poser que le coefficient μ est indépendant de la vitesse. La courbe de la figure 28 dégénère alors en segments de droite de la figure 29. Même dans ce cas idéalisé la force de frottement dépend de la vitesse v puisqu'elle change de signe lorsque s'inverse le sens du mouvement et pour

$v = 0$ elle a une valeur indéterminée. Dans tous les problèmes de frottement donnés à la fin du paragraphe, on suppose que μ ne dépend pas de v.

L'indépendance de la force de frottement au repos avec l'aire de la surface de contact peut être illustrée par l'expérience suivante. On placera un barreau en forme de parallélépipède régulier (une brique par exemple) et on mettra ses différentes faces successivement en contact avec un plan incliné. En augmentant progressivement l'angle d'inclinaison du plan incliné, on s'aperçoit aussitôt que le barreau commence à glisser pour un certain angle qui reste le même quelle que soit la face du barreau en contact avec le plan incliné.

3. En cas de frottement sec, un corps restera au repos même lorsqu'on lui applique une force de traction. Tant que la force appliquée f est inférieure à la valeur maximale de la force de frottement de

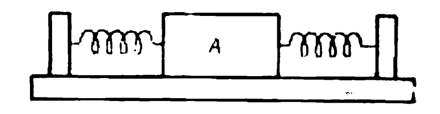


Fig. 30

repos f_0, le corps reste immobile. C'est cette propriété du frottement sec qui détermine l'*effet de « stagnation »*. Considérons un corps A se trouvant sur une surface horizontale (fig. 30). Il se trouve en équilibre tant que les deux ressorts qui lui sont attachés sont distendus ou également tendus. La force appliquée au corps A est alors nulle. Déplaçons-le de sa position d'équilibre dans l'un ou l'autre sens; si la force f qui lui est appliquée par les ressorts tendus est inférieure à f_0, le corps A restera en équilibre dans sa nouvelle position. Un corps qui repose sur une surface horizontale n'a pas de position d'équilibre bien déterminée. Mais il existe une région à l'intérieur de laquelle on peut déplacer le corps A sans que l'état d'équilibre soit rompu. Cette région porte le nom de *région (zone) de « stagnation »*. Le frottement sec qui se manifeste, par exemple, dans les paliers des instruments de mesure à aiguille, limite leur sensibilité. L'existence d'une zone de « stagnation » rend indéterminée la position d'équilibre où vient se fixer l'aiguille de l'appareil de mesure, et limite sa précision.

4. Dans nombre de cas les forces de frottement s'avèrent utiles. Ainsi une voiture automobile ne se meut que grâce aux forces de frottement s'exerçant entre les pneus et le revêtement routier. Les forces de frottement déterminent également la marche des trains. Les forces de frottement qui s'exercent entre les courroies et les poulies d'entraînement permettent de transmettre le mouvement d'un volant à un autre. On pourrait multiplier les exemples du rôle utile des forces de frottement, mais bien souvent elles sont nuisibles.

Telles sont les forces de frottement s'exerçant dans les machines, par exemple entre les axes et les douilles, car elles entraînent leur usure prématurée. On doit donc chercher à les contrecarrer. Pour cela on utilise des *lubrifiants*. On réduit encore plus efficacement les forces de frottement en remplaçant le frottement de glissement par le *frottement de roulement* (roulements à billes). On désigne par frottement de roulement, le frottement qui apparaît lorsqu'un corps sphérique ou cylindrique roule sans glissement sur une surface plane ou courbe. Formellement le frottement de roulement obéit aux mêmes lois que le frottement de glissement, mais son coefficient de frottement est beaucoup plus petit que celui du glissement. Le procédé le plus efficace pour réduire les forces de frottement consiste à créer un « coussin d'air » entre les surfaces en regard ; ce procédé est de plus en plus appliqué.

5. Nous avons déjà indiqué qu'à la différence des forces de frottement sec, les forces de frottement fluide ou visqueux s'annulent avec les vitesses relatives des couches adjacentes du milieu. La question du frottement visqueux sera étudiée de plus près dans les chapitres consacrés à la mécanique des fluides et à la théorie cinétique des gaz. Ici nous ne donnerons qu'un bref aperçu des forces de frottement fluide se manifestant lorsqu'un solide se déplace au sein d'un fluide. En plus des forces provenant du frottement interne, la surface du mobile est soumise à des forces de pression normale de la part du milieu ambiant. La résultante de toutes les pressions normales a une composante orientée dans le sens contraire au déplacement du mobile. Cette composante porte le nom de *résistance du milieu*. Aux grandes vitesses elle devient plusieurs fois plus grande que les forces de résistance dues au frottement visqueux proprement dit. Pour étudier le mouvement des corps dans les milieux visqueux il est commode de considérer ces deux forces ensemble. La force totale orientée dans le sens contraire à la vitesse du mobile sera conventionnellement appelée *force de frottement* $\mathbf{f}_{\text{fr}}$.

Aux faibles vitesses cette force $\mathbf{f}_{\text{fr}}$ est proportionnelle à la vitesse du corps

$$\mathbf{f}_{\text{fr}} = -k_1 \mathbf{v}. \tag{17.2}$$

A mesure que la vitesse augmente la corrélation devient plus compliquée, puis la force de frottement croît approximativement comme le carré de la vitesse :

$$\mathbf{f}_{\text{fr}} = -k_2 v^2 \frac{\mathbf{v}}{v} = -k_2 v \mathbf{v}. \tag{17.3}$$

Les « coefficients de frottement » k_1 et k_2 ainsi que le domaine de vitesses où s'effectue le passage de la loi linéaire (17.2) à la loi quadratique (17.3) dépendent fortement de la forme et des dimensions du mobile, de sa direction, de l'état de sa surface et des propriétés

du milieu ambiant. En augmentant la superficie et en modifiant comme il convient la forme du corps, on arrive à augmenter fortement les valeurs des coefficients k_1 et k_2. C'est la base du principe de fonctionnement du parachute (voir problème 8 à la fin de ce paragraphe).

PROBLÈMES

1. Il existe un procédé commode de mesure du coefficient de frottement au repos consistant à placer le corps sur un plan incliné et à déterminer l'angle d'inclinaison α minimal pour lequel le corps commence à glisser. Trouver la relation entre l'angle α et le coefficient de frottement μ.

Réponse. $\mu = \operatorname{tg} \alpha$.

2. Un seul homme peut, bien que lentement, haler une lourde péniche. Mais il ne pourrait le faire avec un corps lourd reposant sur le sol, même si le poids de ce corps est notablement plus petit que celui de la péniche. Expliquez ces résultats.

3. Les bras écartés en position horizontale, placez une tige qui reposera par ses extrémités sur les index de vos deux mains. Rapprochez maintenant vos mains l'une de l'autre. Déterminez en quel point de la tige se rejoignent vos index? Ecartez à nouveau vos bras, la tige restant horizontale. Où se trouvera un de vos index, lorsque l'autre sera près d'une des extrémités de la tige? Effectuez cette expérience et expliquez le résultat obtenu.

4. Un chauffeur traversant dans le brouillard une place horizontale voit soudain devant lui, à faible distance, un mur perpendiculaire à la direction dans laquelle il roule. Que doit-il faire pour éviter l'accident, freiner ou braquer le volant?

Réponse. Il vaut mieux freiner.

5. Une auto roule à vitesse constante sur une route plate mais sinueuse. Assimilant la route à une sinusoïde, calculer la vitesse maximale à laquelle l'auto ne risque pas de déraper.

Solution. Lorsqu'une automobile se meut sur une trajectoire courbe à une vitesse de module constant, son accélération a ne peut être que normale à la trajectoire. Cette accélération est produite par la force de frottement de repos s'exerçant entre les pneus et le revêtement routier: $f_{fr} = ma$. Si la vitesse de l'automobile dépasse une certaine limite, la force de frottement maximale f_0 ne suffira plus pour maintenir le véhicule sur la trajectoire imposée, là où sa courbure est grande ($f_0 < ma$). Le véhicule commencera alors à glisser le long de la normale à la trajectoire. Conformément à la figure 28, la force de frottement de glissement diminuera, ce qui amplifiera le glissement latéral du véhicule par rapport à la route. C'est ainsi que se produit le dérapage. Pour un mouvement s'effectuant le long d'une sinusoïde l'accélération normale atteint sa valeur maximale aux sommets de la sinusoïde où la courbure est la plus grande. Si $y = y(x)$ est l'équation de la sinusoïde, on a à ses sommets $y' = 0$ et le rayon de courbure se laisse calculer en ces points par la formule $\frac{1}{R} = |y''|$. En écrivant l'équation de la sinusoïde sous la forme $y = A \sin 2\pi \frac{x}{l}$ (l'amplitude A et la période spatiale l étant constantes) il est facile de trouver la condition requise pour éviter le dérapage:

$$v < \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu g}{A}},$$

où μ est le coefficient de frottement et g l'accélération de la pesanteur.

6. Résoudre le même problème en supposant que l'automobile se meut à vitesse constante sur une trajectoire ellipsoïdale d'axes A et B. Déterminer en

quels points de la trajectoire l'accélération normale sera maximale et minimale.

R é p o n s e. $a_{\max} = \frac{Av^2}{B^2}$, $a_{\min} = \frac{Bv^2}{A^2}$. Il n'y aura pas de dérapage pour $v < B\sqrt{\frac{\mu g}{A}}$.

7. En posant que les ressorts représentés sur la figure 30 sont identiques, déterminer la zone de « stagnation » du corps A.

R é p o n s e. Le centre de la base du corps A peut être en équilibre en tout point d'une zone dont les limites sont:

$$-\frac{\mu P}{2k} < x < +\frac{\mu P}{2k},$$

où P est le poids du corps, μ le coefficient de frottement, k le coefficient d'élasticité du ressort. On fait coïncider l'origine des coordonnées avec le centre de la zone de « stagnation ».

8. Un parachutiste effectue un saut en parachute à ouverture retardée. En posant que la masse m du parachutiste est égale à 70 kg, calculer sa vitesse de chute uniforme avec parachute fermé et avec parachute ouvert. Pour un corps humain en chute libre, le coefficient k_2 est de l'ordre de 2 g/cm. Avec un parachute ouvert ce coefficient augmente de près de 100 fois, ce qui fait approximativement 200 g/cm.

S o l u t i o n. La vitesse de chute uniforme est déterminée par l'égalité entre le poids de l'homme $P = mg$ et la force de frottement dans l'air:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k_2}} \approx \begin{cases} 60 \text{ m/s sans parachute;} \\ 6 \text{ m/s avec parachute ouvert.} \end{cases}$$

CHAPITRE III

CONSÉQUENCES ET APPLICATIONS DES LOIS DE NEWTON

§ 18. Impulsion de la force et variation de la quantité de mouvement

1. Nous avons montré au § 12 que la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement $\boldsymbol{p}$ d'un système de points matériels était définie par l'équation

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}^{(e)}, \tag{18.1}$$

où $\boldsymbol{F}^{(e)}$ est la somme géométrique de toutes les forces extérieures appliquées au système. En vertu de la troisième loi de Newton les forces intérieures ne figurent pas dans cette équation. Lorsque le système se réduit à un seul point matériel, l'équation (18.1) se réduit à l'équation exprimant la deuxième loi de Newton. Si la force $\boldsymbol{F}^{(e)}$ est invariable, il suit de (18.1)

$$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{F}^{(e)}(t-t_0), \tag{18.2}$$

où les vecteurs $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{p}_0$ sont les quantités de mouvement du système aux instants t et t_0 respectivement.

Le produit de la force invariable $\boldsymbol{F}^{(e)}$ par la durée de son action s'appelle *impulsion de la force* pendant cette durée. On ne doit pas confondre cette notion avec la quantité $\boldsymbol{p}=m_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+m_n\boldsymbol{v}_n$, que nous connaissons déjà et qui s'appelle *impulsion du système de points matériels* ou *impulsion du corps*. On ne doit craindre aucune confusion, car nous n'utiliserons jamais le terme « impulsion » tout court, l'associant constamment aux mots « force » ou « corps » (ou « point matériel », ou encore « système de points matériels »). Aussi saura-t-on toujours de quelle impulsion il s'agit. Pour éviter tout risque de malentendu dans les cas où l'on devra simultanément faire appel à la notion d'impulsion de la force, nous désignerons les grandeurs $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{p}=m_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+m_n\boldsymbol{v}_n$ par le terme « *quantité de mouvement* ». Remarquons que nous n'aurons pas à utiliser souvent la notion d'impulsion de la force.

2. La relation (18.2) signifie que l'accroissement de la quantité de mouvement d'un corps ou d'un système de corps est égal à l'impulsion de la résultante de toutes les forces extérieures appliquées au

système. Ce résultat établi pour une force $F^{(e)}$ invariable peut être généralisé au cas d'une force variable dans le temps. Subdivisons pour ce faire l'intervalle de temps $t - t_0$ en un grand nombre d'intervalles de temps plus courts: $(t_1 - t_0)$, $(t_2 - t_1)$, . . ., $(t - t_{n-1})$ (fig. 31). Nous supposerons que ces intervalles de temps sont suffisamment petits pour que la force $F^{(e)}$ puisse être considérée à peu

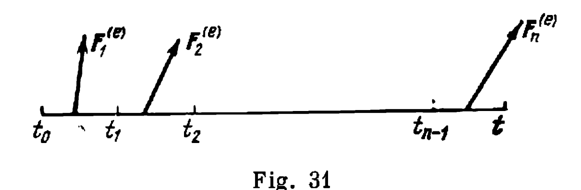


Fig. 31

près constante dans chaque intervalle de temps. Nous dénoterons les valeurs correspondantes de la force $F^{(e)}$ par les symboles $F_1^{(e)}$, ..., $F_n^{(e)}$. En vertu de (18.2) nous pouvons écrire en approximation

$$p_1 - p_0 = F_1^{(e)}(t_1 - t_0),$$
$$p_2 - p_1 = F_2^{(e)}(t_2 - t_1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p - p_{n-1} = F_n^{(e)}(t - t_{n-1}),$$

où p_1, p_2, . . ., p_{n-1} sont les quantités de mouvement du système aux instants t_1, t_2, . . ., t_{n-1} respectivement. En sommant ces égalités, on obtient

$$p - p_0 = \sum_i F_i^{(e)} \Delta t_i,$$

où on a utilisé la désignation standard $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Cette dernière égalité est approchée et incomplètement déterminée, puisque les valeurs $F_1^{(e)}$, $F_2^{(e)}$, . . ., $F_n^{(e)}$ de la force extérieure ne sont pas exactement fixées. Cependant cette indétermination peut être levée et l'égalité ci-dessus devient exacte, lorsqu'on passe à la limite en faisant tendre vers zéro le plus grand des intervalles de temps Δt_i, la durée $t - t_0$ étant maintenue constante. Après le passage à la limite, on obtient

$$p - p_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i F_i^{(e)} \Delta t_i.$$

On sait que la limite figurant dans le second membre de l'égalité porte le nom d'intégrale définie de la fonction $F^{(e)}(t)$ entre les limites t_0 et t et est désignée par

$$\int_{t_0}^{t} F^{(e)}(\tau)\, d\tau \equiv \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i F_i^{(e)} \Delta t_i.$$

La *variable d'intégration* de la fonction $F^{(e)}$ est dénotée par τ pour ne pas la confondre avec la limite supérieure d'intégration t. La valeur d'une intégrale définie ne dépend évidemment pas de la lettre utilisée pour désigner la variable d'intégration ; pour un intégrant donné elle ne dépend que des valeurs des limites d'intégration t_0 et t.

Ainsi l'équation généralisée de (18.2) est

$$p - p_0 = \int_{t_0}^{t} F^{(e)}(\tau)\, d\tau. \tag{18.3}$$

L'intégrale se trouvant dans le second membre de cette égalité porte le nom d'*impulsion de la force* $F^{(e)}$ *se manifestant pendant l'intervalle de temps compris entre* t_0 *et* t. Ainsi, dans le cas d'une force appliquée variant dans le temps, *l'accroissement de la quantité de mouvement d'un système de points matériels est égal à l'impulsion de la somme géométrique de toutes les forces extérieures auxquelles est soumis le système.*

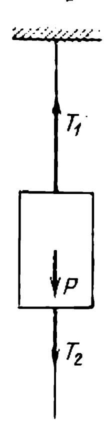


Fig. 32

Comme nous l'avons déjà indiqué, les forces intérieures n'influent pas sur la variation de la quantité de mouvement totale du système, car vérifiant le principe d'égalité de l'action et de la réaction, elles n'interviennent que deux par deux.

3. Nous voyons ainsi que la quantité de mouvement que peut acquérir un corps dépend non seulement de la force appliquée, mais aussi de la durée de son action sur le corps. Pour illustrer cette proposition considérons une expérience simple. Une masse pesante (fig. 32) est suspendue à un fil, et un second fil identique est attaché à la partie inférieure de la masse. Si on exerce un lent effort de traction sur le fil inférieur, c'est le fil du haut qui se rompt. La raison en est évidente. Comme la masse pesante se trouve pratiquement au repos durant toute l'expérience, la différence de tension $T_1 - T_2$ du fil doit équilibrer le poids P de la charge: $T_1 - T_2 = P$. Il en résulte que $T_1 > T_2$. Désignons par T_0 la tension maximale à laquelle on peut soumettre le fil sans qu'il se rompe. Lorsque nous augmentons lentement l'effort de traction exercé sur le fil inférieur, à un certain moment T_1 atteint la valeur limite T_0, mais T_2 est encore inférieur à T_0. Il s'ensuit que le fil inférieur reste intact, tandis que le fil supérieur se rompt. Mais si on applique au fil inférieur une traction brusque, c'est le fil inférieur qui se rompt, le fil supérieur restant intact. En effet, pour provoquer la rupture du fil supérieur on doit assurer d'abord son extension d'une certaine longueur. Or, pour ce faire, on doit mettre en mouvement le poids qui y est suspendu ; or le déplacement du poids ne peut être instantané, même si on le soumet à une force de traction importante. Lors d'une traction rapide on n'arrive pas à communiquer au poids suspendu un déplacement suffisant et le fil inférieur se trouve soumis à une tension plus grande que T_0 ; le fil supérieur n'ayant pas eu le temps de s'allonger, sa tension reste pratiquement invariable et c'est le fil inférieur qui se rompt.

Considérons une seconde expérience illustrant le rôle de la durée d'action d'une force. Découpons dans une feuille de papier à dessin deux bagues identiques de diamètre extérieur $\sim$20 cm et de diamètre intérieur $\sim$15 cm. Suspendons ces bagues sur deux tiges métalliques horizontales fixées dans des supports et introduisons dans les bagues une planche de bois quadrangulaire de $\sim$1 m

de long et d'une section droite de ~2 à 3 cm². La distance entre les bagues doit être à peine plus petite que la longueur de la planche. Si on exerce sur le milieu de la planche une pression croissant lentement, l'une des bagues (ou les deux) se déchire et la planche reste intacte. Si par contre on frappe fortement au milieu de la planche avec une lourde tige métallique, c'est la planche qui se casse et non les bagues. Ce qui est surprenant, ce n'est pas que la planche se soit cassée — elle l'aurait été en tout autre circonstance — mais que les bagues en papier soient restées intactes.

§ 19. Théorème du mouvement du centre de masse

Comme en mécanique non relativiste la masse est indépendante de la vitesse, la quantité de mouvement $\boldsymbol{p} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots$ d'un système peut être exprimée en fonction de la vitesse de son *centre de masse*. On appelle *centre de masse* ou *centre d'inertie d'un système* un point imaginaire dont le rayon vecteur $\boldsymbol{R}$ s'exprime en fonction des rayons vecteurs $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots$ des points matériels par la formule

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots}{m}, \tag{19.1}$$

où $m = m_1 + m_2 + \ldots$ est la masse totale du système. Nous dénoterons ce point par C.

En dérivant l'expression (19.1) par rapport au temps et en multipliant par m on a

$$m\dot{\boldsymbol{R}} = m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 + \ldots,$$

soit

$$m\boldsymbol{V} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots,$$

où $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{R}}$ est la vitesse du centre de masse du système. On obtient donc

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V}. \tag{19.2}$$

En portant (19.2) dans (18.1) on obtient

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)}. \tag{19.3}$$

Il s'ensuit que *le centre de masse d'un système se meut comme un point matériel dont la masse serait égale à la masse totale du système, la force active déterminant son mouvement étant la somme géométrique de toutes les forces extérieures appliquées au système.* Cette proposition porte le nom de *théorème du mouvement du centre de masse.*

Un exemple illustrant bien ce résultat est donné par un obus décrivant une parabole dans le vide. Si à un certain moment l'obus explose, ses fragments se disperseront dans toutes les directions sous l'action des forces intérieures. Mais le centre de masse des éclats et des gaz formés par la déflagration continuera son mouvement le long

d'une trajectoire parabolique comme si la déflagration ne s'était pas produite.

Le centre de masse d'un système coïncide avec son *centre de gravité*, qui est le point d'application de toutes les forces parallèles agissant sur les points matériels d'un système se trouvant dans un champ de gravitation homogène. Aussi à la place des termes « centre de masse » ou « centre d'inertie », on peut utiliser aussi le terme « centre de gravité ». Cependant, dans le théorème du mouvement du centre de masse, il n'est pas recommandé d'utiliser le terme « centre de gravité » puisque la gravitation n'y est pas directement impliquée. Le terme « centre de gravité » est en usage dans les cours de mécanique rationnelle, surtout dans les cours anciens. En physique ce terme est obsolète.

Dans le cas d'un système fermé $\boldsymbol{F}^{(e)} = 0$ et l'équation (19.3) se réduit à $\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = 0$, d'où $\boldsymbol{V} =$ const. Le centre de masse d'un système fermé effectue un mouvement rectiligne et uniforme. Le théorème reste valable en mécanique relativiste (voir ci-dessous le problème 5).

PROBLÈMES

1. Au fond d'une petite éprouvette scellée, suspendue à un fil au-dessus d'une table, se trouve une mouche dont la masse est égale à celle de l'éprouvette; la distance entre le fond de l'éprouvette et la surface de la table est égale à la longueur l de l'éprouvette. On brûle le fil, durant la chute de l'éprouvette la mouche vole du fond vers le haut de l'éprouvette. Calculer le temps nécessaire pour que le bas de l'éprouvette touche la table.

Réponse. $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$.

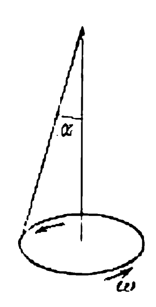


Fig. 33

2. Une bague métallique suspendue par un fil à l'axe d'une machine centrifuge (fig. 33) tourne uniformément à une vitesse angulaire ω. La direction du fil forme un angle α avec l'axe. Déterminer la distance entre le centre de la bague et l'axe de rotation.

Réponse. $x = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{\omega^2}$.

3. Une tige homogène de longueur l tourne uniformément autour d'un axe libre perpendiculaire à la tige et passant par son centre. Quelle doit être la vitesse angulaire maximale ω pour que la tige ne soit pas rompue par les tensions internes résultant de sa rotation? La force de tension maximale rapportée à l'unité d'aire de section droite de la tige est égale à T. La densité spatiale du matériau de la tige est égale à ρ (voir aussi § 75, problème 4).

Réponse. $\rho l^2 \omega^2 < 8T$.

4. Soit un coin trirectangle ABC de masse M placé sur un plan horizontal absolument lisse. Disposons sur la face BC un coin semblable BED mais plus petit, de masse m (fig. 34). Calculer à quelle distance x se déplacera vers la gauche le coin ABC lorsque le coin BED glissera le long du plan incliné BC jusqu'à ce que le point D coïncide avec le point C. Les longueurs AC et BE sont respectivement égales à a et b.

Réponse. $x = \frac{m}{M+m}(a-b)$.

5. Dans le cas d'un système constitué de particules se déplaçant à des vitesses relativistes, le rayon vecteur de son centre de masse est donné par les mêmes formules qu'en mécanique non relativiste, soit

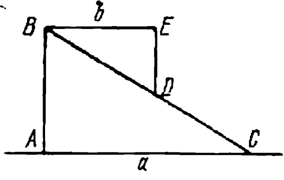


Fig. 34

$$R = \sum m_i r_i / \sum m_i.$$

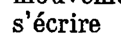
On doit cependant entendre par m_i les *masses relativistes* des particules. On doit également tenir compte des *masses de champs* assurant les interactions entre les particules. Lors des interactions les particules d'une espèce donnée peuvent disparaître et les particules d'une espèce différente peuvent apparaître. *La position du centre de masse ainsi défini change lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre, mobile par rapport au premier.* Si les particules sont *ponctuelles* et n'interagissent entre elles qu'à *l'instant de leurs chocs*, la totalité de la masse est concentrée dans les particules et non dans les champs. Démontrer, en effectuant une dérivation directe, que dans ce cas la vitesse du centre de masse du système isolé ne varie pas dans le temps et s'exprime par la formule

$$\dot{R} = \sum m_i \dot{r}_i / \sum m_i = p / \sum m_i,$$

où p est l'impulsion du système, la sommation étant étendue à toutes les particules appartenant au système. A titre d'exemple on peut citer le cas d'un noyau radioactif animé d'un mouvement uniforme et se désintégrant en vol; le centre de masse de ses fragments poursuivra exactement le même mouvement uniforme qu'avait le noyau, donc à la même vitesse et dans la même direction.

§ 20. La masse réduite

1. Considérons un système fermé constitué par deux points matériels de masses m_1 et m_2 en interaction (fig. 35). Les équations de mouvement de ces points peuvent s'écrire



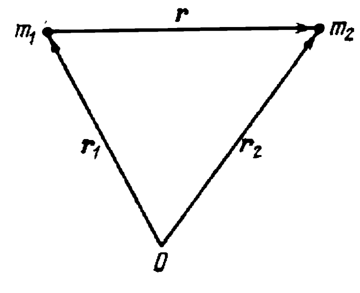


Fig. 35

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = \frac{F_1}{m_1}, \quad \frac{d^2 r_2}{dt^2} = \frac{F_2}{m_2}. \quad (20.1)$$

En vertu de la troisième loi de Newton on doit avoir $F_1 = -F_2$. En formant la différence de ces équations on trouve

$$\frac{d^2}{dt^2}(r_2 - r_1) = \frac{F_2}{m_2} - \frac{F_1}{m_1} = F_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

Cette équation décrit le mouvement d'un point matériel par rapport à l'autre, car la différence $r = r_2 - r_1$ est le rayon-vecteur reliant ces points. Ce rayon-vecteur définit univoquement la position du second point par rapport au premier. Introduisons la notation

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (20.2)$$

L'équation précédente s'écrira alors

$$\mu \frac{d^2r}{dt^2} = F_2. \tag{20.3}$$

Formellement (20.3) est analogue à l'expression de la deuxième loi de Newton. Le rôle de la force active y est assumé par la force F_2 agissant sur le second point matériel et celui de la masse par la quantité auxiliaire μ dite *masse réduite.*

Il est bien évident que la seule équation (20.3) ne peut être équivalente aux deux équations initiales (20.1). On peut cependant y arriver en associant à l équation (20.3) l équation exprimant le théorème du mouvement du centre de masse du système. Dans le cas considéré ce théorème ne fait qu'affirmer que le centre de masse du système est en mouvement rectiligne et uniforme. Aussi le problème du mouvement de deux points matériels se laisse décomposer en deux problèmes indépendants: 1) celui du calcul du mouvement uniforme du centre de masse et 2) celui du calcul du mouvement relatif d'un point matériel par rapport à l'autre. Tout formellement, ce dernier problème se ramène à l étude du mouvement d un point matériel de masse μ dans le champ de forces de l'autre point. C'est ce qui justifie l'introduction de la notion de masse réduite. Cette notion n'a aucune autre signification physique que celle d'une notation plus commode.

2. Pour illustrer l'intérêt que présente l'introduction de la notion de masse réduite, considérons l'exemple suivant. Soit une planète décrivant autour du Soleil une orbite circulaire de rayon r. Conformément à la loi de la gravitation universelle, elle est soumise à la force $F = G\frac{Mm}{r^2}$, M étant la masse du Soleil, m celle de la planète et G la constante de gravitation. Comme la force pointe vers le Soleil, sous forme vectorielle cette équation s'écrit: $F = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{r}{r} = -G\frac{Mm}{r^3}r$. Introduisons la masse réduite et écrivons l'équation du mouvement de la planète par rapport au Soleil:

$$\mu\ddot{r} = \frac{Mm}{M+m}\ddot{r} = F = -G\frac{Mm}{r^3}r.$$

On en tire

$$\ddot{r} = -G\frac{M+m}{r^3}r.$$

Comme la révolution de la planète est uniforme, on a $\ddot{r} = -\omega^2 r$ et par suite

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\frac{M+m}{r^3},$$

ω étant la vitesse angulaire et T la période de révolution de la planète. Si la masse de la planète est négligeable par rapport à celle du Soleil, la vitesse angu

laire ω_1 et sa période de révolution T_1 seront données par l'équation

$$\omega_1^2 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = G\,\frac{M}{r^3}.$$

Si la masse de la planète était égale à la masse du Soleil (étoile double), l'expression donnant la vitesse angulaire ω_2 et la période de révolution T_2 aurait été

$$\omega_2^2 = \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = G\,\frac{2M}{r^3}.$$

Pour une même distance r, on aurait

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 2.$$

Autrement dit, dans ce dernier cas, la période de révolution serait $\sqrt{2}$ fois plus courte que dans le premier cas.

§ 21. Mouvement des corps de masse variable. Propulsion par réaction

1. Le terme « *masse variable* » que nous utiliserons dans ce paragraphe a une signification toute différente de celle qu'on lui attribue en théorie de la relativité. En théorie de la relativité la masse du mobile ne varie que du fait de la variation de sa vitesse, le mobile ne perd et n'acquiert aucune substance. Ici, par contre, il s'agira d'un mouvement lent de corps dont la masse varie du fait d'une *perte* ou d'un *gain de substance*. Donnons quelques exemples: la masse d'une arroseuse diminue en cours de route par éjection d'eau; la masse d'une goutte de pluie croît durant sa chute dans une atmosphère sursaturée de vapeurs d'eau; la masse d'une fusée ou d'un avion à réaction diminue de fait de l'éjection des gaz formés par combustion du carburant. Dans tous ces cas il s'agit du mouvement de corps de masse variable. Les équations du mouvement des corps de masse variable ne présentent aucune différence de principe par rapport aux lois de Newton, n'en étant que des corollaires. Elles sont cependant fort importantes du fait de leurs applications à la technique des fusées.

2. Pour établir l'équation du mouvement d'un point matériel de masse variable, nous considérerons le mouvement d'une fusée. Le principe de fonctionnement d'une fusée est fort simple. Toute fusée éjecte une substance (du gaz) animée d'une grande vitesse; le corps de la fusée applique donc aux gaz une force importante; la substance éjectée agit avec une force de même module mais de sens opposé sur la fusée et lui communique donc une accélération opposée à la sienne. S'il n'y avait aucune force extérieure, la fusée et la substance qu'elle éjecte constitueraient un système fermé dont l'impulsion est constante dans le temps. C'est le fondement de la théorie du mouvement d'une fusée. Il est utile, toutefois, de généraliser le

problème au cas d'une fusée soumise à l'action de forces extérieures. Ces forces extérieures peuvent être la pesanteur terrestre, l'attraction gravitationnelle par le Soleil et les planètes, ainsi que la force de résistance qu'oppose au mouvement de la fusée le milieu dans lequel elle se meut.

Soient $m(t)$ la masse de la fusée à un instant t et $v(t)$ sa vitesse à ce même instant. A cet instant la quantité de mouvement de la fusée sera égale à mv. Au bout d'un temps dt la masse et la vitesse de la fusée prendront des accroissements dm et dv (la valeur de dm étant négative!), et la quantité de mouvement de la fusée deviendra égale à $(m + dm)(v + dv)$. On doit y ajouter encore la quantité de mouvement des gaz formés pendant le temps dt. Elle est égale à $dm_{gaz}v_{gaz}$, où dm_{gaz} est la masse des gaz formés dans le temps dt et v_{gaz} est leur vitesse. En déduisant de la quantité de mouvement totale à l'instant $t + dt$ la quantité de mouvement du système à l'instant t on trouve l'accroissement de cette grandeur dans le temps dt. Selon un théorème connu cet accroissement est égal à $\boldsymbol{F}\,dt$, où $\boldsymbol{F}$ est la somme géométrique de toutes les forces extérieures appliquées à la fusée. On écrira donc

$$(m + dm)(v + dv) + dm_{gaz}v_{gaz} - mv = \boldsymbol{F}\,dt.$$

Faisons tendre vers zéro l'intervalle de temps dt et les accroissements dm et dv, afin de trouver les rapports limites ou les dérivées $\frac{dm}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$. Ouvrons les parenthèses et rejetons le produit $dm \cdot dv$ en tant qu'infiniment petit d'ordre supérieur. Par suite de la conservation de la masse $dm + dm_{gaz} = 0$, nous pouvons exclure de nos calculs la masse dm_{gaz}. La différence $v_{rel} = v_{gaz} - v$ représente la vitesse d'éjection du gaz par rapport à la fusée; nous l'appellerons *vitesse du jet gazeux*. Compte tenu de ces observations la relation précédente devient

$$m\,dv = v_{rel}dm + \boldsymbol{F}\,dt. \tag{21.1}$$

En divisant les deux membres par dt on obtient

$$m\frac{dv}{dt} = v_{rel}\frac{dm}{dt} + \boldsymbol{F}. \tag{21.2}$$

D'après la forme l'équation (21.2) coïncide avec l'équation exprimant la deuxième loi de Newton, avec une seule différence: la masse m n'est pas constante, mais varie avec le temps par suite d'une perte de substance. A la force extérieure $\boldsymbol{F}$ vient s'ajouter le terme supplémentaire $v_{rel}\frac{dm}{dt}$, qui peut être interprété comme une *force de réaction*, donc la force appliquée à la fusée par le gaz qu'elle éjecte. L'équation (21.2) fut établie par le physicien russe I. V. Mechtcherski (1859-1935). Cette équation, ainsi que l'équation (21.1) qui lui est équiva-

lente, s'appelle *équation de Mechtcherski* ou *équation du mouvement d'un point de masse variable.*

3. Appliquons l'équation (21.1) à l'étude du mouvement d'une fusée soustraite à l'action de toute force extérieure. En posant $\boldsymbol{F} = 0$, on obtient

$$m\,d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{rel}}\,dm.$$

Supposons que la fusée effectue un mouvement rectiligne dans une direction opposée à celle de la vitesse $\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$ du jet de gaz. Si le sens de vol est pris comme direction positive, la projection du vecteur $\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$ sur cette direction sera négative et égale à $-v_{\text{rel}}$. C'est pour cela que la forme scalaire de l'équation ci-dessus est $m\,dv = -v_{\text{rel}}dm$, et avec la convention adoptée la quantité v_{rel} est essentiellement positive. Par suite

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{v_{\text{rel}}}{m}. \tag{21.3}$$

La vitesse v_{rel} du jet de gaz peut varier durant le vol, mais le cas le plus simple et le plus important est celui où elle reste constante. En posant $v_{\text{rel}} = \text{const}$, on n'affecte en rien l'essentiel du phénomène et on simplifie grandement la résolution de l'équation (21.3). On a en effet

$$v = -v_{\text{rel}} \int \frac{dm}{m} = -v_{\text{rel}} \ln m + C.$$

La valeur de la constante d'intégration C est déterminée par les conditions initiales. Si on suppose qu'à l'instant initial la vitesse de la fusée est nulle et sa masse égale à m_0, l'équation précédente devient $0 = -v_{\text{rel}} \ln m_0 + C$, d'où $C = v_{\text{rel}} \ln m_0$. Il s'ensuit que

$$v = v_{\text{rel}} \ln \frac{m_0}{m}, \tag{21.4}$$

soit

$$\frac{m_0}{m} = e^{v/v_{\text{rel}}}. \tag{21.5}$$

Cette dernière relation s'appelle *équation de Tsiolkovski* (1857-1935), qui l'avait établie pour le mouvement non relativiste, lorsque les vitesses v et v_{rel} sont petites comparativement à la vitesse c de la lumière dans le vide. Mais il est facile de la généraliser au cas des mouvements relativistes. Si m_0 et m désignent les masses au repos de la fusée à des instants différents, il apparaît sans calcul aucun que la formule (21.5) donne une valeur trop faible du rapport $\frac{m_0}{m}$, puisque la masse relativiste croît avec la vitesse. Donc avec une consommation égale de carburant une fusée « relativiste » aurait une vitesse plus petite que celle donnée par la formule non relati-

viste (21.5). La formule relativiste s'écrit

$$\frac{m_0}{m}=\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{c}{2v_{\text{rel}}}} \qquad (21.6)$$

(voir problème 2 à la fin du § 22). Dans cette formule $\beta\equiv\frac{v}{c}$. Pour $\beta\ll 1$ et $\frac{v_{\text{rel}}}{c}\ll 1$, on retrouve la formule (21.5). En effet, on a alors

$$\frac{1+\beta}{1-\beta}\approx 1+2\beta,$$

et par suite

$$\frac{m_0}{m}\approx(1+2\beta)^{\frac{c}{2v}\frac{v}{v_{\text{rel}}}}=(1+2\beta)^{\frac{1}{2\beta}\frac{v}{v_{\text{rel}}}}.$$

Comme la quantité 2β est petite, on a

$$(1+2\beta)^{1/(2\beta)}\approx\lim_{\beta\to 0}(1+2\beta)^{1/(2\beta)}=e.$$

En définitive pour une faible vitesse on a

$$\frac{m_0}{m}=e^{v/v_{\text{rel}}}$$

qui n'est autre que la formule de Tsiolkovski.

4. La formule de Tsiolkovski permet de calculer la quantité de carburant nécessaire pour communiquer à la fusée une vitesse donnée v. Dans le tableau 1

Tableau 1

v/v_{rel}	m_0/m	v/v_{rel}	m_0/m	v/v_{rel}	m_0/m	v/v_{rel}	m_0/m
1	2,72	4	54,6	7	1100	10	22 000
2	7,39	5	148	8	2980	11	59 900
3	20,1	6	403	9	8100	12	163 000

on indique les valeurs du rapport de la masse initiale m_0 de la fusée à sa masse finale m pour différentes valeurs du rapport v/v_{rel}. Ces résultats ont été obtenus à l'aide de la formule non relativiste (21.5).

Supposons, par exemple, que la fusée doit atteindre la *première vitesse cosmique*, i.e. la vitesse qu'elle doit posséder pour pouvoir décrire autour de la Terre une trajectoire circulaire. Cette vitesse est approximativement égale à $v=8$ km/s. Si la vitesse du jet gazeux $v_{\text{rel}}=1$ km/s, le rapport m_0/m sera égal à 2980. Pratiquement toute la masse de la fusée serait donc constituée par le carburant. Si $v_{\text{rel}}=2$ km/s, le rapport $m_0/m=54{,}6$ et pour $v_{\text{rel}}=4$ km/s, $m_0/m=7{,}39$, etc. Il apparaît ainsi que la masse utile relative de la fusée croît rapidement avec la vitesse v_{rel} du jet gazeux. Les gaz éjectés par la fusée doivent

avoir une masse moléculaire aussi petite que possible, et être portés à une température aussi haute que possible. On démontre en physique moléculaire que la vitesse v_{rel} d'un jet de gaz est proportionnelle à $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, où T est la température absolue du gaz et μ son poids moléculaire.

Dans les fusées modernes propulsées par un carburant chimique la vitesse du jet gazeux varie de 1 à plusieurs kilomètres par seconde. Elle ne dépasse probablement pas 4 km/s. Il convient donc d'évaluer les possibilités de voyages interplanétaires et interstellaires à bord de fusées propulsées par carburant chimique. La vitesse minimale que doit posséder une fusée par rapport à la Terre pour s'échapper de la zone d'action du champ de la gravité terrestre porte le nom de *deuxième vitesse cosmique* et est égale à 11,2 km/s. C'est la vitesse que doit posséder une fusée destinée à atteindre la Lune. On appelle *troisième vitesse cosmique* la vitesse que doit avoir une fusée par rapport à la Terre pour pouvoir s'échapper du système solaire; cette vitesse dépend de la direction de la vitesse initiale de la fusée. Sa valeur minimale correspond au lancement de la fusée suivant une tangente à l'orbite terrestre dans le sens de la rotation orbitale de la Terre. Cette vitesse est d'environ 16,7 km/s (cf. § 61). Une vitesse de cet ordre est nécessaire pour pouvoir entreprendre un voyage interplanétaire. Supposons que $v_{\text{rel}} = 4$ km/s; pour atteindre la deuxième vitesse cosmique le rapport m_0/m doit être égal à $m_0/m = e^{11,2/4} \approx 17$ et pour atteindre la troisième vitesse cosmique $m_0/m = e^{16,7/4} \approx 64$. Ces deux rapports paraissent acceptables, mais on ne doit pas oublier que la fusée doit avoir une réserve de carburant suffisante pour revenir sur Terre, ainsi que pour effectuer des corrections de sa trajectoire et assurer son freinage lors de l'atterrissage. Par suite le rapport m_0/m (m est la masse de la fusée revenue sur Terre) doit être notablement plus grand. En admettant que le champ de gravitation et la dimension de la seconde planète soient comparables à ceux de la Terre, pour le voyage aller on doit avoir $m_0/m' \approx 60$ (m' est la masse de la fusée ayant atterri sur la seconde planète) et pour le voyage retour $m'/m \approx 60$, de sorte que $m_0/m \approx 3600$. Ainsi pour qu'un voyage interplanétaire soit possible, la réserve de carburant doit être plusieurs milliers de fois plus grande que la masse du vaisseau spatial. Un tel voyage comporte de très grosses difficultés qui paraissent cependant surmontables.

Mais pour les voyages interstellaires le carburant chimique est absolument inutilisable. Supposons, par exemple, que $v_{\text{rel}} = 10$ km/s, ce qui est au-dessus des possibilités qu'offrent les carburants chimiques. (En admettant que le jet gazeux soit constitué par la substance la plus légère de toutes — l'hydrogène atomique, sa température devrait atteindre 5000 °C pour arriver à la vitesse postulée.) Les distances aux étoiles sont mesurées en *années-lumière*, puisque

Tableau 2

$\beta = \frac{v}{c}$	m_0/m	
	d'après (21.6)	d'après (21.5)
0,001	$1,0690 \cdot 10^{13}$	$1,0686 \cdot 10^{13}$
0,01	$1,963 \cdot 10^{130}$	$1,942 \cdot 10^{130}$
0,1	$1,79 \cdot 10^{1307}$	$7,64 \cdot 10^{1302}$
0,25	$5,37 \cdot 10^{3327}$	$1,62 \cdot 10^{3257}$
1/3	$2,84 \cdot 10^{4515}$	$8,81 \cdot 10^{4342}$

pour arriver jusqu'à nous la lumière de l'étoile la plus proche met environ 4 années-lumière. Ainsi même pour atteindre l'étoile la plus proche on doit disposer de vaisseaux spatiaux ayant une vitesse proche de la vitesse de la lumière c. On a indiqué dans le tableau 2 les valeurs du rapport m_0/m pour différentes valeurs de β calculées à l'aide de la formule relativiste (21.6) et de la formule de Tsiolkovski (21.5) dans l'hypothèse que $v_{rel} = 10$ km/s. Ce tableau montre encore à quel moment les effets relativistes deviennent essentiels et quand la formule (21.5) devient inutilisable.

Supposons que la vitesse v du vaisseau spatial doive être égale au quart de la vitesse de la lumière ($\beta = 0,25$). On doit alors avoir $m_0/m \approx 5 \cdot 10^{3327}$. A chaque tonne de charge utile revient $5 \cdot 10^{3327}$ tonnes de carburant! Si la masse utile était de $m = 20$ t $= 2 \cdot 10^7$ g, la masse initiale du vaisseau aurait dû être égale à $m_0 \approx 10^{3329}$ t $= 10^{3335}$ g! Généralement lorsqu'on a affaire à de très grandes quantités on les qualifie d'*astronomiques*. Dans notre cas ce qualificatif ne convient pas, car il s'agit de quantités incomparablement plus grandes. A titre d'exemple voici les masses de quelques particules et d'objets astronomiques:

Masse de l'électron	$9,11 \cdot 10^{-28}$ g
Masse du proton	$1,67 \cdot 10^{-24}$ g
Masse de la Terre	$5,98 \cdot 10^{27}$ g
Masse du Soleil	$1,99 \cdot 10^{33}$ g
Masse de la Galaxie	$3 \cdot 10^{44}$ g
Masse de la Métagalaxie	10^{56} g.

On désigne par *Métagalaxie* la partie de l'*Univers* observable à l'aide des plus puissants télescopes modernes. La masse de la Métagalaxie est 10^{83} fois plus grande que celle de l'électron. La masse de notre fantastique vaisseau spatial serait 10^{3329} fois plus grande que celle de la Métagalaxie! Ces nombres dépassent l'imagination. A l'échelle de notre vaisseau spatial la Métagalaxie paraîtrait infiniment plus petite que l'électron à l'échelle de la Métagalaxie.

Il est évidemment absurde de parler du mouvement d'un tel vaisseau gigantesque par rapport à la Métagalaxie, celle-ci ayant comparativement à lui des dimensions négligeables. Ce serait une extrapolation inadmissible que d'essayer d'étudier le comportement d'objets aussi énormes à l'aide des lois usuelles de la physique. Notre exemple servait à démontrer que pour les voyages interstellaires les vaisseaux à carburant chimique sont absolument inutilisables.

Il serait cependant imprudent d'affirmer en se fondant sur cette conclusion que les mondes stellaires resteront à jamais inaccessibles aux cosmonautes terrestres. Seul un avenir lointain pourrait apporter une réponse à ce problème. N'ayant nullement l'intention de broder sur ce thème relevant de la science-fiction, nous voulons seulement faire quelques remarques. Pour transformer une fusée en vaisseau interstellaire, on doit commencer par accroître la vitesse v_{rel} du jet de réaction jusqu'à une valeur peu différente de la vitesse de la lumière. Dans le cas idéal on aurait $v_{rel} = c$. C'est ce qui aurait lieu dans une *fusée photonique*, où le rôle du jet gazeux serait joué par un faisceau lumineux émis par le moteur du vaisseau dans une direction bien déterminée. Dans une fusée photonique la force de réaction qui la ferait avancer serait la pression lumineuse appliquée à la fusée lors de l'émission du faisceau lumineux. La conversion de la matière en rayonnement se produit constamment dans les étoiles. Le même processus est réalisable non seulement dans nos laboratoires terrestres, mais même à plus grande échelle (bombes atomiques et à hydrogène). On ne saurait préjuger si ces processus pourront être maîtrisés au point de les mettre en œuvre dans les fusées photoniques.

PROBLÈMES

1. Pour se faire une idée plus nette de la portée des lois régissant le mouvement des fusées, il est utile d'imaginer une fusée éjectant de la substance non de façon continue, mais par portions discrètes et finies de même masse Δm. Supposons qu'à chaque éjection la portion de substance éjectée acquiert la même vitesse v_{rel} par rapport à la fusée et dirigée en arrière. Déterminer la vitesse v_N de la fusée après N éjections de substance, sachant que la masse initiale de la fusée est égale à m_0. Montrer que dans le cas limite, où $\Delta m \to 0$, $N \to \infty$, mais où le produit $N\Delta m$ reste constant, l'expression obtenue pour v_N se réduit à la formule de Tsiolkovski; ne considérer que des vitesses non relativistes.

S o l u t i o n. Soient v_1, v_2, . . . les vitesses de la fusée après la première, la deuxième, . . . éjection de gaz. En vertu de la loi de conservation de l'impulsion $(m_0 - \Delta m)\, v_1 + \Delta m \cdot w = 0$, w étant la vitesse de la masse de substance éjectée la première fois. Il est évident que $v_{\text{rel}} = v_1 - w$.

En éliminant w, on trouve

$$v_1 = \frac{\Delta m}{m_0} v_{\text{rel}}. \tag{21.7}$$

Calculons v_2. Dans un référentiel se mouvant à la vitesse v_1, la fusée est immobile, tant que la deuxième éjection des gaz ne s'est pas produite, puis sa vitesse devient égale à $v_2 - v_1$. Par suite on peut utiliser la formule (21.7), en y faisant la substitution $m_0 \to m_0 - \Delta m$ et $v_1 \to v_2 - v_1$:

$$v_2 - v_1 = \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} v_{\text{rel}}.$$

En combinant cette relation avec (21.7) on trouve v_2. En continuant ainsi, on arrive aisément à la formule

$$v_N = \left[\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} + \ldots + \frac{\Delta m}{m_0 - (N-1)\,\Delta m}\right] v_{\text{rel}}.$$

En passant à la limite, $\Delta m \to 0$, $N \to \infty$ et $m_0 - (N-1)\,\Delta m \to m$, la somme entre crochets se transforme en une intégrale, ce qui donne

$$v = v_{\text{rel}} \int_m^{m_0} \frac{dm'}{m'},$$

où m est la masse finale de la fusée. Après intégration on retrouve la formule de Tsiolkovski (21.5).

2. Trouver une relation entre la masse $m\,(t)$ d'une fusée, sa vitesse finale $v\,(t)$ et le temps t pour une ascension verticale dans le champ de la pesanteur terrestre. Poser que la vitesse du jet gazeux par rapport à la fusée v_{rel} est constante. On ne tiendra compte ni de la résistance de l'air, ni de la variation de l'accélération de la force de pesanteur g avec l'altitude. Calculer quelle doit être la masse $\mu\,(t)$ des gaz éjectés par seconde, afin que la fusée reste immobile dans le champ de la pesanteur.

S o l u t i o n. Récrivons l'équation de mouvement de la fusée

$$m \frac{dv}{dt} = -v_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} - mg$$

sous la forme

$$m \frac{d}{dt}(v + gt) = -v_{\text{rel}} \frac{dm}{dt},$$

soit

$$\frac{d\,(v+gt)}{dm}=-\frac{v_{\text{rel}}}{m}.$$

Cette équation est de la même forme que (21.3) avec pour inconnue la quantité $v+gt$. On peut donc utiliser la formule (21.5) en y remplaçant v par $v+gt$:

$$\frac{m_0}{m}=e^{\frac{v+gt}{v_{\text{rel}}}},\qquad v=v_{\text{rel}}\ln\frac{m_0}{m}-gt.$$

Il est clair que la quantité μ est égale à $-\frac{dm}{dt}$. On la trouve en remarquant que pour la fusée immobile $\frac{dv}{dt}=0$:

$$\mu=-\frac{dm}{dt}=\frac{m_0 g}{v_{\text{rel}}}\,e^{-gt/v_{\text{rel}}}.$$

3. Soit un vaisseau spatial se déplaçant à une vitesse constante v. Pour changer sa direction, on met en marche son moteur qui éjecte dans une direction normale à la trajectoire un jet gazeux ayant une vitesse v_{rel} par rapport au vaisseau. Calculer l'angle α dont tournera le vecteur vitesse du vaisseau si sa masse initiale est m_0 et sa masse finale m.

Solution. La valeur absolue de l'accélération du vaisseau spatial est égale à $\omega^2 r=\omega v$, avec $v=\text{const}$. Par suite son équation de mouvement

$$m\frac{dv}{dt}=v_{\text{rel}}\frac{dm}{dt}$$

peut s'écrire $mv\omega\,dt=-v_{\text{rel}}\,dm$. En remarquant que $d\alpha=\omega\,dt$ est l'angle de rotation dans le temps dt, on trouve après intégration

$$\alpha=\frac{v_{\text{rel}}}{v}\ln\frac{m_0}{m}.$$

4. Un vaisseau spatial en vol dans une région de l'espace où ne règne aucun champ de gravitation doit inverser le sens de son mouvement, tout en conservant son module de vitesse. Pour réaliser la manœuvre, on suggère deux procédés: 1) d'abord arrêter le vaisseau, puis le relancer jusqu'à ce que soit atteinte la vitesse précédente; 2) faire virer le vaisseau, suivant un arc de cercle, en lui communiquant une accélération latérale. Dans quel cas la consommation de carburant sera-t-elle plus petite? Poser que la vitesse d'écoulement des gaz par rapport au vaisseau est constante et la même dans les deux cas.

Réponse. Le premier procédé est plus économique.

5. Calculer le rendement d'une fusée (c'est le rapport de l'énergie cinétique K qu'acquiert une fusée à la quantité de chaleur Q libérée par combustion du carburant). La vitesse finale de la fusée est $v=9$ km/s; la chaleur de combustion du carburant $q=4000$ kcal/kg; la vitesse d'écoulement des produits de combustion par rapport à la fusée $u=3$ km/s.

Réponse. $\frac{K}{Q}=\frac{v^2}{2q\,(e^{v/u}-1)}\approx 13\ \%$.

6. Les gaz de combustion sont éjectés avec une vitesse $u=3$ km/s par rapport à la fusée. Trouver le rapport de son énergie cinétique K_{fus} à l'énergie cinétique K_{gaz} des produits de combustion à l'instant où la vitesse de la fusée devient égale à $v_{\text{fin}}=12$ km/s.

Solution. L'accroissement de la vitesse v de la fusée est lié à la diminution de sa masse m par la relation $m\,dv=v_{\text{rel}}\,dm$. En passant à la forme scalaire et en utilisant de nouvelles notations, écrivons cette relation comme suit:

$m\,dv = -u\,dm$ avec $dm = -dm_{gaz}$ où m_{gaz} est la masse des gaz éjectés. L'accroissement de l'énergie cinétique des gaz est

$$dK_{gaz} = -\frac{1}{2}\,dmv^2_{gaz} = \frac{mv^2_{gaz}}{2u}\,dv.$$

En y portant $v_{gaz} = v - u$ et en appliquant la formule de Tsiolkovski (21.5), on obtient

$$dK_{gaz} = -\frac{m_0}{2u}(u-v)^2\,e^{-v/u}\,dv,$$

ce qui donne après intégration

$$K_{gaz} = \frac{m_0 u^2}{2}(1 - e^{-x} - x^2 e^{-x}),$$

où $x = v_{fin}/u$. L'énergie cinétique de la fusée est

$$K_{fus} = {}^1/_2 m v^2_{fin} = {}^1/_2 m_0 u^2 x^2 e^{-x}.$$

En définitive

$$\eta \equiv \frac{K_{fus}}{K_{gaz}} = \frac{x^2}{e^x - (1+x^2)}.$$

Pour $x = 4$, $\eta = 45\ \%$.

7. Une fusée à deux étages est lancée à partir de la Lune. Quel doit être le rapport des masses du premier (m_1) et du second (m_2) étage pour que la vitesse du container portant la charge utile (de masse m) soit maximale? La vitesse d'écoulement des gaz u dans les moteurs des deux étages a une même valeur constante. Les rapports de la masse de carburant à la masse de chacun des étages sont respectivement α_1 et α_2. La séparation successive des étages de propulsion et du container s'effectue sans qu'apparaissent des impulsions supplémentaires.

Solution. Négligeons le rôle de la force de pesanteur de la Lune puisque, diminuant l'énergie cinétique du système, elle n'influe pas sur la condition du maximum. Prenons pour unité de masse la masse totale de la fusée à l'instant de son lancement:

$$m_1 + m_2 + m = 1. \tag{21.8}$$

Une fois que le carburant du premier étage sera consommé, la masse du système se trouvera diminuée de $\alpha_1 m_1$. Si à ce moment la vitesse de la fusée est v_1, la formule de Tsiolkovski donne

$$e^{v_1/u} = \frac{1}{(1-\alpha_1)\,m_1 + m_2 + m}.$$

La masse $(1 - \alpha_1)\,m_1$ se sépare alors et le moteur du deuxième étage entre en action. Une fois que tout le carburant du deuxième étage sera consumé, la vitesse de la fusée s'accroîtra de v_2, avec

$$e^{v_2/u} = \frac{m_2 + m}{(1-\alpha_2)\,m_2 + m}.$$

Pour s'en rendre compte, il suffit d'adopter un référentiel par rapport auquel la fusée est immobile à l'instant où le premier étage s'en sépare. Pour calculer la vitesse totale de la fusée, il suffit de multiplier membre à membre les deux dernières équations et de prendre le logarithme du résultat obtenu. En excluant encore la masse m_2 à l'aide de (21.8), on obtient

$$\frac{v}{u} = \ln(1 - m_1) - \ln(1 - \alpha_1 m_1) - \ln[(1-\alpha_2)(1-m_1) + \alpha_2 m].$$

Ici m et u jouent le rôle de paramètres constants et m_1 celui de la variable dont dépend la vitesse v. En dérivant par rapport à m_1 et égalant la dérivée à zéro, on trouve la condition du maximum

$$\frac{1}{m_1-1}+\frac{1}{\beta-m_1}+\frac{1}{\gamma-m}=0, \tag{21.9}$$

avec les notations

$$\beta=\frac{1}{\alpha_1}, \quad \gamma=1+\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}m.$$

La condition (21.9) conduit à une équation du second degré en m_1 qui a pour solution

$$m_1=1-\sqrt{1+(\beta\gamma-\beta-\gamma)}.$$

Le signe moins devant le radical tient à ce que le problème implique que $0 < m_1 < 1$. A l'aide de (21.8) on calcule la masse m_2, puis le rapport cherché m_2/m_1. En reprenant les paramètres initiaux α_1 et α_2, on obtient

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}}-\sqrt{m}}{1-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}m}}\sqrt{m}. \tag{21.10}$$

La solution n'a de sens que si

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}m<1.$$

Cette condition est vérifiée dans les conditions réelles lorsque $m \ll 1$ et que les paramètres α_1 et α_2 ne sont pas très différents. Si $\alpha_1 = \alpha_2$ la formule se simplifie :

$$\frac{m_2}{m_1}=\sqrt{m}. \tag{21.11}$$

CHAPITRE IV

LE TRAVAIL ET L'ÉNERGIE

§ 22. Le travail et l'énergie cinétique

1. On appelle *travail d'une force* $\boldsymbol{F}$ le produit de la projection F_s de cette force sur la direction du déplacement de son point d'application par le module ds du déplacement:

$$dA = F_s\, ds = F\, ds \cos \alpha, \tag{22.1}$$

α étant l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{ds}$ (fig. 36). Comme on suppose que le déplacement ds est infiniment petit, la quantité dA est appelée *travail élémentaire* pour la distinguer du *travail effectué lors d'un déplacement fini*. En faisant appel à la notion de produit scalaire, on pourrait dire que le *travail élémentaire* dA est le produit scalaire de la force $\boldsymbol{F}$ par le déplacement $\boldsymbol{ds}$:

$$dA = (\boldsymbol{F}\, \boldsymbol{ds}). \tag{22.2}$$

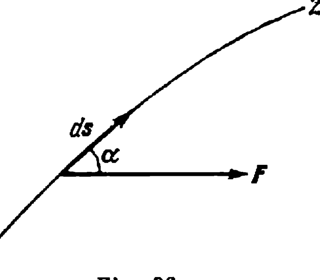


Fig. 36

En général si un point matériel parcourt un trajet de longueur finie sur une trajectoire curviligne, on peut subdiviser en pensée ce trajet en trajets élémentaires infiniment courts, le long desquels la force $\boldsymbol{F}$ peut être considérée comme constante et le travail élémentaire correspondant sera donné par (22.1) ou par (22.2). En sommant ces différents travaux élémentaires, tout en faisant tendre les longueurs des déplacements élémentaires vers zéro et leur nombre vers l'infini, on arrive à la limite que l'on désigne par le symbole

$$A = \int_L (\boldsymbol{F}\, \boldsymbol{ds}) \tag{22.3}$$

et que l'on appelle *intégrale curviligne* du vecteur $\boldsymbol{F}$ le long de la trajectoire L. Par définition, cette intégrale représente le *travail de la force* $\boldsymbol{F}$ *le long de la courbe* L.

Si $F = F_1 + F_2$, la projection de cette équation vectorielle sur la direction du déplacement élémentaire ds donne $F_s = F_{1s} + F_{2s}$; en multipliant par ds: $F_s\, ds = F_{1s}\, ds + F_{2s}\, ds$, soit

$$dA = dA_1 + dA_2. \qquad (22.4)$$

Ainsi *le travail élémentaire de la résultante de deux ou de plusieurs forces est égal à la somme de leurs travaux élémentaires.* Il est évident que cette proposition s'applique aussi bien aux travaux effectués pour des déplacements de longueur finie:

$$A = A_1 + A_2. \qquad (22.5)$$

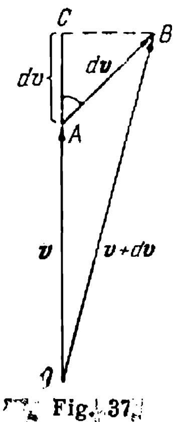


Fig. 37.

Dans le système SI, l'unité de travail est le joule (J). Le *joule* est le travail produit par une force de 1 newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force. Dans le système C.G.S. l'unité de travail est l'erg. L'*erg* est le travail produit par une force de 1 dyne dont le point d'application se déplace de 1 cm dans la direction de la force. Il est évident que

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergs}.$$

Le travail rapporté à l'unité de temps, c'est-à-dire la quantité

$$P = \frac{dA}{dt}, \qquad (22.6)$$

s'appelle la *puissance.* Les unités de mesure de la puissance sont l'erg par seconde et le joule par seconde ou watt (W). Il est évident que

$$1 \text{ W} = 10^7 \text{ erg/s}.$$

En portant dans la formule (22.3) $F = \frac{dp}{dt}$ et $ds = v\, dt$, on peut écrire

$$A = \int_{\rm I}^{\rm II} (v\, dp). \qquad (22.7)$$

2. Pour calculer cette intégrale on doit connaître la relation entre la vitesse v du point matériel et son impulsion p. Par définition, l'impulsion $p = mv$; comme en mécanique non relativiste la masse m ne dépend pas de la vitesse, on peut écrire $v\, dp = mv\, dv$. Ici le vecteur dv représente l'accroissement élémentaire du vecteur v, avec pour particularité que la direction de cet accroissement ne coïncide pas nécessairement avec celle du vecteur v (fig. 37). Si nous convenons de désigner par v le module du vecteur v, on aura évidemment $v^2 = v^2$. En effet, à droite figure le produit scalaire du vecteur v par lui-même, qui est égal, d'après la définition du produit scalaire, au carré du module du vecteur. Dérivons les deux membres de l'égalité $v^2 = v^2$; on obtient $v\, dv = v\, dv$. Ici dv est l'accroisse-

ment élémentaire du module du vecteur v, qu'on ne doit pas confondre avec le module de l'accroissement élémentaire du vecteur, c'est-à-dire avec la quantité $|d\mathbf{v}|$. Cette dernière quantité est, par sa signification même, essentiellement positive, tandis que l'accroissement dv peut être positif ou négatif. Sur la figure 37 $d\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, $dv = AC$. D'après la définition du produit scalaire $\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = v \cdot AB \cos\alpha = v \cdot AC = v\,dv$. Cela constitue une autre justification de l'égalité $\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = v\,dv$. Il va de soi que cette relation est valable non seulement pour le vecteur $\mathbf{v}$, mais pour tout autre vecteur. Utilisons cette relation dans le cas étudié ; sortons le facteur constant m de sous le signe d'intégration

$$A_{12} = m \int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

où v_1 est la vitesse initiale et v_2 la vitesse finale du point matériel. Nous avons attribué à la lettre A les indices 1 et 2 pour marquer qu'il s'agit du travail effectué pour déplacer le point matériel de sa position initiale *1* à sa position finale *2* (cf. fig. 36). La quantité

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \tag{22.8}$$

s'appelle *énergie cinétique du point matériel*. A l'aide de cette notion le résultat ci-dessus s'écrira sous la forme

$$A_{12} = K_2 - K_1. \tag{22.9}$$

Ainsi *le travail produit par une force lors du déplacement d'un point matériel est égal à l'accroissement de son énergie cinétique*. C'est ce théorème, exprimant la relation entre le travail et l'énergie cinétique, qui justifie l'introduction de ces deux notions.

3. Le résultat auquel nous venons d'aboutir se laisse généraliser à un système quelconque de points matériels. L'*énergie cinétique d'un système* est la somme des énergies cinétiques des points matériels le constituant ou des points matériels résultant d'une subdivision imaginaire de ce système. Ecrivons la relation (22.9) pour chaque point matériel du système et additionnons toutes ces relations. On retrouve la même formule (22.9) qui concernera alors non plus un seul point matériel, mais un système de points matériels. On doit entendre par A_{12} la somme des travaux de toutes les forces, intérieures et extérieures, appliquées aux points matériels du système. Ainsi *le travail de toutes les forces appliquées à un système de points matériels est égal à l'accroissement de l'énergie cinétique du système.*

Ce théorème se distingue notablement d'un autre théorème établissant une corrélation entre l'impulsion de la force et la variation de la quantité de mouvement du système (cf. § 18). Du fait de l'éga-

lité de l'action et de la réaction, les forces intérieures ne modifient pas la quantité de mouvement du système tout entier. L'accroissement de la quantité de mouvement du système n'est dû qu'aux *forces extérieures* appliquées au système. La situation est toute autre dans le cas de l'énergie cinétique. D'une manière générale, le travail des forces intérieures n'est pas nul. Considérons, par exemple, un système fermé comportant deux points matériels entre lesquels s'exercent les forces d'attraction mutuelle F_1 et F_2. Si ces points se mettent en mouvement pour se rapprocher l'un de l'autre, chacune des forces F_1 et F_2 effectuera un travail positif. Le travail total fourni sera lui aussi positif et sera utilisé pour accroître l'énergie cinétique du système. Cette variation d'énergie cinétique sera produite par les seules forces intérieures. Il s'ensuit que l'*accroissement de l'énergie cinétique est déterminé par le travail produit aussi bien par les forces extérieures que par les forces intérieures.*

4. Le théorème que nous venons de démontrer pour un point matériel reste valable en mécanique relativiste à condition de modifier l'expression de l'énergie cinétique. En mécanique relativiste la formule (22.7) est elle aussi valable, mais dans le calcul de l'intégrale (22.7) on devra tenir compte de la variation de la masse en fonction de la vitesse. La masse est alors donnée par la formule

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

En introduisant dans cette formule $v = p/m$ et en élevant au carré on obtient

$$p^2 + (m_0c)^2 = (mc)^2. \qquad (22.10)$$

En dérivant on trouve

$$p\,dp = c^2m\,dm.$$

Or comme $p\,dp = \mathbf{p}\,d\mathbf{p}$ et $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, on écrira

$$\mathbf{v}\,d\mathbf{p} = c^2\,dm.$$

Ainsi

$$A = \int_1 \mathbf{v}\,d\mathbf{p} = \int_{m_1}^{m_2} c^2\,dm,$$

d'où

$$A_{12} = c^2\,(m_2 - m_1) = c^2\,\Delta m, \qquad (22.11)$$

m_1 et m_2 étant les masses du point matériel en position initiale et en position finale.

Ainsi *en mécanique relativiste le travail produit n'est déterminé que par l'accroissement de masse du point matériel.* Ce résultat est plus simple que celui établi en mécanique non relativiste. Introduisons

la notation

$$E = mc^2 \tag{22.12}$$

et appelons *E énergie totale* ou *relativiste de la particule* (du point matériel). On aura alors

$$A_{12} = E_2 - E_1. \tag{22.13}$$

Dans le cas particulier d'une particule au repos, son énergie relativiste est donnée par

$$E_0 = m_0c^2 \tag{22.14}$$

qu'on appelle *énergie au repos.* L'*énergie cinétique* est une partie de l'énergie relativiste déterminée par le mouvement de la particule. Elle se laisse représenter par la différence

$$K = E - E_0 = (m - m_0)\,c^2, \tag{22.15}$$

ou encore

$$K = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{22.16}$$

Il est bien évident que le travail A_{12} peut également être calculé par la formule

$$A_{12} = K_2 - K_1. \tag{22.17}$$

Si on introduit dans la formule (22.10) les quantités E et E_0, on obtient

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2. \tag{22.18}$$

Cette formule exprime en mécanique relativiste la relation entre l'impulsion de la particule et son énergie totale. Elle est vérifiée non seulement pour les particules élémentaires, sur la structure interne desquelles la science moderne ne peut se prononcer, mais aussi bien pour les particules composées ou pour les systèmes comportant plusieurs particules. On doit entendre par m_0 et E_0 la masse et l'énergie totale d'un tel système, mesurées dans un référentiel par rapport auquel le système est au repos.

La formule (22.16) exprime l'énergie cinétique en mécanique relativiste. Dans le cas de mouvements lents cette formule se ramène à la formule usuelle (22.8). En effet, utilisant la formule du binôme de Newton, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots$$

Lorsque $v^2/c^2 \ll 1$, on peut ne prendre en considération que les deux premiers termes du développement et la formule (22.16) se transforme en (22.8).

5. En physique atomique, il est commode d'utiliser comme unité d'énergie l'*électron-volt* (eV). C'est l'énergie acquise par un électron dans un champ électrique sous l'effet d'une différence de potentiel de 1 volt

$$1 \text{ eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-12} \text{ erg.}$$

On utilise également le *kiloélectron-volt* (keV) qui vaut 1000 eV. En physique nucléaire et en technique des accélérateurs de particules on utilise aussi le *mégaélectron-volt* (MeV) égal à 10^6 eV et le *gigaélectron-volt* (GeV) égal à 10^9 eV. Depuis peu on utilise le *téraélectron-volt* (TeV = 10^{12} eV). L'énergie au repos de l'électron et du proton est respectivement égale à

$$\text{pour l'électron } m_{0é}c^2 = 0{,}511 \text{ MeV,}$$

$$\text{pour le proton } m_{0p}c^2 = 938 \text{ MeV.}$$

Dans le cas où l'énergie relativiste E d'une particule est grande par rapport à son énergie au repos $E_0 = m_0c^2$, *on dit que le mouvement s'effectue à une vitesse hyperrelativiste.* On atteint de telles vitesses dans les accélérateurs et on en rencontre dans les rayons cosmiques.

Connaissant l'énergie d'une particule hyperrelativiste, on peut calculer sa vitesse, ou, plus précisément, non pas la vitesse de la particule (on ne peut le faire parce que la vitesse de la lumière c est connue avec une précision insuffisante), mais la différence entre cette vitesse et la vitesse de la lumière dans le vide. Pour ce faire, récrivons la formule (22.12) sous la forme

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

On en tire

$$E^2(c+v)(c-v) = m_0^2c^6 = E_0^2c^2.$$

Puisque la vitesse v est voisine de c, on peut remplacer v par c dans le facteur $(c+v)$, ce qui conduit à

$$\frac{c-v}{c} = \frac{E_0^2}{2E^2}. \tag{22.19}$$

Pour un proton ayant une énergie $E = 10$ GeV, on obtient

$$\frac{c-v}{c} = \frac{0{,}938^2}{2 \cdot 10^2} = 0{,}0044,$$

et pour un électron d'une énergie $E = 1$ GeV

$$\frac{c-v}{c} = \frac{0{,}511^2}{2 \cdot 10^6} = 1{,}3 \cdot 10^{-7}.$$

On a enregistré dans les rayons cosmiques la présence de protons d'une énergie égale à 10^{19} eV = 10^{10} GeV. Dans ce cas

$$\frac{c-v}{c} \sim 10^{-20},$$

ce qui signifie que la vitesse de la particule ne diffère de la vitesse de la lumière que de $3 \cdot 10^{-10}$ cm/s.

PROBLÈMES

1. Une poulie fixe dont la masse peut être négligée porte une lourde corde de masse M formant une boucle fermée. A l'instant initial un singe de masse m s'agrippe à la corde en un point situé entre la poulie et la remontée de la boucle et commence à grimper afin de se maintenir à une hauteur constante. Quelle puissance P devra développer le singe pour y arriver? Au bout de combien de temps le singe ne pourra-t-il plus se maintenir à hauteur constante si sa puissance maximale est P_{max}?

Réponse. $P=\frac{(mg)^2}{M}t$; $t=\frac{M}{(mg)^2}P_{max}$.

2. Etablir la formule (21.6) qui est la généralisation relativiste de la formule de Tsiolkovski valable pour le mouvement d'une fusée. Poser que les vitesses de la fusée et d'un jet de gaz ont même direction.

Solution. La résolution de ce problème repose sur les lois relativistes de l'impulsion et de l'énergie (de la masse relativiste) que nous connaissons. On doit aussi connaître la *loi relativiste de la composition des vitesses* que nous n'avons pas formulée. Le lecteur désireux de bien comprendre le procédé de résolution donné ci-dessous devra consulter un cours de théorie de la relativité ou admettre sans autre forme de procès la validité de la formule (22.22) ci-dessous.

Soient m et v la masse au repos et la vitesse de la fusée à un instant quelconque t et soient m_{gaz} et v_{gaz} les mêmes quantités relatives aux gaz produits au même instant par la combustion du carburant de la fusée. Puisque les gaz éjectés n'exercent aucune influence sur le mouvement de la fusée, on posera $m_{gaz}=0$. Mais comme les gaz sont produits constamment, $dm_{gaz}\neq 0$. En vertu des lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie (de la masse relativiste):

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{m_{gaz}v_{gaz}}{\sqrt{1-\frac{v_{gaz}^2}{c^2}}}=\text{const}, \tag{22.20}$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{m_{gaz}}{\sqrt{1-\frac{v_{gaz}^2}{c^2}}}=\text{const}. \tag{22.21}$$

Dérivons (22.20) en tenant compte de (22.21) et posons $m_{gaz}=0$ dans le résultat obtenu; il vient

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv+(v-v_{gaz})\,d\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=0.$$

Selon la loi relativiste de la composition des vitesses

$$v_{gaz}=\frac{v-v_{rel}}{1-\frac{vv_{rel}}{c^2}}, \tag{22.22}$$

où v_{rel} est la vitesse du jet de gaz par rapport à la fusée. En excluant v_{gaz} on trouve après réarrangement

$$\frac{dv}{v^2-c^2}=\frac{v_{rel}}{c^2}\frac{dm}{m}.$$

En supposant que v_{rel} = const, on obtient après intégration

$$\frac{m_0}{m}=\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{c}{2v_{rel}}}. \tag{22.23}$$

§ 23. Relation entre les énergies cinétiques dans différents référentiels. Théorème de König

La formule (22.8) montre clairement que l'énergie cinétique d'un corps dépend du choix du référentiel par rapport auquel on étudie son mouvement. On peut se demander comment se transforme l'énergie cinétique lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre. Nous traiterons ce problème dans le cadre de la mécanique non relativiste en commençant par le cas particulier où le corps est un point matériel. Désignons par K l'énergie cinétique du point matériel dans un référentiel S, et par K' son énergie cinétique dans un référentiel S' en translation à la vitesse V par rapport à S. (La vitesse V peut être ou constante ou variable dans le temps.) En mécanique non relativiste les vitesses v, v' et V sont reliées entre elles par la relation $v = v' + V$. Par suite

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}mV^2+mv'V,$$

ou

$$K=K'+\frac{1}{2}mV^2+(p'V), \tag{23.1}$$

où $p' = mv'$ est l'impulsion du point matériel dans le référentiel S'. La formule (23.1) est valable aussi pour un système quelconque de points matériels. Pour s'en assurer il suffit d'écrire la relation (23.1) pour chaque point matériel du système et d'effectuer la sommation sur tous les points; on retrouve alors la formule (23.1) où p' désigne dorénavant l'impulsion de la *totalité des points matériels du système* dans le référentiel S', soit $p' = m_1v_1' + m_2v_2' + \ldots$ On peut l'écrire sous la forme $p' = mv_c'$, où v_c' est la vitesse du centre de masse du système de points matériels par rapport au référentiel S' et m est la masse totale du système. Ainsi

$$K=K'+\frac{1}{2}mV^2+m(Vv_c'). \tag{23.2}$$

Si dans le référentiel S' le centre de masse est au repos, i.e. $v_c' = 0$, on a

$$K=K'+\frac{1}{2}mV^2. \tag{23.3}$$

Cette égalité exprime le *théorème* dit *de König*: *l'énergie cinétique d'un système de points matériels est égale à la somme de l'énergie cinétique de la masse du système tout entier, que l'on imagine concentrée en*

son centre de masse et qui se déplace avec lui, et de l'énergie cinétique de ce même système en mouvement relatif par rapport au système de coordonnées en translation dont l'origine coïncide avec le centre de masse.

§ 24. Forces conservatives et non conservatives

1. Toutes les forces auxquelles on a affaire en mécanique macroscopique sont usuellement subdivisées en forces *conservatives* et *non conservatives.* Avant d'introduire ces nouvelles notions, il est utile de donner quelques exemples.

Calculons d'abord le travail produit par la force de pesanteur qui fait passer un point matériel de la position *1* à la position *2* suivant

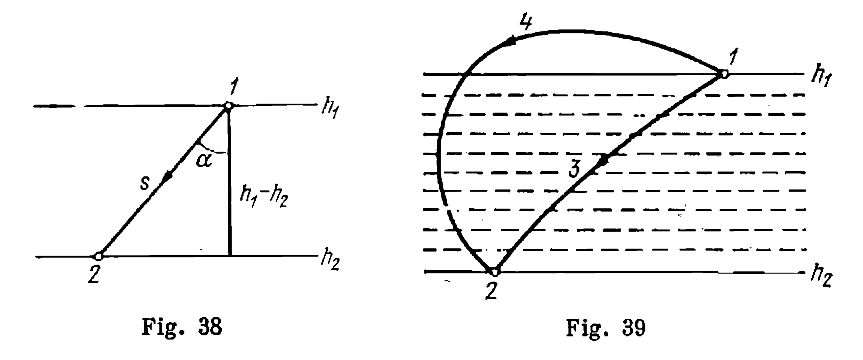


Fig. 38 Fig. 39

le segment de droite *12* (fig. 38). Un exemple en est le glissement sans frottement d'un point matériel le long d'un plan incliné parfaitement lisse. Il est clair que ce travail est égal à $A_{12} = mgs \cos \alpha$ ou

$$A_{12} = mg\,(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2, \qquad (24.1)$$

où h_1 et h_2 sont les hauteurs auxquelles se trouvait le point matériel au début et à la fin de son trajet, rapportées à un niveau arbitrairement choisi, la surface de la Terre ou de la mer par exemple. La formule (24.1) reste valable pour un déplacement le long d'une courbe arbitraire, par exemple le long du chemin *132* (fig. 39). Ce résultat devient évident si on découpe ce trajet en tronçons par des plans horizontaux, chaque tronçon étant assez petit pour pouvoir être considéré comme rectiligne. Appliquons à chacun de ces tronçons de trajectoire la formule (24.1) et faisons la somme de tous les travaux élémentaires, nous retrouverons la formule (24.1). Si au lieu du chemin *132* on prend un autre chemin *142* reliant entre elles les mêmes positions initiale et finale (*1* et *2*), le travail de la force de pesanteur restera le même puisqu'il ne dépend que de la différence $h_1 - h_2$ qui est indépendante du chemin suivi. Ainsi *le travail de la force de pesanteur ne dépend pas de la forme du chemin suivi*

et n'est déterminé que par les positions initiale et finale du point matériel.

2. Le deuxième exemple concerne le travail de déplacement d'un point matériel dans un champ de forces centrales. Une force est dite *centrale* si elle est dirigée vers un seul et même point ou si elle en est issue et ne dépend que de la distance à ce point, appelé *centre de force.* A titre d'exemple on peut citer la force d'attraction gravitationnelle qu'exerce le Soleil sur une planète et la force d'interaction électrostatique de deux charges électriques ponctuelles. Par définition le travail élémentaire est $dA = F\,ds \cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{ds})$. La quantité $ds \cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{ds})$ est la projection du déplacement élémentaire $\boldsymbol{ds}$ sur la direction de la force ou, ce qui revient au même, sur la direction du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ (à condition d'adopter pour sens positif de la force le sens issu du centre de force O). Par conséquent $ds \cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{ds}) = dr$, dr étant l'accroissement élémentaire de la longueur r, donc la distance entre le point matériel et le centre de force (fig. 40). Ainsi $dA = F(r)\,dr$ et par hypothèse le module de la force F ne dépend que de la distance r. De ce fait le travail A_{12} est déterminé par l'intégrale définie:

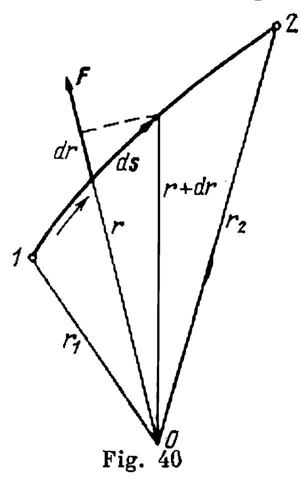


Fig. 40

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr, \qquad (24.2)$$

dont la valeur *ne dépend que des distances* r_1 et r_2 entre les points *1* et *2* et le centre de force O mais est indépendante de la forme du chemin suivi par le point pour passer de la position initiale *1* à la position finale *2*. Le chemin suivi par le point ne figure pas dans la formule (24.2) où n'interviennent que les distances jusqu'au centre de force.

3. Supposons qu'au centre de force se trouve placé un *corps physique* (un point matériel) qui interagit avec le point matériel considéré (que l'on peut aussi bien prendre pour centre de force). Leur interaction provoque le déplacement et du point matériel et du centre de force. En établissant la formule (24.2) nous n'avons pas tenu compte du déplacement du centre de force, mais cela n'affecte en rien la validité de cette formule. *Le travail produit A_{12} ne dépend que du déplacement relatif des points matériels mais ne peut dépendre des déplacements absolus de chacun des points pris isolément.* Un cal-

cul simple le démontre pleinement. Soient deux points matériels *1* et *2* dont les forces d'interaction $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ sont conformes à la troisième loi de Newton. Désignons par $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ les rayons vecteurs de ces points passant par une origine immobile. Le travail élémentaire s'exprime alors par $dA = \boldsymbol{F}_1\, d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_2\, d\boldsymbol{r}_2$. Selon la troisième loi de Newton $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$ et par suite $dA = \boldsymbol{F}_2\,(d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{F}_2 d\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$. Or $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ est le rayon vecteur du point *2* par rapport au point *1*; désignons-le par $\boldsymbol{r}_{12}$. On a alors

$$dA = \boldsymbol{F}_2\, d\boldsymbol{r}_{12}. \tag{24.3}$$

On en arrive à conclure que dans le calcul du travail élémentaire ainsi que du travail total le point *1* peut être considéré comme étant immobile et le point *2* comme étant le point mobile par rapport au point *1*. On pourrait aussi bien considérer que c'est le point *2* qui est immobile, le point *1* étant mobile. Le résultat serait le même. On peut en général procéder comme nous l'avons déjà fait et mettre (24.3) sous la forme

$$dA = F\,(r)\, dr. \tag{24.4}$$

Dans cette formule ne figurent que la distance r entre les points matériels et son accroissement dr. Il en découle immédiatement la formule (24.2), ce qui démontre notre assertion.

Notons une conséquence importante de la formule (24.2). Supposons que les points matériels *1* et *2* soient rattachés l'un à l'autre par une tige absolument rigide. Il est évident que dans ce cas idéalisé la distance entre les points demeurera invariable, quels que soient leurs déplacements: $dr = 0$. Par suite l'intégrale figurant dans la formule (24.2) sera toujours égale à zéro; sera donc aussi égal à zéro le travail produit par les forces d'interaction des points matériels *1* et *2* quel que soit le déplacement. Les corps solides parfaitement rigides peuvent être considérés comme des systèmes de points matériels dont les distances de séparation restent immuables quels que soient leurs mouvements. Cette invariabilité de la distance de séparation est due aux forces intérieures ou aux forces de liaison s'exerçant entre les points matériels du système. On peut décomposer en pensée tout le système en un grand nombre de couples de points en interactions mutuelles et appliquer à ces couples le corollaire que nous venons de signaler. Il s'ensuit que *le travail des forces intérieures s'exerçant dans des corps solides parfaitement rigides est égal à zéro quels que soient les mouvements du système.* Les corps réels ne sont jamais parfaitement rigides, car les forces qui s'y exercent sont déterminées par des liaisons qui, quoique très rigides, ne le sont pas indéfiniment. En général, le travail de ces forces est différent de zéro, mais à mesure que les liaisons se renforcent, le travail des forces intérieures diminue pour s'annuler à la limite, lorsque les liaisons deviennent parfaitement rigides.

Les résultats que nous avons établis pour deux points matériels se laissent généraliser au cas d'un système quelconque de points matériels échangeant des forces centrales. Si on fixe les positions de tous les points matériels, on définit la position du système tout entier, ou comme on dit on définit sa *configuration. Le travail des forces centrales ne dépend pas du procédé (ou de la* « voie ») *mis en œuvre pour faire passer le système de sa configuration initiale à sa configuration finale; ce travail est entièrement déterminé par les configurations elles-mêmes.*

4. Lorsque les forces d'interaction ne dépendent que de la configuration des points matériels du système (donc de leurs coordonnées) et que le travail produit par ces forces pour déplacer le système d'une

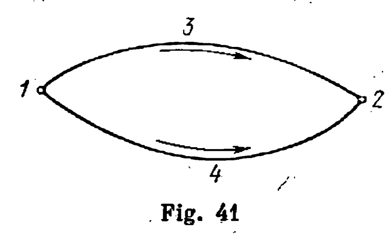


Fig. 41

quelconque position initiale à une quelconque position finale ne dépend pas du chemin suivi, n'étant déterminé que par les configurations initiale et finale du système, ces forces d'interaction sont dites *conservatives.* Les exemples cités montrent que *la force de pesanteur et toutes les forces centrales sont des forces conservatives.*

Donnons une autre définition des forces conservatives équivalente à la précédente. Considérons un système qui est passé de la position *1* à la position *2* suivant le chemin *132*. Sur la figure 41 nous avons représenté symboliquement les positions successives du système par des points et les voies de passage entre les différentes positions par des traits continus, bien qu'en toute rigueur ce mode de représentation ne vaudrait que pour un système ne comportant qu'un seul point matériel. Ce passage du système d'une position à une autre s'accompagne de l'accomplissement du travail A_{132}. Si le système était passé dans la position *2* en suivant le chemin *142*, le travail accompli aurait été A_{142}. Par définition des forces conservatives, $A_{132} = A_{142}$. Comme les forces ne dépendent que de la configuration du système, on doit avoir $A_{142} = -A_{241}$, où A_{241} est le travail qui aurait été accompli si le système était passé de *2* en *1* suivant le même chemin mais en sens inverse (chemin *241*). Par suite $A_{132} + A_{241} = 0$. Or la somme $A_{132} + A_{241}$ est le travail effectué par les forces une fois le système revenu en position *1*. Dans ce cas on dit qu'il s'agit du travail effectué le long d'un « chemin fermé ». Ainsi *le travail des forces conservatives le long d'un chemin fermé est égal à zéro.* En inversant l'ordre du raisonnement on démontre sans peine

que si le travail le long d'un chemin fermé est nul, le travail doit être indépendant du chemin suivi pour faire passer le système d'une position à une autre. Il en résulte une autre définition des forces conservatives. Les forces *conservatives* sont des forces ne dépendant que de la configuration du système et dont le travail le long d'un chemin fermé est toujours nul.

5. Toutes les forces qui ne satisfont pas aux définitions données sont dites *forces non conservatives*. Parmi ces dernières nous citerons tout d'abord les *forces dissipatives*, par exemple les forces de frottement se manifestant lorsqu'un corps glisse sur la surface d'un autre

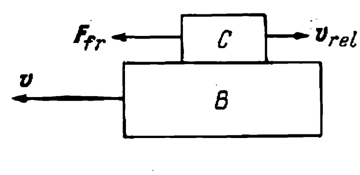


Fig. 42

corps. Ce sont aussi les forces de résistance auxquelles se trouve soumis tout corps se déplaçant dans un milieu liquide ou gazeux (on les classe aussi parmi les forces de frottement (cf. § 17)). Toutes ces forces dépendent non seulement de la configuration des corps, mais encore de leurs *vitesses relatives*. Elles sont toujours dirigées à l'encontre de la vitesse du mobile (par rapport à la surface sur laquelle il glisse ou par rapport au milieu qui oppose une résistance à son mouvement). Si le corps glisse sur une surface immobile ou se meut dans un milieu résistant « immobile », le travail des forces de frottement appliquées au corps en mouvement est négatif. Mais le travail des forces de frottement peut devenir positif si la surface de glissement ou le milieu résistant sont eux aussi en mouvement. Considérons, par exemple, un corps B sur la surface duquel glisse le corps C à la vitesse relative v_{rel} (fig. 42). La force de frottement F_{fr} agissant sur le corps C est dirigée dans le sens opposé à celui du vecteur v_{rel}. Supposons que le corps B se meut en sens inverse à la vitesse v. Si $v > v_{rel}$, dans un référentiel « immobile » le corps C se déplacerait à une vitesse $v - v_{rel}$ pointant dans le même sens que celui de la force de frottement. La force de frottement effectue à tout instant un travail positif sur le corps C; ce travail est $A_1 = F_{fr}(v - v_{rel})$. Mais si le système est fermé, le travail total des forces de frottement agissant sur tous les corps du système sera toujours négatif. Ainsi dans l'exemple cité la force de frottement agissant sur le corps B effectue un travail négatif $A_2 = -F_{fr}v$. Le travail total des forces de frottement est égal à $A = A_1 + A_2 = -F_{fr} \cdot v_{rel}$, i.e. il est négatif. Aussi pouvons-nous donner la définition suivante des for-

ces dissipatives. On appelle forces *dissipatives* les forces dont le travail total correspondant à tout mouvement au sein d'un système fermé est toujours négatif.

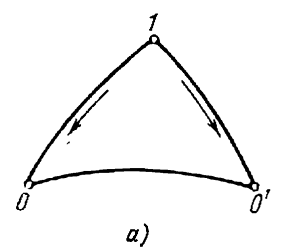
6. Signalons, pour finir, l'existence d'une autre espèce de forces non conservatives — les *forces* dites *gyroscopiques. Ce sont des forces qui dépendent de la vitesse du point matériel et qui agissent toujours suivant une direction perpendiculaire à cette vitesse.* Le travail de ces forces est nul quel que soit le déplacement du point matériel, notamment son mouvement sur un chemin fermé. Les forces gyroscopiques se distinguent des forces conservatives en ce qu'elles dépendent non seulement de la position mais encore de la vitesse du point matériel mobile. Le seul exemple de forces gyroscopiques connues en physique est la *force de Lorentz* qui est la force agissant sur une particule chargée placée dans un champ magnétique. La force de Lorentz est proportionnelle au produit vectoriel $[\boldsymbol{vB}]$ et est donc perpendiculaire à la direction de la vitesse $\boldsymbol{v}$ et à celle du vecteur *intensité du champ magnétique* $\boldsymbol{B}$. Il est vrai que l'on trouve en mécanique des forces gyroscopiques d'un type différent ; ce sont les *forces* dites *de Coriolis.* Mais prises dans le sens de la mécanique de Newton, ces forces ne sont pas de « vraies forces », puisque l'étude des mouvements par rapport à des référentiels d'inertie (ce sont les seuls mouvements que nous avons étudiés jusqu'ici) ne permet pas de déceler l'existence de ces « forces ». On les introduit d'une façon artificielle lors de l'étude des mouvements dans les référentiels qui sont en rotation par rapport aux référentiels d'inertie, afin de conférer aux équations de mouvement dans ces systèmes la même forme que celle que l'on trouve dans le cas de référentiels d'inertie (cf. ch. IX).

§ 25. L'énergie potentielle et la loi de la conservation de l'énergie en mécanique

1. Lorsqu'un système n'est soumis à l'action que de forces conservatives et gyroscopiques, on peut introduire pour ce système la notion d'*énergie potentielle.* Adoptons pour position *de référence* (position *zéro*) d'un système une position caractérisée par l'indication des coordonnées de ses points matériels. Le travail réalisé par les forces conservatives lors du passage du système d'une position considérée à la position de référence s'appelle énergie potentielle du système en position de référence. Comme le travail des forces conservatives ne dépend pas du chemin suivi pour passer d'une position à une autre, l'énergie potentielle d'un système doté d'une position de référence ne dépend que des coordonnées des points matériels en position considérée. Autrement dit, *l'énergie potentielle U d'un système n'est fonction que de ses coordonnées.*

La valeur que prend l'énergie potentielle d'un système dépend du choix de la position de référence. Ainsi si on avait choisi comme réfé-

rence la position O (fig. 43, a), l'énergie potentielle du système se trouvant dans la position 1 aurait été $U = A_{1O}$; A_{1O} représenterait alors le travail effectué par les forces conservatives pour faire passer le système de la position 1 à la position O. Mais si on avait pris pour référence la position O', l'énergie potentielle aurait été $U' = A_{1O'}$. Les forces étant conservatives, le travail qu'elles effectuent le long du chemin $1O'$ est égal au travail effectué le long du chemin $1OO'$: $A_{1O'} = A_{1O} + A_{OO'}$, soit $U' = U + A_{OO'}$. Le travail $A_{OO'}$ est invariable puisqu'il ne dépend pas des coordonnées du système se



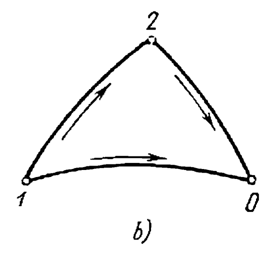


Fig. 43

trouvant dans l'état 1. Sa valeur est complètement définie par le choix des positions O et O'. Cela montre que lorsqu'on remplace une position de référence par une autre, l'énergie potentielle du système change d'une quantité constante. L'indétermination sur la valeur de l'énergie potentielle devient encore plus forte si on convient de lui attribuer, dans la position de référence, non pas une valeur nulle, mais une certaine valeur constante et arbitraire. Dans ce cas on devra remplacer dans la définition donnée ci-dessus l'expression « énergie potentielle » par l'expression « *différence* d'énergie potentielle ». La *différence d'énergies potentielles en position considérée et en position de référence* est le travail produit par les forces conservatives lors du passage du système d'une position considérée à sa position de référence. Ainsi *l'énergie potentielle d'un système n'est déterminée qu'à une constante arbitraire près.* Mais cette indétermination ne peut se répercuter sur la justesse des conclusions physiques tirées d'une étude, car l'évolution des phénomènes physiques dépend non pas de la valeur absolue de l'énergie potentielle, mais seulement de la différence de ses valeurs dans divers états. Or ces différences ne dépendent pas de la valeur de la constante arbitraire.

Considérons le passage d'un système d'une position 1 à une position 2 le long du chemin 12 (fig. 43, b). Le travail A_{12} effectué par les forces conservatives lors de ce passage peut être exprimé en fonction des énergies potentielles U_1 et U_2 correspondant aux deux positions du système. Pour ce faire, supposons que ce passage s'effectue en passant par la position de référence O, donc suivant le che-

min $1O2$. Les forces étant conservatives, nous pouvons écrire $A_{12} = A_{1O2} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O}$. Selon la définition de l'énergie potentielle $U_1 = A_{1O} + C$ et $U_2 = A_{2O} + C$, C étant la même constante additive. Par suite

$$A_{12} = U_1 - U_2, \tag{25.1}$$

ce qui s'énonce: *le travail des forces conservatives est égal à la diminution de l'énergie potentielle du système.*

2. Nous avons montré précédemment que ce même travail A_{12} pouvait être exprimé en fonction de l'accroissement de l'énergie cinétique du système considéré (formule 22.9). En égalant (22.9) et (25.1) on obtient $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$, d'où

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2.$$

La somme des énergies cinétique et potentielle d'un système porte le nom d'*énergie totale* E. Ainsi $E_1 = E_2$, soit

$$E \equiv K + U = \text{const.} \tag{25.2}$$

Dans un système où ne se manifestent que des forces conservatives (et gyroscopiques), l'énergie totale est invariable. Dans un tel système ne peuvent se produire que des conversions d'énergie potentielle en énergie cinétique et des conversions inverses, la réserve totale d'énergie du système restant invariable. Cette proposition porte le nom de *loi de la conservation de l'énergie en mécanique.*

3. Calculons l'énergie potentielle dans quelques cas simples.

a) Energie potentielle d'un corps dans un champ de pesanteur uniforme. Si un point matériel se trouvant à une hauteur h tombe jusqu'au niveau zéro (niveau pour lequel $h = 0$), la force de pesanteur effectuera le travail $A = mgh$. Par suite, un point matériel se trouvant à une hauteur h possède une énergie potentielle $U = mgh + C$. Le niveau zéro peut être choisi arbitrairement, par exemple le niveau du sol du laboratoire où se déroule l'expérience, le niveau de la mer, etc. La constante C est égale à l'énergie potentielle au niveau de référence. En la posant nulle, on obtient

$$U = mgh. \tag{25.3}$$

b) Energie potentielle d'un ressort tendu. Les forces élastiques qui apparaissent lorsqu'on comprime ou lorsqu'on tend un ressort sont des forces centrales. Ce sont donc des forces conservatives et on peut parler de l'énergie potentielle d'un ressort déformé, qui dans ce cas porte le nom d'*énergie élastique*. Désignons par x l'*allongement du ressort* qui est la différence $x = l - l_0$ des longueurs du ressort à l'état déformé et à l'état non déformé. La force élastique F ne dépend que de l'allongement du ressort. Tant que l'allongement x n'est pas grand, la force élastique lui est proportionnelle: $F = kx$ (loi de Hook, cf. § 11). Lorsque le ressort revient de l'état déformé à

l'état non déformé, la force F effectue le travail

$$A=\int_0^x F\,dx=k\int_0^x x\,dx=\frac{1}{2}kx^2.$$

En posant égale à zéro l'énergie élastique d'un ressort non déformé, on écrira

$$U={}^1/_2\,kx^2. \tag{25.4}$$

c) Energie potentielle de l'attraction gravitationnelle de deux points matériels. Selon la loi de la gravitation universelle de Newton, la force d'attraction gravitationnelle échangée par deux corps ponctuels est proportionnelle au produit de leurs masses Mm et inversement proportionnelle au carré de leur distance de séparation:

$$F=G\frac{Mm}{r^2}, \tag{25.5}$$

où G est la *constante gravitationnelle.* Les forces d'attraction gravitationnelle, étant des forces centrales, sont conservatives. On peut donc parler d'énergie potentielle. Pour la calculer il est commode de poser que l'une des masses, la masse M par exemple, est immobile et que l'autre masse m se déplace dans le champ de gravitation de la première. Lorsque la masse m est déplacée depuis l'infini, la force gravitationnelle effectue le travail

$$A=\int_r^\infty G\frac{Mm}{r^2}\,dr=G\frac{Mm}{r},$$

où r est la distance entre les masses M et m se trouvant dans leurs positions finales. Ce travail est égal à la diminution d'énergie potentielle

$$A=U_\infty-U(r).$$

D'habitude on pose égale à zéro l'énergie potentielle à l'infini ($U_\infty=0$). Dans ce cas

$$U=-G\frac{Mm}{r}. \tag{25.6}$$

Le fait que cette quantité soit négative s'interprète de la façon suivante. L'énergie de deux masses s'attirant mutuellement est maximale lorsqu'elles se trouvent à une distance infinie l'une de l'autre. On pose que leur énergie potentielle est alors égale à zéro. Par suite, pour toute autre disposition mutuelle des masses, l'énergie potentielle doit être plus petite, donc avoir une valeur négative.

4. Supposons maintenant qu'à côté des forces conservatives et gyroscopiques, des forces dissipatives se manifestent dans le système.

Lorsque le système passe de la position *1* à la position *2*, le travail A_{12} de toutes les forces est toujours égal à l'accroissement de son énergie cinétique $K_2 - K_1$. Dans ce cas le travail peut être considéré comme la somme du travail des forces conservatives A_{12}^{cons} et du travail des forces dissipatives A_{12}^{dis}. Le premier terme de cette somme se laisse exprimer par la diminution de l'énergie potentielle du système: $A_{12}^{\text{cons}} = U_1 - U_2$. Ainsi

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{dis}}.$$

En égalant cette expression à l'accroissement de l'énergie cinétique, nous obtenons

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{dis}},$$

soit

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{dis}}, \qquad (25.7)$$

où $E = K + U$ est l'énergie totale du système. Nous voyons ainsi que dans ce cas l'énergie mécanique E du système ne reste pas constante mais diminue, le travail des forces dissipatives A_{12}^{dis} étant négatif.

Généralisons l'équation (25.7). Subdivisons toutes les forces agissant dans le système en deux groupes. Nous classerons dans le premier groupe les forces dont on peut tenir compte par l'énergie potentielle U et dans le second toutes les autres forces extérieures et intérieures appliquées au système ou échangées dans le système. Désignons par A_{12} le travail de ces dernières forces. En reprenant le raisonnement qui nous avait conduit à la formule (25.7), nous obtiendrons

$$E_2 - E_1 = A_{12}. \qquad (25.8)$$

5. Supposons de nouveau qu'aucune force dissipative n'agit dans le système. La loi de la conservation de l'énergie sous sa forme (25.2) est alors vérifiée. Comme par essence l'énergie cinétique K ne peut être négative, il résulte de (25.2) que $E \geqslant U$. Cette relation définit le *domaine de variation de toutes les coordonnées du système* dans lequel il peut se trouver pour une valeur donnée de son énergie totale E. Le système ne peut se trouver là où $U > E$ puisque l'énergie potentielle ne peut être plus grande que l'énergie totale.

Considérons à titre d'exemple le mouvement rectiligne d'une particule se déplaçant le long d'une droite déterminée que nous confondrons avec l'axe des X. Le long de cet axe la valeur de U ne sera fonction que de x: $U = U(x)$. Si E est l'énergie totale de la particule, celle-ci ne pourra se trouver sur l'axe des X que là où $U(x) \leqslant E$. Supposons que la courbe représentant la fonction $U(x)$ ait l'allure représentée sur la figure 44. Traçons sur ce graphique une droite horizontale $U = E_1$, E_1 étant une constante arbitraire. Sup-

posons encore que cette droite coupe la « *courbe potentielle* » $U = U(x)$ en trois points A, B et C, de coordonnées x_A, x_B, x_C. On voit aussitôt qu'une particule d'énergie totale E_1 ne peut se trouver dans les régions I et III. Elle ne peut se déplacer qu'à l'intérieur des régions II ou IV et ne peut passer d'une région à une autre. Elle ne peut le faire du fait de l'existence d'une « *barrière de potentiel* » BNC sur la courbe potentielle. Dans la région II une particule d'énergie totale E_1 effect a un *mouvement* dit *fini* qui est un mouvement

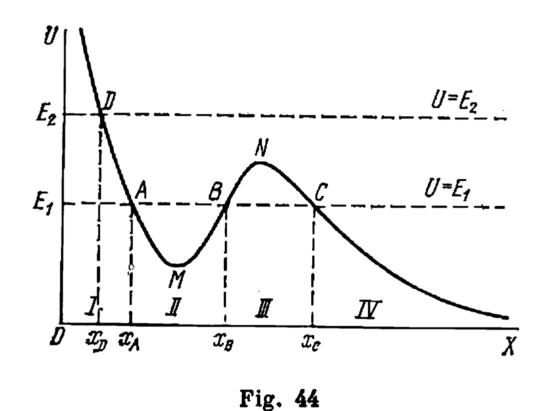


Fig. 44

qui s'effectue dans une région limitée de l'espace. La particule se trouve ainsi enfermée dans le « puits de potentiel » AMB et oscillera entre les points extrêmes x_A et x_B. Mais si la particule se trouve dans la région IV et se meut vers la gauche, après avoir atteint le point x_C, elle rebroussera chemin et « s'éloignera à l'infini ». Un tel mouvement est dit *infini.* Supposons maintenant que la particule possède une plus grande énergie $E_2 > E_1$, telle que la droite horizontale $U = E_2$ coupe la courbe potentielle en un seul point D d'abscisse x_D. La particule peut alors se déplacer n'importe où dans l'espace à droite du point x_D; ce mouvement est infini.

Supposons enfin que le puits de potentiel ait la forme de la courbe représentée sur la figure 45. De part et d'autre du point M les deux branches de la courbe potentielle sont ascendantes. Posons que pour $x = \pm\infty$, la fonction $U(x)$ s'annule, ce qui revient à dire que l'axe des x est *asymptote* pour la courbe potentielle. Nous pouvons affirmer alors que *le mouvement de la particule sera fini si son énergie totale est négative et infini si son énergie totale est positive.*

Pour donner une description qualitative du mouvement d'une particule dans un champ de force d'énergie potentielle $U(x)$, nous envisagerons l'expérience suivante. Fabriquons une petite piste de toboggan parfaitement rigide et parfaitement lisse ayant exactement le même profil que la courbe potentielle $U = U(x)$ (par exemple,

celui de la courbe représentée sur la figure 44). Disposons cette piste dans un champ de pesanteur homogène et plaçons-y, en un point élevé, une petite bille. Le mouvement qu'effectuera cette bille sous l'action du champ de la pesanteur reproduira presque exactement le mouvement d'un point matériel soumis à l'action du champ de force considéré $U = U(x)$, à condition que l'on ait convenablement ajusté l'énergie totale de la bille. Ce modèle présente quelques écarts au comportement idéal car le mouvement de la bille sur la piste s'accompagne de sa rotation qui consomme une partie de son énergie. Il aurait

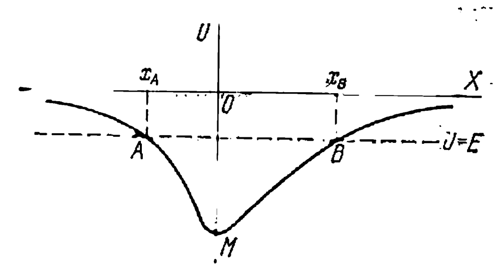


Fig. 45

reproduit tous les traits caractéristiques du mouvement étudié si la bille au lieu de rouler sur la piste avait glissé dessus sans frottement. Une telle bille placée au départ au point A, sans vitesse initiale (fig. 44), aurait effectué des oscillations le long de la courbe AMB entre les points extrêmes A et B. Si on l'avait placée au point D, la bille aurait pu surmonter la barrière de potentiel BNC et « s'échapper à l'infini ».

6. Les mouvements finis satisfont *au théorème* dit *de viriel*, qui trouve de nombreuses applications dans divers domaines de la physique. Ce théorème fut énoncé et démontré par Clausius (1822-1888). Pour un système quelconque de points matériels on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\sum pr = \sum rF + \sum pv,$$

puisque $\dot{p} = F$ et $\dot{r} = v$ (la sommation est étendue à tous les points matériels du système). Le dernier terme du second membre est le double de l'énergie cinétique du système: $2K = \sum pv = \sum mv^2$, ce qui permet de récrire l'égalité précédente comme suit

$$K = -\frac{1}{2}\sum rF + \frac{d}{dt}\sum \frac{1}{2}(pr). \qquad (25.9)$$

La quantité $-\frac{1}{2}\sum rF$ s'appelle le *viriel des forces* agissantes du système.

Désignons par *valeur moyenne dans le temps de la fonction f (t)* dans *l'intervalle de temps (t, t + T)* la quantité définie par l'expression

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} f(t')\, dt'. \qquad (25.10)$$

Si la fonction $f(t)$ est périodique, on prend pour temps T sa période et si elle n'est pas périodique mais limitée dans le temps, on prend un intervalle de temps T suffisamment grand et on passe à la limite

$$\bar{f} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} f(t')\, dt', \qquad (25.11)$$

en supposant naturellement que la limite existe. Si $f(t)$ est la dérivée d'une fonction limitée dans le temps: $f = \frac{d\varphi}{dt}$, on a $\bar{f} = 0$. En effet,

$$\bar{f} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} \frac{d\varphi}{dt'}\, dt' = \lim_{T \to \infty} \frac{\varphi(t+T) - \varphi(t)}{T}.$$

Retenant ce résultat, prenons la valeur moyenne dans le temps de (25.9) en faisant tendre T vers l'infini. Pour un mouvement fini le dernier terme de (25.9) s'annule et nous aurons

$$\bar{K} = -\frac{1}{2} \overline{\sum rF}. \qquad (25.12)$$

Pour un mouvement fini la valeur moyenne dans le temps de l'énergie cinétique est égale à la valeur moyenne dans le temps du viriel des forces agissant dans le système. C'est l'énoncé du théorème de viriel de Clausius.

PROBLÈMES

1. Déterminer le rapport des énergies potentielles de déformation U_1 et U_2 de deux ressorts de coefficients d'élasticité k_1 et k_2 dans les deux cas suivants: a) les ressorts attachés l'un à l'autre sont soumis à l'action d'un poids P (fig. 46, *a*); b) les ressorts sont fixés à un support par une de leurs extrémités, les deux autres extrémités étant réunies par une tige ; en un certain point de cette tige on suspend un poids P qui communique aux deux ressorts le même allongement (fig. 46, *b*). On négligera les déformations des ressorts dues à leurs poids propres.

R é p o n s e. a) $\frac{U_1}{U_2} = \frac{k_2}{k_1}$; b) $\frac{U_1}{U_2} = \frac{k_1}{k_2}$.
Si l'un des ressorts a une dureté beaucoup plus grande que l'autre, pratiquement la totalité de l'énergie potentielle sera accumulée pour le cas a) dans le ressort de moindre dureté et pour le cas b) dans le ressort de plus grande dureté.

2. Deux protons de même énergie $E = 0{,}5$ MeV volent l'un vers l'autre et entrent en collision directe. A quelle distance peuvent-ils se rapprocher si on ne tient compte que de leurs interactions coulombiennes?

R é p o n s e. $r = \frac{e^2}{2E}$, e étant la charge du proton. Pour effectuer les calculs il est recommandé de modifier la formule en y posant $E = eV$; on trouve

alors $r = \frac{e}{2V} = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm ($2V = 10^6$ V). Les expériences sur la diffusion des particules nucléaires ont montré que le rayon d'action des forces nucléaires est de l'ordre de 10^{-13} cm. De ce fait, dans le calcul du choc des protons d'une énergie supérieure à 0,5 MeV environ, on doit faire intervenir les forces nucléaires en plus des forces électrostatiques.

3. Trois électrons se trouvent à l'état de repos aux sommets d'un triangle équilatéral, de côté $a = 1$ cm. Ensuite ils se mettent en mouvement sous l'action

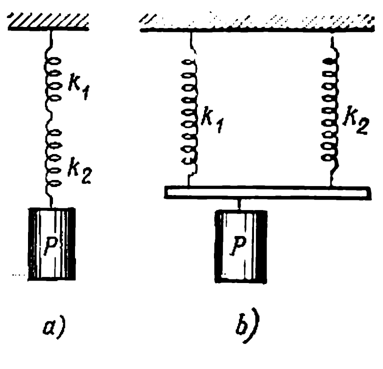


Fig. 46

des forces de répulsion mutuelle. Calculer la valeur limite de leurs vitesses.

Réponse. $v = \sqrt{\frac{2e^2}{ma}} = 2{,}2 \cdot 10^4$ cm/s.

4. Postuler dans le problème précédent que les vitesses sont relativistes et trouver pour quelles distances a on peut utiliser l'approximation non relativiste.

Réponse. $v = c\,\frac{\sqrt{2m_0c^2\frac{e^2}{a} + \frac{e^4}{a^2}}}{m_0c^2 + \frac{e^2}{a}}$.

L'approximation non relativiste est valable pour

$$a \gg \frac{e^2}{m_0c^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

5. Pour quelles valeurs de la distance a du problème 3 les corrections quantiques sont-elles superflues?

Réponse. Pour $a \gg \frac{h^2}{2me^2} \approx 10^{-7}$ cm.

6. Quatre électrons sont placés à l'état de repos aux sommets d'un carré de côté $a = 1$ cm. Aussitôt après y avoir été placés, ils se mettent en mouvement sous l'action des forces de répulsion mutuelle. Calculer leurs vitesses maximales.

Réponse. $v = \sqrt{\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{e^2}{ma}} = 2{,}6 \cdot 10^4$ cm/s.

7. Un point matériel effectue un mouvement fini à une dimension entre les points de rebroussement x_A et x_B dans un champ à forces conservatives (voir fig. 45). Démontrer que le temps qu'il met pour aller de x_A vers x_B est égal au temps qu'il mettra pour aller en sens inverse de x_B jusqu'à x_A.

8. Un point matériel (par exemple une petite bille suspendue à un ressort) oscille, sous l'action de la force quasi élastique $F = -kx$, le long de l'axe des X autour de sa position d'équilibre. Démontrer à l'aide du théorème de viriel que les valeurs moyennes dans le temps des énergies cinétique et potentielle sont égales pour ces oscillations.

9. Une petite bille parfaitement élastique effectue un mouvement de haut en bas et de bas en haut dans un champ de pesanteur homogène en rebondissant à chaque fois sur le sol conformément aux lois du choc élastique. Trouver la relation entre les valeurs moyennes dans le temps de son énergie cinétique $\overline{K}$ et de son énergie potentielle $\overline{U}$.

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées en un point du sol et dirigeons l'axe des X suivant la verticale ascendante en ce point afin que la force de pression qu'exerce le sol sur la bille n'influe pas sur la valeur du viriel (elle ne se manifeste que pour des positions de la bille où $x = 0$). On ne tiendra compte que de la force de pesanteur $F = -mg$ (le signe moins apparaît parce que cette force est dirigée vers le bas, le long du sens négatif de l'axe des X). Le viriel de cette force est égal à $-{}^1/_2\, Fx = {}^1/_2\, mgx = {}^1/_2\, U$. Appliquant le théorème de viriel, nous trouvons

$$\overline{K} = \frac{1}{2}\,\overline{U}.$$

§ 26. Choc parfaitement inélastique

1. Un cas intéressant d'énergie mécanique perdue sous l'action de forces dissipatives est celui du *choc parfaitement inélastique*. On appelle ainsi la collision de deux corps à la suite de laquelle ils s'unissent et poursuivent leur mouvement comme un seul corps. C'est ce qui se produit, par exemple, lorsqu'on tire une balle de fusil dans un sac de sable suspendu à une corde. La balle bloquée par le sable reste dans le sac et se meut ensuite avec lui. Lorsque deux boules en argile entrent en collision, elles se collent généralement l'une à l'autre et se meuvent ensuite comme un seul corps. Une telle collision illustre le cas d'un choc qui est pratiquement inélastique. Le cas où deux boules en plomb entrent en collision peut également être considéré avec une bonne approximation comme un choc parfaitement inélastique.

Les phénomènes physiques qui accompagnent le choc de deux corps sont assez compliqués. Les corps entrant en collision se déforment avec apparition de forces élastiques et de forces de frottement, dans les corps apparaissent des oscillations et des ondes, etc. Mais si le choc est inélastique, tous ces processus s'amortissent finalement et les deux corps accolés se mettent ensuite en mouvement, se comportant comme un seul corps solide. On peut calculer sa vitesse sans avoir à élucider au préalable le mécanisme du phénomène, en appliquant simplement la loi de conservation de l'impulsion.

Etudions un choc parfaitement inélastique en prenant pour exemple la collision de deux boules se déplaçant le long de la droite joignant leurs centres avec des vitesses v_1 et v_2 (fig. 47). On dit que l'on a affaire dans ce cas à un choc *central*. Désignons par v la vitesse

commune des boules accolées après collision. Selon la loi de conservation de l'impulsion

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\,v,$$

m_1 et m_2 étant les masses de deux boules. On en tire

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \tag{26.1}$$

Les énergies cinétiques du système avant et après collision sont respectivement égales à

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2, \quad K_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v^2.$$

De là on obtient aussitôt

$$K_1 - K_2 = \frac{1}{2}\mu\,(v_1 - v_2)^2, \tag{26.2}$$

où $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ est la masse réduite des deux boules. Ainsi *le choc de deux boules parfaitement inélastiques s'accompagne d'une perte de*

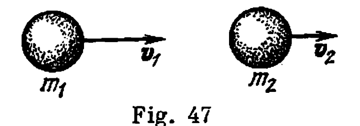


Fig. 47

l'énergie cinétique du mouvement macroscopique, qui est égale à la moitié du produit de la masse réduite des boules par le carré de leur vitesse relative.

2. Le choc inélastique de deux corps doit toujours donner lieu à une *diminution* de l'énergie cinétique du mouvement macroscopique. En effet, selon le théorème de König, l'énergie cinétique d'un système mécanique comporte deux parties: 1) l'énergie cinétique du mouvement du système tout entier à la vitesse de son centre de masse; 2) l'énergie cinétique du mouvement relatif des points matériels résultant d'une décomposition imaginaire du système, autour de son centre de masse. Comme énergies cinétiques, ces deux parties sont essentiellement positives. En vertu du théorème du mouvement des centres de masse, la collision des corps n'affecte pas la première partie. Quant à la seconde partie, elle doit disparaître après collision puisqu'après collision inélastique le mouvement relatif des parties du système cesse d'exister, laissant la place au mouvement d'ensemble des deux parties du système à la vitesse de son centre de masse. C'est pour cela que la collision entraîne une diminution de l'énergie cinétique totale du mouvement macroscopique. Par contre l'énergie interne du corps augmente (voir paragraphe suivant).

3. Il est facile d'expliquer pourquoi on trouve dans la formule (26.2) la masse réduite et la vitesse relative des boules entrant en collision. Conformément à la formule générale (25.7) la perte d'énergie cinétique est égale en valeur absolue au travail des forces dissipatives s'exerçant dans le système pendant le choc. Nous avons montré au § 24 que pour calculer ce travail, on pouvait poser

que l'une des boules était immobile et l'autre en mouvement par rapport à la première. Le mouvement relatif de deux points matériels est décrit par l'équation $\mu\ddot{r} = F$ qui est analogue à la deuxième loi de Newton. De ce fait le travail qu'effectue la force dissipative F pendant tout le temps que dure le choc est égal à $\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$. C'est cette quantité qui détermine la diminution d'énergie cinétique pendant le même intervalle de temps.

Lorsque deux corps entrent en collision, l'effet destructeur accompagnant le choc ne dépend que de leur vitesse relative $v_1 - v_2$. La partie de l'énergie cinétique dont dépend l'effet destructeur est égale à $\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$. Le reste de l'énergie cinétique est lié au mouvement du centre de masse du système; cette énergie ne varie pas à la collision et par suite ne contribue pas à l'effet destructeur. Lorsque, par exemple, deux automobiles identiques animées de vitesses v identiques entrent en collision frontale, l'énergie déterminant la destruction est égale à

$$\frac{1}{2}\mu(v_1-v_2)^2=\frac{1}{2}\frac{mm}{m+m}(2v)^2=mv^2,$$

ce qui signifie que la totalité de l'énergie cinétique est utilisée pour l'effet destructeur. Ce résultat est évident sans calcul puisqu'après collision les deux automobiles doivent s'arrêter, indépendamment des dégâts causés. On obtiendra le même effet destructeur lorsqu'une voiture fonce à une vitesse $2v$ sur une voiture immobile. Dans ce cas, l'énergie cinétique initiale du système est égale à $\frac{1}{2}m(2v)^2 = 2mv^2$, donc elle est deux fois plus grande que dans le cas précédent, mais la moitié seulement de cette énergie est destructrice.

Les effets destructeurs des accidents sont évidemment regrettables. Mais parfois, par exemple lors de l'étude des transformations que subissent les noyaux atomiques entrant en collision avec des particules élémentaires, l'effet destructeur est l'objet même de l'étude. On s'attache donc à renforcer l'effet destructeur. D'après ce qui vient d'être exposé, on y parvient par la mise en mouvement des deux particules entrant en collision. *Pour une même dépense d'énergie l'effet destructeur est le plus grand lorsque le centre de masse des particules entrant en collision reste immobile dans le référentiel lié au laboratoire.* Ce principe est mis en œuvre dans les *accélérateurs* à faisceaux de sens opposés. Les accélérateurs modernes sont des installations compliquées et coûteuses, utilisées pour communiquer une grande énergie aux particules chargées — électrons, protons, etc. On les utilise en physique nucléaire et en physique des particules élémentaires pour l'étude des processus se produisant lors de chocs de particules de grande énergie. D'habitude on dirige les particules accélérées sur une cible immobile; c'est pendant l'impact des particules sur la cible qu'ont lieu les phénomènes que l'on cherche à étudier. Le même effet peut être réalisé, mais avec une dépense d'énergie moindre, en imprimant à la cible un mouvement dirigé en sens inverse du faisceau de particules accélérées. On utilise alors comme cible un second faisceau de particules accélérées se propageant en sens opposé au premier. Si les masses et les vitesses des particules sont les mêmes dans les deux faisceaux, selon la mécanique non relativiste la dépense d'énergie sera diminuée de deux fois. Mais comme dans les accélérateurs on a affaire à des *faisceaux relativistes*, les calculs doivent être fondés sur la mécanique relativiste. Il s'est avéré que dans le cas relativiste le gain d'énergie est en principe illimité si les vitesses des particules s'approchent de la vitesse de la lumière (cf. t. IV).

4. Pendant la collision se manifestent dans le système des forces dissipatives qui diminuent l'énergie cinétique du mouvement macro-

scopique. On ne peut donc appliquer la loi de conservation de l'énergie sous sa forme mécanique aux processus évoluant durant le choc. Mais une fois le choc terminé et les deux corps unis pour n'en former qu'un seul, on peut utiliser la loi de conservation de l'énergie (à condition toutefois qu'aucune force dissipative n'agisse plus).

Etudions à titre d'exemple le problème du *pendule balistique*. Ce dispositif est utilisé pour mesurer la vitesse des balles et des obus. Le pendule balistique est généralement constitué par une grosse caisse remplie de sable qui peut osciller autour d'un axe horizontal. Une balle (ou un obus) atteignant la caisse y est stoppée et le pendule s'écarte de sa position d'équilibre. Pour simplifier le calcul nous admettrons que nous avons affaire à un pendule mathématique. Le processus de collision est à ce point rapide que durant le choc le pendule n'arrive pas à s'écarter, d'un angle notable, de sa position d'équilibre. Le choc ne fait que mettre le pendule en mouvement et il s'agit avant tout de déterminer la vitesse v de ce mouvement aussitôt après le choc.

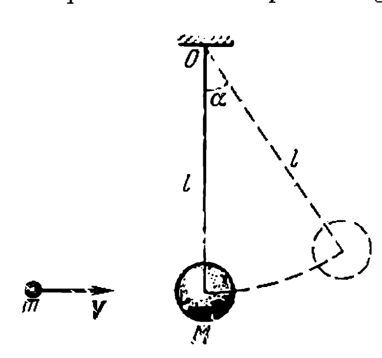


Fig. 48

Avant le choc, lorsque le pendule était en équilibre, les forces extérieures auxquelles il était soumis (force de pesanteur et tension du fil de suspension) se compensaient. Pendant le choc l'équilibre de ces forces se trouve compromis et, de plus, apparaissent de nouvelles forces, les forces de frottement par exemple. Néanmoins, tant que dure le choc, on peut négliger toutes ces forces parce que leur résultante est infiniment petite par rapport à la force qu'applique au pendule le projectile. On peut donc admettre que le système constitué par le pendule et le projectile (fig. 48) est un système fermé pendant toute la durée du choc; on peut alors lui appliquer la loi de conservation de l'impulsion. C'est à partir de cette loi que l'on détermine la vitesse cherchée v qu'acquiert le système aussitôt après le choc:

$$v = \frac{m}{M+m} V,$$

V étant la vitesse du projectile avant la collision. Dès que le choc est terminé, les forces dissipatives (intérieures) n'agissent plus et on peut dès lors appliquer la loi de conservation de l'énergie. La vitesse v doit être considérée comme la vitesse initiale avec laquelle le pendule commence à osciller en position inférieure. Dans cette position le pendule et le projectile possèdent l'énergie cinétique $^1/_2\ (M + m)\ v^2$ qui, le pendule s'étant écarté de sa position d'équilibre, se

transforme en énergie potentielle $(M+m)\,gh$. On en déduit la hauteur à laquelle peut monter le pendule

$$h=\frac{v^2}{2g}=\frac{1}{2g}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 V^2. \tag{26.3}$$

Ayant mesuré la hauteur h, on peut calculer la vitesse V du projectile.

Ce serait une erreur grossière que de raisonner de la façon suivante. Dans la position inférieure du pendule (avant le choc), l'énergie du système est égale à l'énergie cinétique du projectile $^1/_2\, mV^2$. Lorsque le pendule monte, cette énergie se transforme en l'énergie potentielle $(M+m)\,gh$. Ce raisonnement conduit à la formule erronée

$$h=\frac{1}{2g}\,\frac{m}{M+m}\,V^2.$$

Comme dans le cas du pendule balistique $m \ll M$, cette formule donne une valeur de h plusieurs fois trop grande. Ce n'est évidemment que lorsque $m \gg M$ que les deux formules coïncident pratiquement. L'erreur du raisonnement indiqué réside dans le fait qu'il ne tient pas compte des pertes d'énergie mécanique pendant le choc.

Dans les calculs pratiques on exprime la hauteur h en fonction de l'angle de déviation α du pendule par rapport à sa position d'équilibre, sa mesure étant plus facile à faire. On a $h = l\,(1-\cos\alpha) = 2l\sin^2(\alpha/2)$, l étant la longueur du pendule. Avec cette expression la formule (26.3) devient

$$V=2\,\frac{M+m}{m}\,\sqrt{gl}\,\sin\frac{\alpha}{2}\approx 2\,\frac{M}{m}\,\sqrt{gl}\,\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{26.4}$$

§ 27. L'énergie interne. Loi physique générale de la conservation de l'énergie

1. Une diminution d'énergie cinétique sans accroissement correspondant de l'énergie potentielle, dont il a été question dans le paragraphe précédent, se manifeste non seulement dans les chocs inélastiques, mais dans bien d'autres processus encore. Par exemple, les mouvements se produisant dans un système fermé où s'exercent des forces de frottement s'atténuent jusqu'à l'arrêt complet et la réserve d'énergie cinétique du système diminue en conséquence. L'énergie potentielle peut se perdre elle aussi. Si, par exemple, on allonge un ressort au-delà de sa limite d'élasticité et qu'on l'abandonne à lui-même, il ne revient pas à son état initial, car il y subsiste un allongement résiduel. Le travail que peut fournir un ressort ainsi tendu est inférieur au travail qui avait été dépensé pour l'allonger. Dans tous ces cas on constate une perte d'énergie mécanique. La mécanique macroscopique formelle interprète l'existence de ces pertes en disant qu'un travail doit être effectué contre les forces dissipatives agissant dans le système. Une telle interprétation est purement formelle et non physique, puisqu'elle néglige la nature physique des forces dissipatives.

2. Chaque fois qu'un système subit une perte d'énergie mécanique, il est sûrement le siège de changements internes. Si on mesure, par exemple, à l'aide d'un thermomètre sensible ou d'un thermocouple la température des boules avant et après collision, on constate que le choc détermine un léger échauffement. La même chose se produit lors du frottement ou d'une déformation résiduelle. Si un frottement intense dure longtemps, l'échauffement devient tellement manifeste qu'on le décèle sans avoir recours à des mesures. Les peuples primitifs font du feu en frottant deux morceaux de bois. Si on fixe sur l'axe d'un moteur un disque en carton (d'une épaisseur de 1 mm environ) que l'on mettra ensuite en rotation rapide, on pourra scier une planche de bois en l'appliquant contre le bord du disque en rotation (scie en carton). Cet effet de sciage s'explique par l'intense dégagement de chaleur produit par le frottement. La planche se carbonise au point de son contact avec le disque en carton et se trouve ainsi tranchée. Le disque en carton, lui, n'est pas détruit car il subit par rotation un refroidissement intense dû à l'air ambiant. La surface de coupe de la planche est lisse et bien polie, d'une couleur brunâtre due à la carbonisation. Dans cette expérience le rôle essentiel revient aux tensions qui apparaissent dans le disque du fait de sa rotation et lui confèrent une dureté suffisante. On ne pourrait couper la planche en la faisant tourner autour d'un disque en carton immobile.

Les pertes d'énergie mécanique peuvent faire apparaître des effets plus compliqués tels que les effets observés dans l'expérience suivante. On enroule sur une poulie en bois fixée sur l'arbre d'une dynamo un fil long et solide. Le fil passe par une poulie fixée au plafond et on attache à son extrémité libre un poids de plusieurs kilogrammes. En faisant tourner l'arbre de la dynamo, on fait monter le poids jusqu'au plafond. Le circuit de la dynamo peut être branché sur une petite lampe à incandescence. Si on laisse descendre le poids sans fermer le circuit, la dynamo, bien que mise en rotation par la descente du poids, ne générera pas de courant électrique. Le poids descend dans ce cas avec accélération, ce qui signifie que son énergie potentielle est convertie en énergie cinétique. Si on refait l'expérience mais en fermant le circuit de la lampe, on verra la lampe s'allumer lorsque le poids aura descendu la moitié environ de son trajet vers le sol, et à partir de ce moment la descente du poids et la vitesse de rotation de la dynamo deviendront plus lentes. Le poids s'abaisse jusqu'au sol à vitesse constante et la lampe reste allumée jusqu'à ce que le poids atteigne le sol. L'énergie potentielle du poids diminue constamment pendant sa chute, mais elle ne disparaît pas ici sans laisser de trace puisque la dynamo produit pendant ce temps un courant électrique qui dégage de la chaleur dans le filament de la lampe.

3. La mécanique macroscopique tient compte non seulement de l'énergie cinétique du mouvement macroscopique des corps ou de leurs parties macroscopiques mais aussi de leur énergie potentielle. Mais elle néglige complètement la structure atomique interne des substances. Pendant les chocs, les frottements et autres phénomènes de ce genre, l'énergie cinétique du mouvement visible des corps ne disparaît pas, elle ne fait que passer dans l'énergie cinétique du mouvement désordonné et invisible des atomes et des molécules des corps, ainsi que dans l'énergie potentielle de leurs interactions mutuelles. Cette partie de l'énergie porte le nom d'*énergie interne*. Le mouvement désordonné des atomes et des molécules est ressenti par nos sens sous forme de *chaleur*. Telle est l'interprétation physique de l'apparente perte d'énergie mécanique accompagnant les chocs, les frottements et autres phénomènes analogues.

L'interprétation de la chaleur par le mouvement désordonné des

atomes et des molécules ne fut définitivement admise que dans la seconde moitié du XIXe siècle et constitua un événement majeur. C'est à la même époque que s'affirma l'idée que la loi de conservation de l'énergie est une *loi générale de la physique* ne souffrant aucune exception. Cette loi affirme que *l'énergie ne peut être ni créée ni annihilée, ne pouvant que changer de forme.* Cet énoncé exige que la notion d'énergie soit élargie par l'introduction d'autres formes d'énergie: l'énergie du champ électromagnétique, l'énergie nucléaire, etc. On doit remarquer qu'il est actuellement encore impossible de donner une classification définitive des diverses formes d'énergie. On ne pourrait le faire que si toutes les lois de la Nature nous étaient connues et si le développement de la Science, ne serait-ce que dans ses grandes lignes, était parachevé.

La subdivision de l'énergie en énergies cinétique et potentielle n'a de sens qu'en mécanique, puisqu'on n'embrasse pas ainsi toutes les formes d'énergie. D'autre part, bien souvent la classification de l'énergie dépend du point de vue où l'on se place. Par exemple, en mécanique macroscopique, l'énergie élastique d'un gaz parfait comprimé est considérée comme une énergie potentielle. Mais du point de vue de la physique moléculaire, l'élasticité du gaz est attribuée à l'agitation thermique de ses molécules et la même énergie doit donc être considérée comme une énergie cinétique.

4. Le principe de conservation de l'énergie, outre ses nombreuses applications à des phénomènes déjà connus, sert de guide dans des domaines encore inexplorés. Dans tous les cas où ce principe semble être en défaut, on peut être certain qu'il existe de nouveaux phénomènes qui ne cadrent pas avec les conceptions scientifiques en usage. C'est ce qui se produisit lors de la découverte de la *radioactivité* et du *neutrino.* L'expérience laissait apparaître des écarts aux lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion dans les phénomènes de désintégration β des noyaux atomiques. Pauli (1900-1958) émit alors l'hypothèse, qui fut confirmée plus tard par l'expérience, qu'à la désintégration β participe à côté des particules chargées connues (électrons et noyaux atomiques) une nouvelle particule neutre que l'on dénomma *neutrino.* C'est cette particule qui emportait avec elle la partie manquante d'énergie et d'impulsion. Son interaction avec la matière étant très faible, son observation est très délicate. (Plus tard, lorsqu'on découvrit qu'à chaque particule correspond une antiparticule, il s'avéra que dans les désintégrations β électroniques apparaissait non pas le neutrino, mais l'*antineutrino.*)

Le principe physique général de conservation de l'énergie concerne donc non seulement les phénomènes qu'étudie la mécanique macroscopique, mais aussi les phénomènes physiques échappant à cette mécanique. Il ne peut donc être déduit des équations de la mécanique macroscopique et doit être considéré comme *une des plus larges généralisations des données expérimentales.*

§ 28. Choc parfaitement élastique

1. Le *choc parfaitement élastique* permet de mettre en évidence d'intéressantes transformations de l'énergie cinétique en énergie potentielle et vice versa. Un choc est dit parfaitement élastique si l'énergie interne du corps reste inchangée. Le choc de corps macroscopiques n'est jamais parfaitement élastique, mais peut en être proche. C'est ce qui se produit lors du choc de billes de billard en ivoire ou en une matière plastique convenablement choisie. Un choc parfaitement élastique peut se réaliser lors de la collision de particules atomiques, nucléaires ou élémentaires. La possibilité de réalisation d'un cas aussi parfait est déterminée par les *lois quantiques*. Les états internes et les valeurs correspondantes de l'énergie interne des particules atomiques sont *discrets* (*quantifiés*). Après collision les particules peuvent poursuivre leurs mouvements sans que leurs états internes en soient affectés. Une telle collision est parfaitement élastique. Il en sera ainsi toutes les fois que l'énergie cinétique des particules entrant en collision est insuffisante pour faire passer ne serait-ce qu'une seule particule de son état *normal* à l'état *excité* le plus proche qui est un état de plus grande énergie interne. Pour des énergies cinétiques plus grandes, le choc peut donner lieu à l'excitation d'une seule ou des deux particules, avec accroissement de leurs énergies internes. Il est également possible que le choc concerne des particules préalablement excitées et qu'après collision leurs énergies internes diminuent. Dans ces différents cas le choc sera dit *inélastique*.

2. Etudions d'abord le cas de *chocs centraux* de billes parfaitement élastiques. Dans ce cas, avant le choc, les vitesses v_1 et v_2 sont dirigées suivant la droite reliant entre eux les centres des billes. Cette droite s'appelle *ligne des centres*. Lors du choc, l'énergie cinétique des billes $^1/_2(m_1 + m_2)\, V^2$ liée au mouvement de leur centre de masse ne peut varier car la vitesse du centre de masse ne varie pas. Ne peut varier que l'énergie cinétique $^1/_2\mu\,(v_1 - v_2)^2$ du mouvement relatif des billes. Lorsque le choc est parfaitement élastique, les billes s'aplatissent au moment du choc et une partie de l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle des déformations élastiques. A un certain instant la totalité de l'énergie cinétique du mouvement relatif $^1/_2\, \mu\, (v_1 - v_2)^2$ se transforme en énergie potentielle des billes élastiquement déformées. A cet instant, les billes sont analogues à des ressorts comprimés qui ont tendance à revenir à l'état non déformé. Aussitôt après commence le processus inverse de transformation de l'énergie des déformations élastiques en énergie cinétique du mouvement de translation des billes. Lorsque ce processus prend fin, les billes partent en tous sens et ne sont plus déformées. L'énergie cinétique de translation reprend sa valeur initiale avant collision. Pour les corps réels ce processus s'accompagne de l'apparition de perturbations élastiques se propageant dans les billes à la

vitesse du son, de l'émission d'ondes sonores, de frottements internes et de déformations résiduelles. Après collision, une partie de l'énergie se perd sous forme de perturbations élastiques, de mouvements intérieurs et d'ondes sonores émises dans le milieu ambiant. Cette partie de l'énergie se convertit en fin de compte en énergie thermique (interne) et peut être très petite ; dans le cas limite de billes parfaitement élastiques, elle est nulle.

3. Les vitesses v_1' et v_2' des billes après le choc se déduisent aisément des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion :

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_2'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \tag{28.1}$$

L'une de ces équations étant linéaire et l'autre du second degré, le système (28.1) doit avoir deux solutions pour v_1' et v_2'. L'une des solutions est évidente $v_1' = v_1$ et $v_2' = v_2$. Mais cette solution ne satisfait pas aux conditions du problème puisqu'elle implique que le choc ne s'est pas produit, les vitesses des billes étant inchangées. L'existence d'une telle solution est inévitable. On peut en effet écrire les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion pour deux états quelconques du système séparés par un intervalle de temps Δt. Mais les lois de conservation n'impliquent pas par elles-mêmes que la collision a eu lieu. L'occurrence du choc doit être spécialement spécifiée. Si le choc ne s'est pas produit, les vitesses des billes ne peuvent devenir différentes et la solution est $v_1' = v_1$ et $v_2' = v_2$. Pour trouver la solution correspondant au cas où le choc a eu lieu, nous devons évidemment imposer la condition d'une *variation* des vitesses des billes, i.e. $v_1' \neq v_1$, $v_2' \neq v_2$. Nous écrirons alors les équations (28.1) sous la forme suivante :

$$m_1 (v_1' - v_1) = m_2 (v_2 - v_2'), \qquad m_1 (v_1'^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - v_2'^2).$$

Puisque les quantités $v_1' - v_1$ et $v_2' - v_2$ sont différentes de zéro, on peut diviser ces équations membre à membre, ce qui donne

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'.$$

Le problème se trouve ainsi ramené à la résolution d'un système de deux équations linéaires. En les résolvant on trouve l'unique solution

$$v_1' = -v_1 + 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad v_2' \quad -v_2 + 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{28.2}$$

vérifiant la condition du problème.

4. Il est utile de donner ici un autre procédé de résolution de ce même problème simplifiant les calculs et mettant mieux en relief la structure des formules finales. Etudions d'abord le processus de collision dans le *référentiel lié au centre de masse*, ce qui implique que

celui-ci est immobile dans ce référentiel. Par rapport à un référentiel immobile (référentiel *de laboratoire*) le centre de masse se meut à la vitesse

$$V=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}. \tag{28.3}$$

Nous désignerons les vitesses dans le référentiel du centre de masse par les mêmes symboles que ci-dessus, mais affectés de l'indice O. Dans ce référentiel, l'impulsion totale est égale à zéro et les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie s'écrivent

$$\begin{gathered} m_1v'_{10}+m_2v'_{20}=m_1v_{10}+m_2v_{20}=0, \\ \frac{1}{2}m_1v'^2_{10}+\frac{1}{2}m_2v'^2_{20}=\frac{1}{2}m_1v^2_{10}+\frac{1}{2}m_2v^2_{20}. \end{gathered} \tag{28.4}$$

Ce système a deux solutions que l'on indiquera sans faire de calculs; la première solution

$$v'_{10}=v_{10},\quad v'_{20}=v_{20}$$

ne répond pas aux conditions du problème. La deuxième solution est la seule valable:

$$v'_{10}=-v_{10},\quad v'_{20}=-v_{20}.$$

Cela montre que dans le référentiel lié au centre de masse le choc donne simplement lieu à un changement de signe de chacune des vitesses.

Passons maintenant au référentiel de laboratoire. Il est évident que $v_{01}=v_1-V$, $v'_{01}=v'_1-V$, etc. Par suite

$$(v'_1-V)=-(v_1-V),\quad (v'_2-V)=-(v_2-V),$$

d'où

$$v'_1=-v_1+2V,\quad v'_2=-v_2+2V. \tag{28.5}$$

En substituant les valeurs de V tirées de (28.3) nous trouvons les formules (28.2).

5. Considérons le cas où la deuxième bille est initialement immobile ($v_2=0$). On a alors

$$v'_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1,\quad v'_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1.$$

Si $m_1>m_2$, la première bille continuera à se mouvoir dans le sens initial et si $m_1<m_2$ elle ira en sens inverse. Pour $m_1=m_2$, la première bille doit s'arrêter et la seconde se mettre en mouvement à la vitesse que possédait initialement la première bille. D'une manière générale avec $m_1=m_2$, les formules (28.2) donnent

$$v'_1=v_2,\quad v'_2=v_1,$$

i.e. *lorsque deux billes parfaitement élastiques et de même masse entrent en collision, elles échangent leurs vitesses.*

Considérons une rangée de billes parfaitement élastiques, de même masse, en contact les unes avec les autres, dont les centres sont disposés sur une même droite (fig. 49). Pour les démonstrations en salle de cours, les billes sont suspendues à des fils et non alignées sur



Fig. 49

une table afin d'éviter qu'elles entrent en rotation par suite du frottement entre les billes et la surface de la table. Imposons une déviation par rapport à la verticale à la bille *1*, puis lâchons-la. La bille *1* entre en collision avec la bille *2* à la vitesse v et s'arrête en ransmet-



Fig. 50

tant sa vitesse à la bille *2*. La bille *2* se comportera de la même façon et s'arrêtera après son choc avec la bille *3*, cette dernière acquérant la vitesse v. Ce processus se propage ainsi de gauche à droite; finalement la dernière bille de la rangée sera rejetée à droite à la vitesse v, toutes les autres restant immobiles.

Imposons maintenant une déviation à deux billes à la fois, puis lâchons-les. En passant par leurs positions initiales, elles auront même vitesse v et, à cette vitesse, elles heurteront la bille avoisinante (fig. 50). L'expérience montre que dans ce cas ce sont les deux dernières billes de la rangée qui seront mises en mouvement à la vitesse v, toutes les autres restant au repos. Cet effet s'interprète de la manière suivante. La bille *2* heurte la bille *3*; la bille *2* s'arrête et la bille *3* est lancée à la vitesse v. Mais aussitôt après la bille *2* est heurtée par la bille *1* et acquiert à nouveau la vitesse v. Par suite la bille *1* s'immobilise, tandis que les billes *2* et *3* se meuvent ensemble à la vitesse v. En reprenant le même raisonnement, nous constaterons que c'est la bille *2* qui s'immobilisera ensuite tandis que les billes *3* et *4* seront mises en mouvement, et ainsi de suite jusqu'à ce que les deux dernières billes soient mises en mouvement à la vitesse v, toutes les autres billes étant immobilisées. Au lieu de mettre en mouvement deux billes à la vitesse v, on peut en prendre *3*, *4*, etc.

Après le choc, on verra qu'un nombre égal de billes situées à la fin de la rangée seront mises en mouvement, toutes les autres restant immobiles.

6. Etudions maintenant un *choc décentré* entre deux billes élastiques. Le choc est décentré lorsque, à l'instant du choc, les directions des vitesses initiales ne coïncident pas avec la ligne des centres des billes. Décomposons à l'instant du choc la vitesse initiale de chacune des billes en ses composantes normale v_n et tangentielle v_t (l'une des composantes est dirigée suivant la ligne des centres

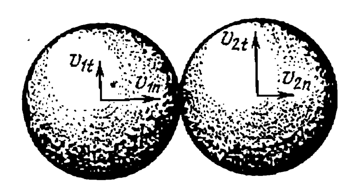


Fig. 51

et l'autre lui est perpendiculaire, fig. 51). Nous ferons de même avec la vitesse que les billes acquerront aussitôt après le choc. Les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie s'écrivent dans ce cas sous la forme suivante:

$$m_1v'_{1n}+m_2v'_{2n}=m_1v_{1n}+m_2v_{2n},\quad m_1v'_{1t}+m_2v'_{2t}=m_1v_{1t}+m_2v_{2t},$$
$$\frac{1}{2}m_1(v'^2_{1n}+v'^2_{1t})+\frac{1}{2}m_2(v'^2_{2n}+v'^2_{2t})=\frac{1}{2}m_1(v^2_{1n}+v^2_{1t})+\frac{1}{2}m_2(v^2_{2n}+v^2_{2t}).\qquad(28.6)$$

Nous n'avons que trois équations pour quatre inconnues v'_{1n}, v'_{1t}, v'_{2n}, v'_{2t}. Pour trouver la quatrième équation qui nous manque nous supposerons que *le choc ne fait pas apparaître de forces tangentielles.* En fait une telle supposition nous est imposée par la loi de conservation de l'énergie sous sa forme (28.6). En effet, si les vitesses tangentielles des billes entrant en collision étaient égales ($v_{1t} = v_{2t}$), le cas que nous étudions en ce moment se réduirait au problème du choc central que nous avons traité ci-dessus. Pour ce faire il suffirait de passer à un référentiel où $v_{1t} = v_{2t}$. Nous pouvons donc poser, sans restreindre la généralité, que $v_{1t} \neq v_{2t}$. Mais si dans cette situation le choc donnait naissance à des forces tangentielles de frottement de glissement, la conservation de l'énergie mécanique ne pourrait être assurée. Par suite, tout en postulant que le choc est parfaitement élastique, nous devons admettre encore que les billes sont *parfaitement lisses*, car ce n'est qu'alors que leur choc ne fera pas apparaître de forces tangentielles. S'il en est ainsi, il ne se produira aucune variation des vitesses tangentielles et nous pourrions ajouter aux équations (28.6) les équations $v'_{1t} = v_{1t}$ et $v'_{2t} = v_{2t}$. Ne subsisteront alors que les équations déterminant les vitesses normales qui ne se distinguent des équations (28.1) que par les notations utilisées. En définitive nous arrivons à la conclusion suivante.

Lors du choc de billes lisses et parfaitement élastiques leurs vitesses tangentielles ne varient pas, tandis que les vitesses normales varient exactement comme dans le cas d'un choc central. L'état de rotation des billes ne change pas à la suite de leur choc, puisqu'il ne pourrait changer que sous l'influence de forces tangentielles. *Si les billes sont identiques, leur choc donne lieu à un échange de leurs vitesses normales, les vitesses tangentielles restant inchangées.*

7. Examinons le cas particulier où la masse de l'une des billes est infiniment grande. Il est clair que la vitesse ne variera pas lors d'un

choc. Si nous faisons tendre son rayon vers l'infini, on aboutit à la limite au problème du choc d'une bille lisse et élastique contre une *paroi plane et lisse*. Rattachons le référentiel à cette paroi plane; on peut affirmer que la vitesse tangentielle d'une bille qui entre en collision avec cette paroi ne variera pas, tandis que sa vitesse normale changera de signe. Cela signifie que la paroi réfléchit la bille comme le ferait un miroir: le module de sa vitesse ne varie pas et l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

PROBLÈMES

1. Soit une bille de masse m_1 reposant sur une surface horizontale et attachée à un ressort dont le coefficient d'élasticité est k. L'autre extrémité du ressort est fixe (fig. 52). Cette bille subit un choc central élastique avec une deuxième

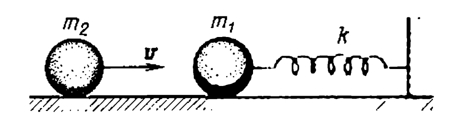


Fig. 52

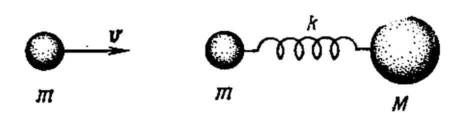


Fig. 53

bille de masse m_2 et de vitesse v, avec $m_2 < m_1$. Quelle sera la direction du mouvement de la deuxième bille après la collision? Calculer l'amplitude A des oscillations de la première bille après le choc.

Réponse. Après le choc, la deuxième bille se déplacera en sens inverse

$$A = \frac{2m_2 v}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m_1}{k}}.$$

2. Soit un système composé de deux billes de masses m et M liées l'une à l'autre par un ressort impondérable de coefficient d'élasticité k (fig. 53). Une troisième bille de masse m se déplaçant à la vitesse v le long de l'axe du ressort entre en collision avec la bille de masse m fixée au ressort (fig. 53). En admettant que les billes soient absolument indéformables, trouver après le choc les valeurs de: 1) l'énergie cinétique K du mouvement de tout le système considéré en bloc; 2) l'énergie interne E_{int} du système; 3) l'amplitude A des oscillations relatives des billes. On supposera qu'avant le choc le système était au repos et le ressort non déformé. Quelles billes peuvent être considérées comme absolument indéformables?

Réponse. 1) $K = \dfrac{(mv)^2}{2(M+m)}$; 2) $E_{\text{int}} = \dfrac{Mmv^2}{2(M+m)}$; 3) $A = v\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M+m)}}$.

3. Les noyaux de deutérium D et de tritium T réagissent conformément à l'équation

$$D + T \rightarrow {}^4He + n + 17{,}6 \text{ MeV}.$$

Les produits de cette réaction sont des neutrons n et des particules α, c'est-à-dire des noyaux d'hélium ^{4}He; la réaction libère une énergie de 17,6 MeV. Calculer la part d'énergie qu'emportent le neutron et la particule α. Les énergies cinétiques des particules avant réaction étaient négligeables.

Commentaire. Le deutérium est l'isotope de l'hydrogène de masse atomique égale à 2 ; le tritium est l'isotope de l'hydrogène de masse atomique 3 ; ^{4}He est l'hélium ordinaire de masse atomique 4.

Réponse. La particule α emporte 3,5 MeV et le neutron 14,1 MeV.

4. Les noyaux de deutérium D peuvent réagir entre eux en donnant un proton et un noyau de tritium T. Chaque proton emporte une énergie cinétique de 3 MeV. Quelle énergie cinétique emporte le noyau de tritium et quel est le rendement énergétique total de la réaction? Considérer comme négligeables les énergies cinétiques des particules avant réaction.

Réponse. L'énergie qu'emporte le noyau de tritium est de 1 MeV. Le rendement énergétique total de la réaction est de 4 MeV.

5. Les noyaux de deutérium peuvent aussi réagir selon l'équation

$$D + D \rightarrow {}^3He + n + 3{,}25 \text{ MeV}.$$

Calculer l'énergie emportée par le neutron et l'énergie emportée par le noyau d'hélium ^{3}He de masse atomique 3. Considérer comme négligeables les énergies cinétiques des particules avant réaction.

Réponse. L'énergie du neutron est de 2,44 MeV et celle du noyau ^{3}He est de 0,81 MeV.

6. Les protons qui apparaissent dans la réaction

$${}^3He + D \rightarrow {}^4He + p$$

ont une énergie de 14,6 MeV. Quelle est l'énergie du noyau d'hélium-4 (^{4}He) et quel est le rendement énergétique total de la réaction? Considérer comme négligeables les énergies cinétiques des particules avant réaction.

Réponse. Le noyau de ^{4}He emporte une énergie de 3,7 MeV et le rendement énergétique total de la réaction est de 18,3 MeV.

7. Une particule mobile entre en collision élastique avec une particule immobile de même masse. Démontrer qu'après un choc non central les particules se meuvent dans des directions rectangulaires. Quel sera leur mouvement dans le cas d'un choc central?

Solution. Soient v la vitesse de la première particule avant choc et v_1 et v_2 les vitesses de la première et de la seconde particule après choc. L'application des lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie conduit aux relations

$$v = v_1 + v_2, \qquad v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Elevons la première égalité au carré et soustrayons du résultat obtenu la deuxième égalité; nous obtenons $(v_1 v_2) = 0$. Si aucun des vecteurs v_1 et v_2 n'est nul, ce qui est le cas d'un choc non central, l'angle formé par ces vecteurs sera égal à 90°. Pour un choc central $v_1 = 0$, $v_2 = v$, ce qui signifie que les particules échangent leurs vitesses.

8. Dans une expérience de bombardement de l'hélium par des particules α d'énergie 1 MeV, on a constaté que la particule incidente était défléchie d'un angle de 60° par rapport à sa direction initiale. En supposant que les chocs sont élastiques, calculer l'énergie des particules défléchies et celle du noyau de recul.

Réponse. 1/4 MeV et 3/4 MeV.

9. Calculer la part d'énergie que perd une particule de masse m_1 lors de sa collision avec une particule immobile de masse m_2, en supposant qu'après

la collision la particule incidente se meut dans la même direction qu'avant le choc (pour $m_1 > m_2$) ou dans la direction opposée (pour $m_1 < m_2$). Montrer que la part d'énergie perdue est la même quelle que soit la particule mobile. Pour quelle valeur du rapport des masses m_1/m_2 la perte d'énergie est maximale ? En se fondant sur les résultats obtenus expliquer pourquoi pour ralentir des neutrons dans les réacteurs nucléaires leur diffusion se fait par des noyaux d'atomes légers (deutérium, carbone) et non d'atomes lourds.

Réponse. $\frac{\Delta E}{E} = 4 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$. La perte d'énergie est maximale pour $m_1 = m_2$.

10. Calculer la part d'énergie α que perd un proton lors de sa diffusion élastique sous un angle de 180° par le proton, le deutéron, le noyau d'hélium et le noyau de carbone.

Réponse. $\alpha = \frac{4A}{(1+A)^2}$, où A est le poids atomique de la particule entrant en collision avec le proton :

A	1	2	4	12
α	1	0,89	0,64	0,284

11. Calculer l'angle de diffusion maximal ϑ d'une particule α et d'un deutéron par l'hydrogène.

Solution. Soient m_1 la masse de la particule diffusée (particule α ou deutéron), v sa vitesse avant diffusion, m_2 la masse de la particule diffusante (atome d'hydrogène), v_1 et v_2 les vitesses des particules après diffusion (fig. 54). Appliquons les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie :

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta,$$
$$m_1 v_1 \sin\alpha = m_2 v_2 \sin\beta,$$
$$m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$

En excluant l'angle β et la vitesse v_2, on obtient une équation du second degré en v_1

$$(m_1 + m_2) v_1^2 - 2m_1 v v_1 \cos\alpha + (m_1 - m_2) v^2 = 0.$$

Pour que les racines soient réelles, il faut que $\sin\alpha \leqslant m_2/m_1$. L'angle α maximal satisfaisant à cette condition sera l'angle ϑ que l'on cherche à calculer. Ainsi $\sin\vartheta = m_2/m_1$. On en tire pour la particule α $\vartheta = 14°30'$ et pour le deutéron $\vartheta = 30°$.

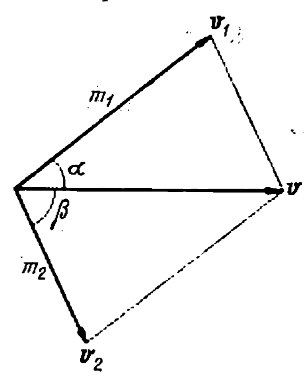


Fig. 54

12. Une particule α allant à la vitesse v_0 entre en collision élastique avec un noyau immobile et poursuit son chemin sous un angle de 90° par rapport à sa direction initiale. Quel doit être le rapport de la masse m d'une particule α à la masse M du noyau pour que ce changement de direction soit possible ? Calculer la vitesse v de la particule α et la vitesse V du noyau après choc. Calculer aussi l'angle ϑ entre la direction de la vitesse du noyau projeté et la direction initiale de la particule α incidente.

Réponse. La masse de la particule α doit être plus petite que la masse du noyau: $m < M$; $v = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}$; $V = \frac{mv_0}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}}$; $\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}$.

13. Une particule de masse m allant dans une direction horizontale à la vitesse V entre en collision avec un atome immobile non excité de masse M, rebondit alors en arrière et se déplace à la vitesse $V/2$; l'atome, lui, s'excite et passe dans un état de plus grande énergie interne. Calculer la vitesse v de l'atome après choc et l'énergie E dépensée pour son excitation. Pour quels atomes non excités ce processus est-il irréalisable?

Réponse. $v = \frac{3}{2} \frac{mV}{M}$, $E = \frac{3mV^2}{8} \left(1 - \frac{3m}{M}\right)$. Le processus est irréalisable si $M < 3m$.

14. Des noyaux de deutérium et de tritium volent à l'encontre les uns des autres de telle sorte que le centre de masse de ces particules reste immobile. L'énergie cinétique totale des particules des deux sortes est $E = 15$ keV. Jusqu'à quelle valeur E_D de l'énergie doit-on accélérer le noyau de deutérium pour que, le noyau de tritium étant immobile, le rendement de la réaction soit le même? Quelle devrait être l'énergie E_T du tritium pour arriver au même résultat?

Les réactions dont il est question ici et dans le problème suivant sont les principales réactions que l'on se propose de mettre en œuvre pour réaliser une réaction de synthèse thermonucléaire contrôlée servant à des fins pacifiques.

Réponse. $E_D = \frac{m_D + m_T}{m_T} E = \frac{5}{3} E = 25$ keV,

$$E_T = \frac{m_D + m_T}{m_D} E = \frac{5}{2} E = 37{,}5 \text{ keV}.$$

15. Un noyau de deutérium entre en collision avec un noyau de tritium et reagit avec lui. Pour réaliser cette réaction on estime qu'il serait avantageux d'accélérer une seule particule pour lui conférer une énergie $E = 20$ keV en laissant l'autre immobile. Faut-il accélérer la particule légère ou la particule lourde? On supposera que le choc des particules est central.

Réponse. Si on accélère le deutérium, l'énergie liée au mouvement du centre de masse

$$E/(1 + m_T/m_D) = 8 \text{ keV}$$

ne pourra déterminer la réaction. Pour le tritium cette énergie est

$$E/(1 + m_D/m_T) = 12 \text{ keV}.$$

Il est donc préférable d'accélérer le deutérium puisque le gain d'énergie est alors égal à

$$\frac{m_T - m_D}{m_T + m_D} E = \frac{1}{5} E = 4 \text{ keV}.$$

16. La première réaction nucléaire artificielle

$$^{14}N + {}^{4}He = {}^{17}O + p$$

fut observée par Rutherford en 1919. Elle évolue en absorbant une énergie $E = 1{,}13$ MeV. Quelle est l'énergie minimale E_0 que l'on doit communiquer à la particule α (noyau de l'atome hélium) dans un référentiel lié au laboratoire pour qu'en bombardant une cible de ^{14}N immobile on obtienne la réaction de Rutherford?

Solution. Désignons par p_0 l'impulsion de la particule α avant choc. Cette impulsion ne change pas à la suite du choc. A cette impulsion correspond l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse

$$K_{\text{c.m}}=\frac{p_0^2}{2(m_{\text{He}}+m_{\text{N}})}=\frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}}+m_{\text{N}}}E_0,$$

qui ne change pas elle non plus et ne prend donc aucune part aux transmutations nucléaires.

L'énergie cherchée se laisse déterminer à l'aide de la condition suivante:

$$E_0=E+K_{\text{c.m}}=E+\frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}}+m_{\text{N}}}E_0,$$

d'où

$$E_0=\frac{m_{\text{He}}+m_{\text{N}}}{m_{\text{N}}}E=1{,}45\ \text{MeV}.$$

17. On appelle *énergie de seuil* E_s ou *seuil* d'une réaction nucléaire une valeur de l'énergie de la particule incidente $E\geqslant E_s$ rendant possible sa réaction nucléaire avec une cible immobile; pour $E<E_s$ la réaction ne se réalise pas. L'énergie de seuil de la réaction nucléaire ${}^7\text{Li}+\text{p}\to{}^7\text{Be}+\text{n}$ (le lithium est immobile) est $E_s=1{,}88$ MeV. Pour quelles valeurs de l'énergie E_p des protons incidents les neutrons produits peuvent-ils être projetés dans le sens opposé au sens des neutrons incidents?

Solution. La valeur minimale de l'énergie du proton E_p correspond à une collision centrale telle que toutes les particules se meuvent avant et après collision le long d'une même droite. On ne considérera donc que des chocs centraux. Supposons d'abord que l'énergie du proton incident est juste égale à l'énergie de seuil E_s de la réaction. Le noyau de Be et le neutron qui sont produits dans la réaction doivent alors être au repos dans le référentiel du centre de masse et se propager en avant à la même vitesse dans le référentiel de laboratoire. Effectuant ce mouvement, ces particules emportent une énergie cinétique

$$E_0=P_s^2/2\,(m_{\text{Be}}+m_{\text{n}}),$$

où P_s est l'impulsion du proton correspondant à l'énergie de seuil

$$E_s=P_s^2/(2m_p).$$

La différence de ces énergies

$$E_s-E_0=\frac{m_{\text{Be}}+m_{\text{n}}-m_p}{m_{\text{Be}}+m_{\text{n}}}E_s \qquad (28.7)$$

est consommée dans la réaction nucléaire.

Calculons l'énergie E_p du proton incident pour laquelle les neutrons produits sont immobiles et les noyaux de béryllium se propagent en avant. Si P_p est l'impulsion du proton avant réaction, alors

$$E_p=P_p^2/(2m_p),$$

et l'énergie cinétique du noyau de béryllium produit est $E_{\text{Be}}=P_p^2/(2m_{\text{Be}})$. La différence de ces énergies

$$E_p-E_{\text{Be}}={}^1\!/_2P_p^2\left(\frac{1}{m_p}-\frac{1}{m_{\text{Be}}}\right)=\frac{m_{\text{Be}}-m_p}{m_{\text{Be}}}E_p \qquad (28.8)$$

est consommée dans la réaction; elle est donc égale à la quantité (28.7). En égalant (28.7) et (28.8) nous trouvons

$$E_p = \frac{m_{Be}(m_{Be} + m_n - m_p)}{m_{Be}^2 - m_p^2} E_s,$$

ou en négligeant la différence entre les masses du proton et du neutron

$$E_p = \frac{m_{Be}^2}{m_{Be}^2 - m_p^2} E_s = \frac{49}{48} E_s = 1{,}92 \text{ MeV}.$$

Pour de grandes énergies on verra apparaître des neutrons qui se propagent en sens inverse des particules incidentes.

§ 29. Les forces et l'énergie potentielle

1. *On peut décrire l'interaction mutuelle des corps soit en termes de forces, soit en termes d'énergie potentielle donnée en fonction des coordonnées des particules interagissantes.* En mécanique macroscopique on utilise les deux procédés de description. Le premier procédé a un plus large domaine d'application car il s'applique aussi à des forces pour lesquelles on ne peut définir une énergie potentielle (forces de frottement par exemple). Le deuxième procédé ne s'applique qu'à des forces conservatives. Mais comme en mécanique quantique, qui ne s'occupe que des phénomènes du microcosme, on ne connaît pas de forces dissipatives, on n'y utilise que le deuxième procédé pour décrire les interactions des particules. Dans les équations de mouvement de la mécanique quantique les forces ne figurent pas; on n'y trouve que l'énergie potentielle des particules en interaction. Dans ce paragraphe cette question n'est traitée que dans le cadre de la mécanique macroscopique.

2. Connaissant les forces agissantes en fonction des coordonnées des points matériels du système, nous pouvons calculer son énergie potentielle. Ce problème se résout par la méthode d'*intégration* dont quelques exemples simples ont été donnés au § 25. On peut poser aussi le problème inverse: calculer les forces appliquées connaissant l'énergie potentielle en fonction des coordonnées des particules en interaction. Ce problème fait appel à un procédé mathématique plus simple qui est la *dérivation*. Considérons pour commencer un point matériel placé dans le champ de force de corps immobiles quelconques. Si les forces sont conservatives, nous pouvons introduire l'énergie potentielle U que possède le point matériel dans le champ de force. La valeur de U sera fonction du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ ou des coordonnées x, y, z de ce point matériel. Supposons que ce point a subi un déplacement infiniment petit $d\boldsymbol{r}$. Si $\boldsymbol{F}$ est la force appliquée au point matériel, le travail produit par cette force lors du déplacement est égal à la diminution de l'énergie potentielle:

$$\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r} = -dU. \tag{29.1}$$

Comme cette égalité est vérifiée quel que soit le déplacement dr, elle définit complètement la force F en module, en direction et en sens si la fonction $U(r)$ est connue. En effet, pour trouver le vecteur F, il suffit de déterminer ses projections F_x, F_y, F_z sur les axes d'un système de coordonnées rectangulaires. En termes de ces projections l'équation (29.1) s'écrit

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU. \tag{29.2}$$

Supposons que le déplacement se produit le long de l'un des axes, l'axe des X par exemple. On aura alors

$$F_x dx = -[dU]_{y,\,z}$$

et

$$F_x = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{y,\,z}.$$

Les indices y, z indiquent que lors du déplacement du point et donc à la dérivation, les coordonnées y et z doivent rester constantes. Cela signifie que $U(x, y, z)$ doit être considérée à la dérivation comme fonction de la seule variable x; les variables y et z sont alors des *paramètres* restant constants lors de la dérivation par rapport à x. Les quantités qui résultent d'une telle dérivation sont appelées *dérivées partielles* de la fonction U. On les désigne par le symbole ∂ à la différence du symbole d utilisé pour la dérivation des fonctions d'une seule variable indépendante. Les mêmes considérations valent pour le calcul des projections de la force sur les deux autres axes Y et Z. Ainsi

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{29.3}$$

Si la fonction $U(x, y, z)$ est connue, la détermination des composantes F_x, F_y, F_z se réduit au calcul de ses dérivées partielles par rapport aux coordonnées. Il est bien évident que les formules (29.3) ne sont valables que pour les forces conservatives.

Donnons un exemple. En mesurant l'énergie potentielle d'un ressort à boudin sous tension, on a trouvé qu'elle était donnée par la formule $U = {}^1/_2\, kx^2$ où x est l'allongement et k le coefficient d'élasticité du ressort. Dirigeons l'axe X le long de l'axe du ressort; fixons l'une des extrémités du ressort et tenons l'autre extrémité dans la main. U ne sera alors fonction que de la seule coordonnée x. Le ressort tendu applique à la main une force

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx.$$

Le signe moins indique que la force F est appliquée dans le sens opposé au déplacement; c'est donc une *force d'attraction*.

3. On peut réunir les trois formules (29.3) en une seule formule vectorielle. Multiplions pour cela ces formules par les vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ des axes de coordonnées et additionnons les résultats.

Nous obtiendrons alors

$$F = -\operatorname{grad} U, \qquad (29.4)$$

où le symbole grad U représente la somme

$$\operatorname{grad} U \equiv \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k. \qquad (29.5)$$

Conformément à (29.4) cette somme est un vecteur. Le vecteur défini par (29.5) porte le nom de *gradient du scalaire U*. A côté de la notation grad U on utilise aussi le symbole ∇U. Le symbole ∇ (nabla) représente un vecteur symbolique appelé *opérateur de Hamilton* (1805-1865)

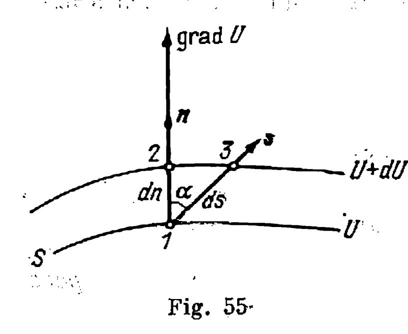


Fig. 55.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k. \qquad (29.6)$$

Ainsi ∇U peut être formellement considéré comme le produit du vecteur symbolique ∇ par le scalaire U. Il est bien évident qu'on peut parler du gradient de n'importe quelle fonction scalaire des coordonnées. La notion de gradient trouve de nombreuses applications en physique et en mathématiques.

Pour mieux saisir la signification géométrique du gradient, il est utile d'introduire les *surfaces de niveau* qui sont des surfaces sur lesquelles le scalaire U est constant. Soit S une de ces surfaces passant par le point *1* de l'espace pour lequel on cherche à déterminer la valeur du grad U (fig. 55). Plaçons l'origine des coordonnées en ce point et orientons l'axe X suivant la normale à la surface de niveau U = const, le vecteur unitaire i pointant dans le sens des U croissants. Les axes Y et Z se trouveront alors dans le plan tangent à la surface de niveau U = const. Il est clair que pour ce choix des axes de coordonnées les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial y}$ et $\frac{\partial U}{\partial z}$ seront nulles au point considéré, de sorte que dans la formule (29.5) il ne reste que le premier terme grad $U = \frac{\partial U}{\partial x} i$. Changeons maintenant les notations. Désignons par le symbole n le vecteur unitaire de la normale à la surface de niveau U = const et par le symbole dn la distance (mesurée le long de la normale) entre deux surfaces de niveau U et $U + dU$ infiniment proches l'une de l'autre, i.e. la distance entre les points *1* et *2*. On aura alors $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dn}$; cette dernière quantité qui est désignée plus souvent par $\frac{\partial U}{\partial n}$ porte le nom de *dérivée du scalaire U dans le sens de la normale à la surface de niveau*. La variation de la grandeur U est évidemment la plus rapide le long de cette

direction que suivant toute autre. Ainsi, avec ces nouvelles notations, la formule (29.5) devient

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial n} \boldsymbol{n}. \tag{29.7}$$

Elle montre bien que *le gradient d'une fonction U est un vecteur orienté le long de la normale à la surface de niveau U* = const *dans le sens des U croissants*; *son module est numériquement égal à la valeur de la dérivée de la fonction U suivant la normale à cette même surface*. Cette définition présente par rapport à la définition (29.5) l'avantage d'être *invariante*, i.e. elle ne renferme que des quantités et des notions ayant une signification géométrique directe et ne renferme aucune quantité liée au choix arbitraire d'un système de coordonnées.

Etablissons encore une formule aussi simple qu'importante. Faisons passer par le point *1* un segment de droite *13* formant un angle α avec la normale n (voir fig. 55). Choisissons le point *3* sur la surface de niveau $U + dU$ et désignons par ds la longueur de ce segment de droite. Puisque le point *3* se trouve sur la même surface de niveau que le point *2*, les accroissements de la fonction U seront les mêmes sur les segments *12* et *13*. Comme ces segments de droite sont infiniment courts, on peut estimer que les aires élémentaires des surfaces de niveau où aboutissent ces segments sont planes; de ce fait $ds = \frac{dn}{\cos\alpha}$ et

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dn} \cos\alpha,$$

ou en d'autres notations

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos\alpha = \frac{\partial U}{\partial n} (\boldsymbol{ns}),$$

où $\boldsymbol{s}$ est le vecteur unitaire suivant le segment *13*. La quantité $\frac{\partial U}{\partial s}$ s'appelle dérivée de la fonction U suivant la direction du segment *13*. En tenant compte de la définition (29.7) du gradient, on aura

$$\frac{\partial U}{\partial s} = (\boldsymbol{s} \operatorname{grad} U). \tag{29.8}$$

Cette formule est vérifiée quelle que soit la signification concrète de la fonction U. Si U représente l'énergie potentielle d'un point matériel, compte tenu de (29.4) la formule prend la forme

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -(\boldsymbol{Fs}),$$

soit

$$F_s = -\frac{\partial U}{\partial s}. \tag{29.9}$$

Il est facile de déduire cette formule directement de (29.1).

4. On généralise aisément les formules (29.3) à un système arbitraire de points matériels soumis seulement à des forces conservatives. Dans ce cas l'énergie potentielle U est fonction des coordonnées de tous les points en interaction. A la place de (29.3) on écrira alors

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}, \tag{29.10}$$

où x_i, y_i, z_i désignent les coordonnées du i-ème point matériel du système et F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} les composantes de la force qui lui est appliquée. L'indice i peut parcourir toutes les valeurs possibles, de sorte que les formules (29.10) sont valables pour tous les points du système.

5. En mécanique la loi de conservation de l'énergie est une conséquence de l'équation de mouvement de Newton. Peut-on déduire l'équation de mouvement de Newton de la loi de conservation de l'énergie ? La réponse à cette question est négative. L'équation exprimant la conservation de l'énergie est une équation *scalaire*, tandis que l'équation de mouvement est une équation *vectorielle* qui équivaut à *trois équations analytiques* indépendantes. Il n'est donc pas étonnant qu'on ne puisse déduire d'une seule équation scalaire trois équations analytiques indépendantes. Mais si le mouvement est unidimensionnel, on peut déduire de la loi de conservation de l'énergie, au prix de quelques hypothèses supplémentaires, l'équation de mouvement de Newton. Supposons que le point matériel se déplace le long d'une certaine ligne fixe seulement sous l'action de forces conservatives. En vertu de la loi de conservation de l'énergie $^1/_2\, mv^2 + U = \text{const}$. Pour un tel mouvement on peut admettre que l'énergie potentielle U ne soit fonction que de la distance s mesurée le long de la trajectoire du point. En dérivant la dernière relation par rapport au temps, nous obtenons

$$mv\dot{v} + \frac{dU}{ds}\dot{s} = 0,$$

ou en remarquant que $v = \dot{s}$ et $F_s = -\frac{dU}{ds}$

$$v\,(m\dot{v} - F_s) = 0. \tag{29.11}$$

En éliminant v on obtient l'équation de mouvement de Newton.

On doit remarquer cependant qu'en mécanique l'équation de mouvement de Newton a une valeur plus générale que la loi de conservation de l'énergie. En effet, le calcul que nous venons de faire n'est valable que pour les forces conservatives. D'autre part, pour arriver à l'équation de mouvement, nous avons été obligés d'éliminer v de l'équation (29.11), ce qui témoigne de la nécessité d'introduire l'*hypothèse supplémentaire* $v \neq 0$ que la loi de conservation de l'énergie n'implique nullement. L'équation (29.11) admet deux solu-

tions vérifiant également la condition de la conservation de l'énergie. Nous avons rejeté l'une de ces solutions $v = 0$, bien que la loi de conservation de l'énergie ne le justifie pas. Mais cette solution $v = 0$ ne vérifie pas l'équation de Newton à moins que la force F s'annule.

6. La notion d'énergie potentielle permet d'exprimer la *condition de l'équilibre et de la stabilité* d'un système mécanique. Considérons d'abord un système de points matériels en interactions mutuelles qui n'est assujetti à aucune liaison. Posons que toutes les forces actives sont conservatives; on peut alors représenter leurs composantes à l'aide des formules (29.10). A l'état d'équilibre toutes les forces et par suite toutes les dérivées premières de l'énergie potentielle U par rapport aux coordonnées doivent s'annuler. Il s'ensuit que *l'état d'équilibre exige que l'énergie potentielle soit stationnaire*. Cela signifie que la fonction U doit rester presque constante lorsqu'on écarte le système de son état d'équilibre et que les coordonnées des pooitns matériels prennent des accroissements infiniment petits $\delta x_1, \delta y_1, \ldots, \delta z_n$. En termes plus précis, les accroissements de la fonction U correspondant aux accroissements infiniment petits des coordonnées sont des infiniment petits d'ordre supérieur. En particulier *le système sera à l'équilibre si l'énergie potentielle U est minimale ou maximale.*

Si l'énergie potentielle est minimale, le système sera dans un état d'équilibre stable. Soit U_0 la valeur de l'énergie potentielle à l'équilibre. D'après notre théorème on peut définir auprès de l'état d'équilibre une petite zone où la différence $U - U_0$ sera positive. Choisissons cette zone telle que $0 < U - U_0 < \varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Perturbons l'équilibre du système en lui communiquant l'énergie cinétique $K_0 < \varepsilon$. Puis abandonnons le système à lui-même. Le mouvement libre du système doit satisfaire à la loi de conservation de l'énergie $K + U = K_0 + U_0$ ou $U - U_0 = K_0 - K$. Il s'ensuit que $U - U_0 < \varepsilon$ puisque l'énergie cinétique K ne peut être négative. On en conclut qu'en l'absence d'actions extérieures le système ne peut sortir de l'intervalle $0 < U - U_0 < \varepsilon$ et y effectuera un mouvement fini. Or cela signifie que pour le minimum de l'énergie potentielle l'équilibre du système sera *stable*, plus précisément *stable vis-à-vis de perturbations infiniment faibles.*

Ce qui vient d'être dit reste valable en présence de forces dissipatives telles que les forces de frottement liquide ou les forces gyroscopiques. En effet, à l'état d'équilibre, lorsque tous les points matériels sont au repos, ces forces sont nulles et, par suite, la condition nécessaire de l'équilibre exigeant que l'énergie potentielle U soit stationnaire reste valable. Reste également valable la démonstration de la stabilité de l'équilibre pour U minimale. La seule différence réside en ce qu'en présence de forces dissipatives on remplace-

ra l'égalité exprimant la loi de conservation de l'énergie par l'inégalité $(K + U) - (K_0 + U_0) < 0$, soit $U - U_0 < K_0 - K$. Or ceci ne fait que renforcer les conclusions que l'on peut en tirer. *La présence de forces dissipatives rend l'équilibre encore plus stable.* Si on fait sortir le système de son état d'équilibre et qu'on l'abandonne à lui-même, les forces dissipatives le ramèneront à l'équilibre.

Pour mieux dégager la raison de la stabilité de l'équilibre correspondant au minimum de U, considérons un seul point matériel pouvant effectuer un mouvement unidimensionnel. La courbe représentant la variation de la fonction U se présente alors comme un puits de potentiel (analogue à celui représenté sur la figure 45). A l'état d'équilibre le point matériel « repose au fond du puits de potentiel » et aucune force n'agit sur lui. On conçoit aisément que si on déplace le point, il apparaît aussitôt une force dirigée vers la position d'équilibre et qui cherche à ramener le point matériel dans cette position. Mais si le point matériel est en équilibre là où l'énergie potentielle est maximale (se trouve au « sommet du pic de potentiel » (point N sur la fig. 44)), son déplacement fait apparaître une force dont le sens est tel qu'elle l'écartera encore plus de la position d'équilibre. C'est donc un état d'équilibre instable. *D'une manière générale l'équilibre de tout système mécanique est instable si son énergie potentielle est maximale.*

Ces considérations peuvent être étendues aux systèmes dont la liberté de déplacement est limitée par des *liaisons imposées*. Mais on doit exiger que ces liaisons soient *idéales*, c'est-à-dire telles qu'elles n'effectuent aucun travail quels que soient les déplacements du système. Un exemple en est une bille parfaitement lisse enfilée sur une tige absolument rigide et parfaitement lisse qui lui impose sa direction de déplacement. La force que la tige applique à la bille est perpendiculaire aux déplacements possibles de la bille et n'effectue aucun travail.

En présence de liaisons les conditions d'équilibre d'un point matériel deviennent

$$-\frac{\partial U}{\partial x} + R_x = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} + R_y = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} + R_z = 0, \qquad (29.12)$$

où $\boldsymbol{R}$ est la *réaction de liaisons*, c'est-à-dire la force que les liaisons appliquent au point matériel considéré. Pour être brefs nous avons développé nos considérations pour un seul point matériel. Dans le cas d'un système on aura à considérer un grand nombre d'équations, les raisonnements restant les mêmes. Soient δx, δy, δz les *déplacements possibles* du point matériel le long des axes de coordonnées. En multipliant les équations (29.12) par ces déplacements, en additionnant les résultats obtenus et en remarquant que les réactions des liaisons ne produisent pas de travail, nous obtiendrons $\delta U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\delta x +$

$+ \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z = 0$. Telle est la condition nécessaire de l'équilibre. Elle signifie qu'*à l'état d'équilibre l'énergie potentielle U est stationnaire*. Nos raisonnements concernant la stabilité de l'équilibre restent encore valables. A titre d'illustration considérons une bille pesante placée au fond d'une tasse sphérique (équilibre stable) ou au sommet d'une surface convexe (équilibre instable). *En présence de forces de frottement sec, le caractère stationnaire de l'énergie potentielle U n'est plus indispensable.* Comme exemple on peut citer l'équilibre d'un barreau reposant sur un plan incliné.

CHAPITRE V

LE MOMENT DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

§ 30. Moment d'une force et moment cinétique par rapport à une origine fixe

1. D'importantes lois de la mécanique sont liées aux notions du *moment d'une force* et du *moment d'une impulsion*. Il faut bien se garder de confondre les moments de ces vecteurs *par rapport à un point* et *par rapport à un axe*. Le moment d'un vecteur par rapport à un point et par rapport à un axe sont deux notions différentes quoique corrélées. Le moment d'un vecteur par rapport à un point est luimême un *vecteur*, tandis que le moment de ce même vecteur par rapport à un axe est la *projection* sur cet axe de son moment par rapport à un point pris sur cet axe. Ainsi le moment d'un vecteur par rapport à un axe n'est pas un vecteur. Etudions d'abord le moment par rapport à un point.

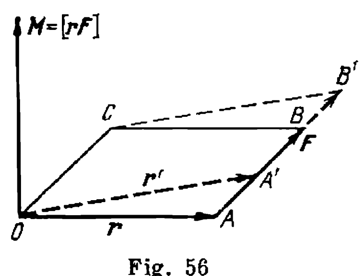


Fig. 56

Soit un point quelconque O par rapport auquel on définit le moment du vecteur force et le moment du vecteur impulsion. On appelle ce point *origine* ou *pôle*. Soit $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur reliant ce point à l'origine de la force $\boldsymbol{F}$ (fig. 56). On appelle *moment de la force* $\boldsymbol{F}$ *par rapport au point* O le produit vectoriel du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ par la force $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}]. \tag{30.1}$$

Il résulte directement de cette définition que *le moment* $\boldsymbol{M}$ *n'est pas modifié se l'on fait glisser l'origine de la force* $\boldsymbol{F}$ *sur son support.* En effet, si on déplace l'origine de la force de A en A', le parallélogramme $OABC$ sera remplacé par le parallélogramme $OA'B'C$; or, comme ils sont construits sur la même base OC et qu'ils ont même hauteur, leurs aires sont égales, ce qui démontre notre proposition.

Dans le cas où $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$, en vertu de la propriété bien connue du produit vectoriel, on doit avoir

$$[\boldsymbol{rF}] = [\boldsymbol{rF}_1] + [\boldsymbol{rF}_2]. \tag{30.2}$$

Cela signifie que *le moment de la résultante de deux ou plusieurs forces par rapport à un point est égal à la somme géométrique des moments des composantes par rapport à ce même point.*

On définit de même le moment de l'impulsion $\boldsymbol{p}$ d'un point matériel (moment cinétique) par rapport au pôle O. C'est le produit vectoriel

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{rp}]. \tag{30.3}$$

2. La raison de l'introduction de ces deux notions tient à ce que les moments de l'impulsion et de la force sont liés par une relation importante que nous allons déduire des équations de Newton. Supposons d'abord que l'origine O est fixe. En dérivant (30.3) par rapport au temps, on obtient

$$\dot{\boldsymbol{L}} = [\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}] + [\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}].$$

Puisque par hypothèse l'origine O est fixe, la dérivée $\dot{\boldsymbol{r}}$ est la vitesse du point matériel qui est liée à son impulsion par la relation $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. De ce fait le premier terme du second membre est égal à zéro, étant le produit vectoriel des vecteurs colinéaires $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. A l'aide de l'équation de Newton $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$, le second terme de la somme peut s'écrire $\dot{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{rF}]$, soit

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}. \tag{30.4}$$

C'est la relation que nous nous proposions d'établir. Elle porte le nom d'*équation des moments* et s'énonce comme suit: *la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel par rapport à une origine fixe est égale au moment de la force active par rapport à la même origine.* Comme nous n'avons pas postulé que la masse m devait rester constante, l'équation (30.4) reste valable en mécanique relativiste, donc pour des vitesses du point matériel aussi grandes que l'on veut et que l'admet la théorie de la relativité.

L'équation des moments (30.4) se laisse généraliser pour un système arbitraire de points matériels. *Le moment cinétique d'un système de points matériels par rapport à une origine quelconque* est la somme vectorielle des moments cinétiques de tous les points matériels du système rapportés à la même origine. De même *le moment de toutes les forces appliquées à un système de points matériels* est la somme vectorielle des moments de chacune des forces. Au lieu de sommer les moments de toutes les forces, il est préférable, ayant en vue la relation (30.2), de déterminer d'abord la résultante de toutes les forces et de calculer le moment de cette résultante. On peut procéder de même pour calculer l'impulsion d'un système de points matériels. On commencera par sommer les

impulsions de tous les points matériels, puis on calculera le moment du vecteur résultant par rapport au point considéré.

En admettant toujours que l'origine est fixe, si nous écrivons l'équation des moments de tous les points matériels et si nous en faisons ensuite la somme, nous retrouverons la relation (30.4) qui cette fois concernera notre système de points matériels. Il est bien évident que $\boldsymbol{M}$ représentera alors le moment de toutes les forces extérieures et intérieures. En ce qui concerne les forces intérieures, on n'en tiendra pas compte puisque leur moment total par rapport à une origine quelconque est toujours nul, et cela pour la raison suivante. Les forces intérieures à un système sont toujours opposées deux à deux: à une force F_{ik} avec laquelle le point k agit sur le point i, correspond la force F_{ki} égale et opposée avec laquelle le point i agit sur le point k, ces deux forces étant portées par la même droite. Comme on peut faire glisser sur ce support les origines des deux forces pour les faire coïncider, elles se compensent alors exactement et leur moment total est donc nul.

La mise en œuvre de la troisième loi de Newton permet d'exclure les forces intérieures de l'équation (30.4) et on obtient ainsi un résultat plus concret:

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}_{\text{ext}}, \tag{30.5}$$

i.e. *la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système de points matériels par rapport à une origine fixe arbitraire est égale à la somme géométrique des moments de toutes les forces extérieures par rapport à la même origine.*

3. *Si le moment des forces extérieures par rapport à une origine fixe O est nul, le moment cinétique du système par rapport à la même origine est invariable dans le temps.* Cette proposition est la *loi de conservation du moment cinétique.* Dans le cas particulier d'un système isolé de points matériels, son moment cinétique se conserve.

Notons le cas important des forces centrales où toutes les forces appliquées aux points matériels du système passent par un même point fixe O. Comme le moment de ces forces par rapport au point O est égal à zéro, le moment cinétique du système par rapport à ce même point doit rester invariable dans le temps; il y a conservation du moment cinétique même si les forces dépendent des vitesses.

La loi de conservation du moment cinétique est avec les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion l'une des plus importantes *lois fondamentales de la physique.* En physique atomique la notion de moment cinétique doit être généralisée. En effet, en mécanique classique, le moment cinétique est déterminé en fonction des coordonnées et des vitesses des particules; or, selon le principe d'indétermination de Heisenberg, ces quantités ne peuvent avoir simultanément des valeurs bien déterminées pour un seul et même

état. D'autre part, non seulement les particules mais aussi bien les champs de forces (le champ électromagnétique par exemple) possèdent des moments cinétiques. Enfin les concepts et les lois de la mécanique classique ne sont pas toujours applicables aux processus se produisant dans les atomes, les noyaux atomiques et les particules élémentaires. Dans l'étude de ces processus il n'est pas toujours possible d'utiliser les notions classiques, notamment celle de moment cinétique, dans l'acceptation de la définition que nous en avons donnée. Nous nous contenterons de remarquer ici qu'en physique la notion de moment cinétique est généralisée mais il est prématuré d'en indiquer les modalités. Tous ceux qui s'initient à la physique doivent bien noter qu'en physique on généralise la notion de moment cinétique de la mécanique et on postule la loi de sa conservation dans tous les processus physiques. *La loi généralisée de la conservation du moment cinétique n'est donc plus un théorème de la mécanique et doit être considérée comme un principe indépendant de la Physique généralisant les données expérimentales.*

Dans l'exposé de la mécanique on aurait pu faire figurer la loi de la conservation du moment cinétique de deux points matériels au nombre des postulats fondamentaux, comme nous l'avons fait pour la loi de la conservation de l'impulsion d'un système de deux points matériels. On aurait dû exclure alors la troisième loi de Newton du nombre des postulats fondamentaux de la mécanique. Nous avons montré au § 12 que cette loi ne découle que partiellement de la loi de conservation de l'impulsion. Mais si on adjoint à la loi de conservation de l'impulsion la loi de conservation du moment cinétique, la loi de Newton devient une simple conséquence de ces deux lois. Considérons un système fermé de deux points matériels échangeant les forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$. On déduit de la loi de conservation de l'impulsion $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$, et de la loi de conservation du moment cinétique

$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{p}_1] + [\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{p}_2] = \text{const.}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, nous obtenons

$$[\boldsymbol{r}_1\dot{\boldsymbol{p}}_1] + [\boldsymbol{r}_2\dot{\boldsymbol{p}}_2] = 0,$$

soit

$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{F}_1] + [\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{F}_2] = 0.$$

Comme $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$, on a

$$[(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\,\boldsymbol{F}_1] = 0.$$

Il s'ensuit que les vecteurs $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ et $\boldsymbol{F}_1$ sont colinéaires, de même que le sont les vecteurs $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ et $\boldsymbol{F}_2$. Or cela signifie que les forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ sont portées par la droite joignant les points matériels en interaction.

4. Le moment des forces et le moment cinétique dépendent non seulement du module, de la direction et du sens des vecteurs force et impulsion, mais encore de la position de l'origine par rapport à laquelle on définit les moments. En général ces moments changent si on adopte une nouvelle origine. Soient O et O' deux origines fixes. Les rayons vecteurs $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ reliant à ces origines un seul et même point satisfont à la relation

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{R},$$

où $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{O'O}$ est le rayon vecteur de l'origine O par rapport à l'origine O'. En écrivant les expressions des moments cinétiques de chaque point matériel du système et en sommant ces expressions sur tous les points matériels on obtient

$$\sum [\boldsymbol{r}m\boldsymbol{v}] = \sum [\boldsymbol{r}'m\boldsymbol{v}] - [\boldsymbol{R} \sum m\boldsymbol{v}],$$

soit

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' - [\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}], \tag{30.6}$$

où $\boldsymbol{p}$ est l'impulsion totale du système, $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{L}'$ sont respectivement les moments cinétiques par rapport aux origines O et O'. Si l'impulsion $\boldsymbol{p}$ est nulle, on a $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}'$ et le vecteur moment cinétique du système ne dépend pas de l'origine.

On aura de même

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' - [\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}], \tag{30.7}$$

$\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}'$ étant les moments des forces appliquées au système par rapport aux origines O et O' et $\boldsymbol{F}$ la somme géométrique de ces forces. Si la résultante $\boldsymbol{F}$ de toutes les forces est nulle, on a $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}'$. C'est ce qui se produit, par exemple, pour un *couple de forces*, c'est-à-dire pour deux forces égales et opposées portées par des droites parallèles. C'est pour cela qu'on peut indiquer le moment d'un couple sans référence à aucun point particulier.

§ 31. Relation entre le moment cinétique d'un point matériel et sa vitesse aréolaire. Le théorème des aires

1. Lorsque le système ne comporte qu'un seul point, le moment cinétique a une signification géométrique simple. Posons qu'à un instant t la position du point matériel est donnée par le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ (fig. 57). Dans le temps dt le rayon vecteur acquiert un accroissement $\boldsymbol{v}dt$ et décrit l'aire du triangle infiniment petit hachuré sur la figure 57. L'aire de ce traingle peut être représentée par le vecteur

$$d\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]\,dt,$$

dont le module est égal à l'aire du triangle et dont la direction est perpendiculaire à son plan. La dérivée

$$\dot{S}=\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{rv}] \tag{31.1}$$

définit l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps. On l'appelle *vitesse aréolaire* du mouvement. Comme par définition $\boldsymbol{L} = m[\boldsymbol{rv}]$,

$$\boldsymbol{L}=2m\dot{\boldsymbol{S}}. \tag{31.2}$$

Pour les mouvements non relativistes, la masse m étant constante, le moment cinétique $\boldsymbol{L}$ est proportionnel à la vitesse aréolaire $\dot{\boldsymbol{S}}$.

2. Si la force agissant sur un point matériel est centrale et passe par le pôle O, le vecteur $\boldsymbol{L}$ sera constant dans le temps. Si le mouvement est non relativiste, la vitesse aréolaire $\dot{S}$ sera elle aussi constante et la loi de la conservation du moment cinétique se transforme en *loi des aires*:

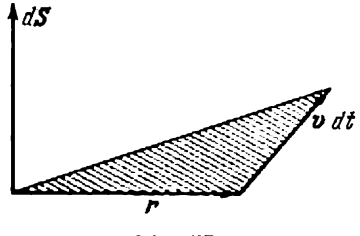


Fig. 57

$$\dot{\boldsymbol{S}}=\text{const.} \tag{31.3}$$

Deux conséquences découlent de cette équation. La première est que le plan dans lequel sont contenus les vecteurs $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{v}$ est perpendiculaire à la direction du vecteur $\dot{\boldsymbol{S}}$. Comme cette direction est fixe, le plan défini est lui aussi fixe. Cela signifie que *dans le champ de forces centrales la trajectoire du point matériel est une courbe plane*. Comme le module du vecteur $\dot{\boldsymbol{S}}$ est constant, il en découle une deuxième conséquence: *dans des temps égaux, le rayon vecteur d'un point matériel décrit des aires égales*. Cette proposition est dite *loi des aires*. Nous estimons qu'il est utile d'étendre la portée de cette loi en caractérisant la surface décrite non seulement par son aire mais encore par son orientation dans l'espace.

L'inverse est également vrai. *Si la trajectoire d'un point matériel est une courbe plane et si le rayon vecteur passant par le pôle fixe*

12—01433

O décrit dans des temps égaux des aires égales, la direction de la force appliquée passe constamment par le pôle O. En effet, puisque la proposition du théorème est équivalente à l'affirmation que la vitesse aréolaire $\dot{\boldsymbol{S}}$ est un vecteur constant, le moment cinétique $\boldsymbol{L}$ sera lui aussi constant. Par suite, d'après (30.4) $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}] = 0$. Il s'ensuit que le vecteur $\boldsymbol{F}$ est colinéaire au rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ et passe donc constamment par le pôle O. Ce pôle est donc le *centre de forces* d'où émanent les forces d'attraction ou de répulsion appliquées au point matériel.

3. Le théorème des aires n'est pas seulement valable pour un centre de forces immobile. Considérons deux points matériels échangeant entre eux des forces centrales. A l'aide de la notion de masse réduite le problème du mouvement relatif des points se ramène au problème du mouvement d'un seul point dans le champ de forces d'un point immobile (cf. § 20). Le rôle de centre de forces peut être assumé par l'un des points, l'autre étant en mouvement par rapport au premier. Le rayon vecteur reliant ces points décrira lors du mouvement relatif des aires égales dans des temps égaux.

§ 32. Moment cinétique et moment des forces par rapport à un axe fixe

1. L'équation vectorielle (30.5) équivaut aux trois équations scalaires:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{\text{ext}}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^{\text{ext}}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{ext}}, \qquad (32.1)$$

qui en découlent par projection sur les axes fixes d'un système de coordonnées rectangulaires. L'indice « ext », qui indique qu'on n'a pas à tenir compte des forces intérieures, sera omis dans ce qui suit. Ainsi $\boldsymbol{M}$ désignera toujours le moment des forces extérieures. Les quantités L_x et M_x s'appelleront respectivement *moment cinétique et moment des forces par rapport à l'axe X*. On définira de même les moments par rapport aux axes Y et Z.

D'une manière générale, on appelle *moment cinétique (L_x) et moment des forces (M_x) par rapport à un axe X quelconque* les projections sur cet axe des vecteurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{M}$, en supposant que le point O est pris sur cet axe.

L'équation

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x \qquad (32.2)$$

est dite *équation des moments par rapport à l'axe fixe X*. Si le moment des forces extérieures par rapport à un axe fixe est nul, le

moment cinétique du système par rapport à ce même axe est constant. C'est la *loi de conservation du moment cinétique par rapport à un axe fixe.*

2. Pour mettre en évidence la signification géométrique du moment M_x, représentons les vecteurs $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{F}$ sous la forme

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\perp + \boldsymbol{r}_{\parallel}, \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\perp + \boldsymbol{F}_{\parallel},$$

où $\boldsymbol{r}_\perp$ est la composante du vecteur $\boldsymbol{r}$, perpendiculaire à l'axe X, $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ la composante du même vecteur, parallèle à l'axe X. Les vecteurs $\boldsymbol{F}_\perp$ et $\boldsymbol{F}_{\parallel}$ ont une signification analogue. En utilisant ces développements, nous pouvons écrire

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}] = [\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{F}_\perp] + \{[\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{F}_{\parallel}] + [\boldsymbol{r}_{\parallel} \boldsymbol{F}_\perp]\} + [\boldsymbol{r}_{\parallel} \boldsymbol{F}_{\parallel}].$$

Le dernier terme est égal à zéro, étant le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles. La somme entre accolades est un vecteur perpendiculaire à l'axe X et dont la projection sur cet axe est nulle. Ainsi la composante du vecteur $\boldsymbol{M}$, qui est parallèle à l'axe X, est égale à

$$\boldsymbol{M}_{\parallel} = [\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{F}_\perp].$$

C'est la seule composante qui importe dans la détermination du moment M_x par rapport à l'axe X. De même pour trouver la projection L_x il suffit de projeter seulement la composante parallèle du vecteur $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L}_{\parallel} = [\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{p}_\perp].$$

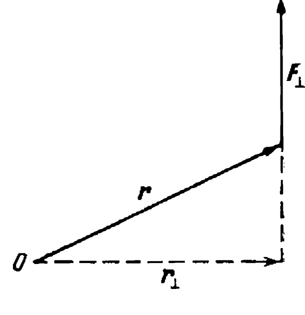


Fig. 58

Ces résultats se laissent étendre aisément à un système de plusieurs forces ou à un système de plusieurs points matériels.

Le *moment d'une force par rapport à un axe* peut être défini comme le produit de signe convenable de la composante normale de la force par la distance minimale entre cet axe et la droite portant la force. C'est la définition du moment de la physique élémentaire. Comme on peut déplacer le point d'application de la force le long de la droite qui la porte, cette définition coïncide avec celle que nous avons donnée plus haut. C'est ce qu'illustre la figure 58 où on suppose que l'axe passant par le pôle O est perpendiculaire au plan de la figure.

On définit de même le *moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe* comme le produit de signe convenable de la composante de l'impulsion perpendiculaire à cet axe par la distance minimale entre l'axe et la droite portant la force.

§ 33. Equation du moment cinétique d'un corps assujetti à une rotation autour d'un axe fixe. Moment d'inertie

1. Appliquons l'équation des moments par rapport à un axe à l'étude du *mouvement de rotation*. Prenons pour axe fixe des moments l'*axe de rotation*. Si le point matériel parcourt un cercle de rayon r (fig. 59), son moment cinétique par rapport à l'axe de rotation O est $L = mvr$. Si ω est la vitesse angulaire de rotation, $v = \omega r$ et $L = mr^2\omega$. Si autour de l'axe O tourne à la même vitesse angulaire ω un système de points matériels, $L = \sum mr^2\omega$, où la somme est étendue à tous les points matériels du système. Comme ω a même valeur pour tous les points matériels, on peut le sortir de sous le signe somme. On écrira alors

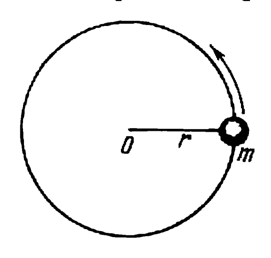


Fig. 59

$$L = I\omega, \tag{33.1}$$

avec

$$I = \sum mr^2. \tag{33.2}$$

La quantité I, qui est égale à la somme des produits des masses des points matériels par les carrés de leurs distances jusqu'à l'axe de rotation, porte le nom de *moment d'inertie du système par rapport à cet axe*. L'équation (33.1) montre que *le moment cinétique d'un système par rapport à son axe de rotation est égal au produit de son moment d'inertie par rapport au même axe par sa vitesse angulaire.*

La formule (33.1) continue à être vérifiée si au mouvement de rotation d'un système de points matériels se superpose un *mouvement radial* ou un *mouvement de translation parallèlement à l'axe de rotation*. Ce résultat tient à ce que *le moment cinétique d'un point matériel est proportionnel à sa vitesse* v. Si la vitesse v est dirigée radialement ou parallèlement à l'axe de rotation, le moment cinétique par rapport à cet axe est nul. C'est pour cela que ces mouvements ne modifient pas directement la forme de la corrélation entre le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation et sa vitesse angulaire. Mais ils exercent une influence indirecte qui se traduit par ce que le moment d'inertie I cesse d'être une constante et varie dans le temps conformément aux variations instantanées de la configuration du système. Dans ce dernier cas l'équation (32.2) devient

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M, \tag{33.3}$$

où M est le moment des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation. C est l'*équation fondamentale de la dynamique du mouvement de rotation autour d'un axe fixe*. Elle ressemble à l'équation de

Newton du mouvement d'un point matériel. Le moment d'inertie I joue le rôle de la masse, la vitesse angulaire ω celui de la vitesse, le moment de la force M le rôle de la force et le moment cinétique L celui de l'impulsion. On appelle souvent le moment cinétique L *impulsion rotatoire du système*. Usant de ce terme on dira que *la dérivée de l'impulsion rotatoire d'un système par rapport au temps est égale au moment des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation.*

Dans le cas où le moment M des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation est nul, l'impulsion rotatoire $I\omega$ se conserve.

2. Un cas particulier important est celui de la rotation d'un système invariable de points matériels ou d'un corps solide autour d'un axe fixe. Le moment d'inertie I reste alors constant pendant la rotation du corps et l'équation (33.3) devient

$$I \frac{d\omega}{dt} = M. \tag{33.4}$$

Le produit du moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un axe de rotation fixe par l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ est égal au moment des forces extérieures par rapport au même axe.

Pour mieux comprendre l'équation (33.4) nous allons la déduire en partant directement de l'équation de mouvement du point matériel. Pour un mouvement de rotation d'un point matériel autour d'un axe fixe cette équation s'écrit $m\frac{dv}{dt} = F_\tau$, où F_τ est la composante tangentielle de la force appliquée. Comme $v = \omega r$, le produit de l'équation ci-dessus par r donne $mr^2 \frac{d\omega}{dt} = rF_\tau$. En faisant la somme des équations décrivant le mouvement de chacun des points, nous retrouvons l'équation (33.4) où ne figure aucune force intérieure, de sorte que M y représente le moment des forces extérieures. Ce procédé d'établissement de l'équation (33.4), bien que très simple, ne conduit qu'à une forme particulière de l'équation du mouvement de rotation (33.4) et non à sa forme générale (33.3).

3. On peut déceler d'autres analogies encore entre le mouvement d'un point matériel et la rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe. Lorsqu'un point matériel effectue un mouvement de rotation en décrivant une trajectoire circulaire, le travail élémentaire qu'il effectue en tournant d'un angle $d\varphi$ est égal à $dA = F\,ds = Fr\,d\varphi = M\,d\varphi$. La même équation s'obtient pour la rotation d'un corps solide puisqu'on peut l'assimiler à un système de points matériels tournant à la même vitesse angulaire ω. Les forces intérieures se trouvent exclues car elles ne produisent aucun travail dans les corps solides (cf. § 24). Nous écrirons donc pour un corps solide

$$dA = M\,d\varphi. \tag{33.5}$$

A la place d'une force y figure le moment des forces extérieures et à la place du déplacement linéaire le déplacement angulaire.

L'énergie cinétique d'un corps solide en rotation se présente sous la forme suivante:

$$K=\frac{1}{2}\sum mv^2-\frac{1}{2}\sum m(\omega r)^2=\frac{\omega^2}{2}\sum mr^2,$$

soit

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{L^2}{2I}. \qquad (33.6)$$

Ces expressions ressemblent aux formules correspondantes de l'énergie cinétique d'un point matériel. Elles s'obtiennent de ces dernières en réalisant, tout formellement d'ailleurs, les substitutions $m\to I$, $v\to\omega$, $p\to L$.

§ 34. Exemples d'application de la loi de conservation de l'impulsion rotatoire

1. On peut réaliser de belles démonstrations de la loi de conservation du moment cinétique à l'aide du *banc de Joukovsky* (1847—1921). C'est un tabouret en forme de disque pouvant tourner librement sur un roulement à billes autour de son axe vertical. Pendant l'expérience l'expérimentateur s'assied ou se met debout sur le tabouret et peut le mettre en rotation en prenant appui sur le sol. Aussitôt après la poussée les seules forces extérieures pouvant créer un moment par rapport à l'axe de rotation sont les forces de frottement et la résistance de l'air. Les forces de frottement sont très petites grâce à l'emploi de roulements à billes; quant à la résistance de l'air on peut la négliger tant que la vitesse de rotation du tabouret n'est pas grande. Ainsi le moment cinétique du système constitué par le tabouret et l'expérimentateur par rapport à l'axe de rotation ne peut varier dans le temps une fois que le système est abandonné à lui-même.

L'expérimentateur juché sur le tabouret le met donc en rotation et tourne avec lui. Pendant la rotation le moment rotatoire du système reste constant et ce, quels que soient les mouvements effectués à l'intérieur du système puisque les forces intérieures ne peuvent modifier le moment rotatoire. Si l'expérimentateur écarte les bras en croix, il augmente la valeur du moment d'inertie I du système et la vitesse angulaire de rotation ω doit diminuer pour que le moment rotatoire $I\omega$ reste invariable. Lorsque l'expérimentateur croise les bras, les rapproche donc de l'axe de rotation, le moment d'inertie I diminue et la vitesse de rotation augmente aussitôt. Pour rendre l'effet plus marqué, l'expérimentateur tient dans ses mains deux haltères pesants. Lorsque les haltères sont aussi éloignés que possible de l'axe de rotation, le moment d'inertie peut augmenter de plusieurs fois et la vitesse de rotation diminuer d'autant de fois (fig. 60).

2. Lorsqu'une ballerine effectue une pirouette, elle tourne sur la pointe du pied autour d'un axe vertical. Les bras et les jambes sont alors aussi rapprochés que possible de l'axe de rotation et la vitesse de rotation est alors maximale. Pour ralentir et arrêter sa rotation, la ballerine écarte ses bras et sa jambe. Par contre, pour mettre son corps en rotation rapide, elle s'imprime une poussée en prenant appui sur le sol et crée ainsi un moment rotatoire à l'instant où le moment d'inertie de son corps est le plus grand. Ensuite, par des gestes

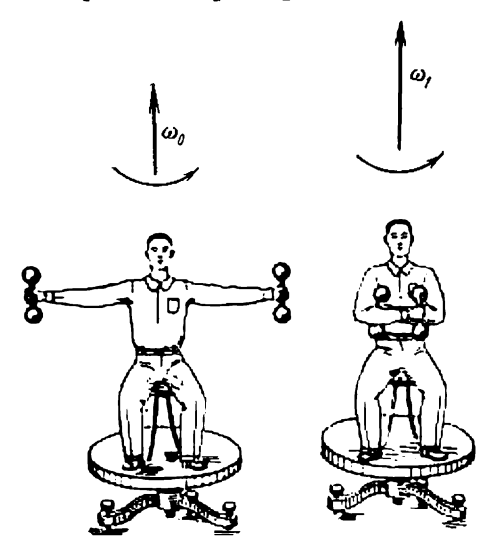


Fig. 60

adéquats, elle diminue de plusieurs fois son moment d'inertie et augmente d'autant de fois sa vitesse angulaire de rotation. Elle contrôle donc sa vitesse de rotation en modifiant le moment d'inertie de son corps. En fait elle fait la même chose que l'expérimentateur sur son tabouret. Le gymnaste travaillant à la barre fixe utilise le même effet.

3. Un sauteur effectuant un *saut périlleux* prend appui des deux pieds sur le tremplin et communique à son corps une impulsion rotatoire. Cette impulsion se conserve sur la trajectoire en l'air. Au début le corps du sauteur est redressé et son moment d'inertie est grand. A un certain instant, il plie son corps en boule (fig. 61) et diminue ainsi de plusieurs fois son moment d'inertie. Sa vitesse angulaire augmente d'autant de fois, ce qui lui permet de faire deux ou trois tours sur lui-même. A l'instant voulu il redresse son corps et à une vitesse angulaire diminuée il atterrit sur le sol ou plonge dans l'eau. En citant cet exemple, nous avons devancé notre exposé

puisque dans ce cas l'axe autour duquel tourne le corps du sauteur n'est pas fixe mais se meut dans l'espace. Cependant, lorsque l'axe de rotation mobile passe par le centre de masse du sauteur, sa rotation obéit aux lois de la rotation autour d'un axe fixe (cf. § 37).

4. La Terre tournant autour de son propre axe se comporte comme le tabouret de Joukovsky. Tout déplacement des masses à l'intérieur du globe (précipitations, activité volcanique, orogenèse, etc.) donne lieu à une variation du moment d'inertie de la Terre et donc de sa vitesse angulaire de rotation. C'est la cause des fluctuations de la durée du jour. Les études expérimentales ont mis en évidence des

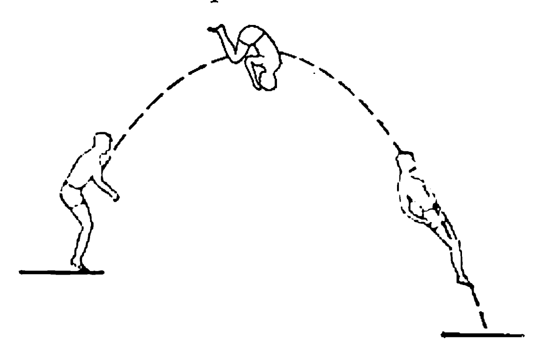


Fig. 61

oscillations périodiques de la durée du jour, avec une période principale d'un an et une amplitude de 0,001 s. La Terre est soumise à différentes actions extérieures régulières telles que les forces de frottement des marées, déterminées par l'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil. Le résultat en est une augmentation du jour solaire moyen de $1{,}640 \cdot 10^{-3}$ s par siècle. Nous avons mentionné au § 1 que l'on peut détecter les irrégularités de rotation de la Terre à l'aide d'horloges à quartz, atomiques et moléculaires. La marche de ces horloges est réglée par les oscillations du réseau cristallin du quartz ou par les oscillations intra-atomiques ou intramoléculaires accompagnant l'émission des raies spectrales. Ces différentes oscillations sont beaucoup plus stables que la rotation de la Terre autour de son axe ou autour du Soleil. C'est pour cette raison que l'étalon de temps — la seconde — est actuellement fourni par les processus oscillatoires cités et non par la rotation de la Terre autour de son axe ou autour du Soleil, comme on le faisait il n'y a pas si longtemps (cf. § 1).

5. Reprenons nos expériences avec le tabouret de Joukovsky. Lorsque le moment d'inertie d'un corps en rotation diminue, son énergie cinétique augmente (à condition que soit nul le moment des forces extérieures). Un examen de la formule (33.6) le montre aussitôt puisque dans ce cas l'impulsion rotatoire du système $L = I\omega$

ne varie pas. Une variation de l'énergie cinétique du système ne peut résulter que du travail de certaines forces. Dans notre exemple ce rôle est assumé par les forces intérieures agissant dans le système. Elles ne peuvent modifier le moment cinétique du système, mais le travail qu'elles effectuent est généralement non nul et détermine la variation de l'énergie cinétique de rotation du système. L'expérimentateur placé sur le tabouret doit développer une certaine force musculaire pour maintenir les haltères sur leurs trajectoires circulaires. La force qu'il applique aux haltères est la force centripète $F = m\omega^2 r$, m étant la masse de l'haltère et r sa distance à l'axe de rotation. Lorsque l'expérimentateur rapproche l'haltère de l'axe de rotation, la force F effectue un travail positif. C'est ce travail qui assure l'augmentation de l'énergie cinétique du système. Lorsque les haltères s'écartent de l'axe de rotation, le travail produit par la force F est négatif et l'énergie cinétique diminue.

Nous allons confirmer ces considérations par un calcul simple. Pour le simplifier encore nous remplacerons l'expérience réelle par un modèle idéal. On assimilera les haltères à des points matériels et on posera que les bras de l'expérimentateur ont une masse négligeable. Dans ces conditions le moment d'inertie du système sera donné par l'expression $I = I_0 + 2mr^2$, où I_0 est le moment d'inertie du système sans haltères, et $2mr^2$ le moment d'inertie des haltères (le facteur 2 tient compte de ce qu'il y a deux haltères). Supposons que le rapprochement et l'écartement des haltères de l'axe de rotation sont infiniment lents. On pourra alors négliger à tout instant l'énergie cinétique de ces mouvements radiaux. Tout le travail des forces intérieures sera utilisé à faire varier l'énergie cinétique de rotation du système. Calculons le travail A effectué par l'expérimentateur lorsqu'il rapproche les haltères de l'axe de rotation en les déplaçant de la distance r_1 à la distance $r_2 < r_1$. Nous avons montré au § 24 que dans le calcul du travail n'intervient que le mouvement relatif des corps en interaction. Dans notre problème, c'est le mouvement des haltères par rapport à l'expérimentateur. Il tire chaque haltère à soi avec une force $m\omega^2 r$. Le travail élémentaire qu'il effectue est positif et égal à $-2m\omega^2 r\,dr$ (dans notre cas $dr < 0$). Le travail total A est donné par l'intégrale

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} 2m\omega^2 r\,dr = -2m\int_{r_1}^{r_2} \frac{(I\omega)^2}{I^2}\,r\,dr = -2m\int_{r_1}^{r_2} \frac{L^2}{I^2}\,r\,dr.$$

Comme le moment cinétique L reste invariable pendant le mouvement et $I = I_0 + 2mr^2$, on obtient

$$A = -2mL^2\int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,dr}{(I_0+2mr^2)^2} = \frac{L^2}{2}\left\{\frac{1}{I_0+2mr_2^2} - \frac{1}{I_0+2mr_1^2}\right\},$$

et finalement

$$A = \frac{L^2}{2I_2} - \frac{L^2}{2I_1} = K_2 - K_1.$$

Cette même formule s'applique si on éloigne les haltères de l'axe de rotation. Elle montre que *l'énergie cinétique de rotation varie aux dépens du travail musculaire fourni par l'expérimentateur.*

6. Les explications qui viennent d'être données n'apportent cependant pas de réponse à la question de savoir quelles forces déterminent la variation de la vitesse angulaire de rotation du système. Si l'haltère n'était soumis qu'à une force centripète, celle-ci, étant une force centrale, ne saurait faire varier l'impulsion rotatoire de l'haltère. Les impulsions rotatoires des haltères et du tabouret avec l'expérimentateur auraient dû se conserver séparément, et les haltères et le tabouret de Joukovsky auraient tourné alors à des vitesses angulaires différentes. Or il n'en est rien et pendant le mouvement radial des haltères les vitesses angulaires s'égalisent. On peut en conclure que dans ce mouvement *les haltères sont soumis non seulement à l'action des forces centripètes, mais encore à des forces de pression latérale émanant des mains de l'expérimentateur. Ce sont ces forces qui font varier la vitesse angulaire de rotation des haltères. Les haltères exercent eux aussi une pression latérale sur les mains de l'expérimentateur, ce qui entraîne une variation de la vitesse angulaire de rotation du tabouret portant l'expérimentateur.* Ce dernier éprouve nettement l'action de ces forces de pression latérale à chaque mouvement radial des haltères surtout s'il est rapide. Les forces supplémentaires de pression latérale qui sont orthogonales à l'axe de rotation et à la direction de la vitesse relative des haltères n'effectuent aucun travail et n'affectent donc d'aucune manière les résultats du calcul du travail A présentés plus haut. Mais *les forces de pression latérale ont* cependant *des moments par rapport à l'axe de rotation et déterminent ainsi une redistribution du moment cinétique invariable du système entre les haltères et le tabouret avec l'expérimentateur.* Le résultat en est que tous ces corps tournent à la même vitesse angulaire. Une étude quantitative de cette question sera présentée au § 64.

7. Le tabouret de Joukovsky permet aussi d'illustrer le caractère vectoriel du moment cinétique. On utilise pour cela une roue de vélo à jante alourdie. Lorsque la roue tourne autour de son axe, du fait de sa symétrie axiale son impulsion totale $\boldsymbol{p}$ est nulle. Nous avons montré au § 30 que dans ces conditions le moment cinétique $\boldsymbol{L}$ par rapport à un point fixe est indépendant de la position de ce point. D'autre part, la projection du vecteur $\boldsymbol{L}$ sur l'axe de rotation de la roue est égale à $I\Omega$ où I est le moment d'inertie de la roue et Ω sa vitesse angulaire. La projection du vecteur $\boldsymbol{L}$ sur toute direction orthogonale à l'axe de la roue est nulle par raison de symétrie axiale. Il s'ensuit que le vecteur $\boldsymbol{L}$ est dirigé le long de l'axe de la roue et a pour module $I\Omega$.

L'expérimentateur monte sur le tabouret et on lui passe alors une roue tournant rapidement autour de l'axe vertical (fig. 62). Le moment cinétique total du système dirigé suivant la verticale a pour module $I\Omega$. Faisons coïncider l'axe vertical du tabouret avec l'axe X. Puisque le moment des forces extérieures par rapport à l'axe X est égal à zéro, la projection L_x du moment cinétique total

du système sur cet axe doit se conserver. Au début de l'expérience toute l'impulsion rotatoire est concentrée dans la roue. L'expérimentateur incline ensuite l'axe de la roue d'un angle α par rapport à la verticale; la projection du moment cinétique de la roue sur l'axe X devient alors égale à $L_x^{\text{roue}} = I\Omega \cos \alpha$, et diminue donc de $I\Omega\,(1 - \cos \alpha)$. Cette diminution doit être compensée par l'accroissement de la projection correspondante du moment cinétique du tabouret et de l'expérimentateur d'une quantité $L_x^{\text{tab}} = I\Omega\,(1 - \cos \alpha)$. L'ensemble tabouret-expérimentateur se met

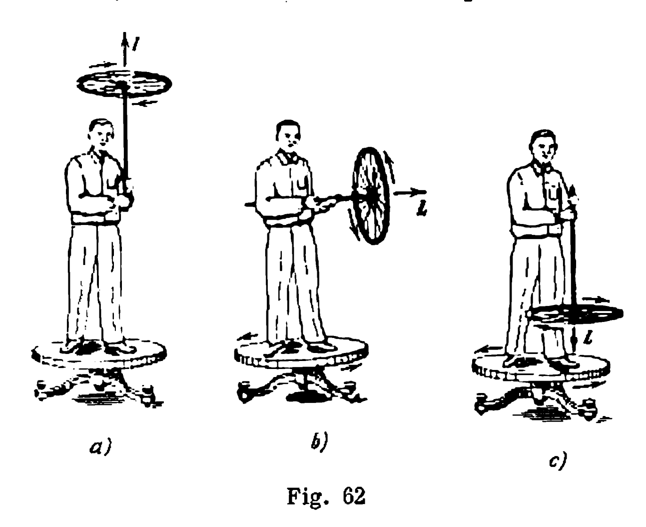


Fig. 62

alors à tourner à une vitesse angulaire ω dont la valeur est donnée par l'équation $I_0\omega = I\Omega\,(1 - \cos \alpha)$, où I_0 est le moment d'inertie du tabouret. Pour $\alpha = 90°$, la projection L_x^{roue} s'annule, ce qui signifie qu'elle a été transmise en totalité à l'ensemble tabouret-expérimentateur. Pour $\alpha = 180°$, la variation de l'impulsion rotatoire de la roue est maximale $\Delta L_x^{\text{roue}} = 2L_x^{\text{roue}}$, de sorte que l'ensemble tabouret-expérimentateur tourne à la vitesse maximale $\omega_{\max} = \frac{2I}{I_0}\,\Omega$. En faisant tourner l'axe de la roue de 180°, l'expérimentateur le ramène dans sa position initiale, ce qui a pour effet d'arrêter la rotation du tabouret. Ce dernier ne revient pas, en général, dans sa position initiale, mais fait un certain angle avec elle.

Lorsque l'expérimentateur incline l'axe de la roue, il se trouve soumis à d'importantes forces de pression latérale; la roue tend à s'échapper de ses mains. Ces forces sont horizontales et orthogonales à l'axe de la roue et à l'axe du tabouret. Leur somme géométrique est nulle mais leur moment par rapport à l'axe X ne l'est pas. C'est

ce moment qui met en rotation le tabouret avec l'expérimentateur. Nous préciserons l'origine de ces forces au chapitre VII.

8. Pour finir nous ferons la remarque suivante. Soit un système fermé de plusieurs corps (appelons-le laboratoire) qui, à l'instant initial, était au repos dans un référentiel S immobile (c'est un référentiel d'inertie). Est-il possible de déplacer le laboratoire dans l'espace uniquement à l'aide de mouvements internes qui seraient tels que tous les corps du laboratoire reviennent à leurs positions initiales? Précisons que par déplacement du laboratoire nous entendons une translation sans rotation. Une réponse négative à cette question nous est donnée par le théorème du mouvement du centre de masse. Il en va tout autrement s'il s'agit d'une rotation d'un système fermé de plusieurs corps. Dans ce cas *les seuls mouvements internes suffisent pour faire tourner dans l'espace le laboratoire d'un angle quelconque, les corps dans le laboratoire reprenant leurs positions initiales.* Supposons, par exemple, que le laboratoire soit constitué par une enceinte fermée A à l'intérieur de laquelle se trouve le seul corps B. A un certain instant le corps B se met en rotation autour d'un certain axe à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}_B$ (par rapport à un référentiel immobile). L'enceinte A se mettra elle aussi à tourner autour du même axe à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}_A$. En vertu de la loi de conservation de l'impulsion rotatoire $I_A\dot{\varphi}_A + I_B\dot{\varphi}_B = 0$, puisque, à l'instant initial, l'impulsion rotatoire était nulle (I_A et I_B sont respectivement les moments d'inertie de l'enceinte A et du corps B). Si on convient de mesurer les angles φ_A et φ_B par rapport aux positions initiales des corps A et B, l'intégration conduit à: $I_A\varphi_A + I_B\varphi_B = 0$. L'angle dont le corps B aura tourné par rapport à l'enceinte A est égal à la différence $\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -\left(\frac{I_A}{I_B}+1\right)\varphi_A$. Pour $\varphi = 2\pi n$ (n étant un nombre entier), le corps B reprendra sa position initiale par rapport à l'enceinte A. L'angle de rotation de l'enceinte φ_A ne sera pas nul en général. La différence de comportement du laboratoire vis-à-vis d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation est déterminée par les circonstances suivantes. *Dans le cas d'un mouvement de translation continu du corps B, ce corps ne reprend jamais sa position initiale par rapport au corps A.* A différentes valeurs de la coordonnée x correspondent différentes positions du corps. Par contre, *dans le cas d'une rotation continue du corps B, la disposition relative des corps A et B se rétablit périodiquement*: aux valeurs de l'angle φ différant de $2n\pi$ correspond *la même* position relative des corps A et B. Un chat qui tombe en chute libre, faisant tourner sa queue et ses pattes, arrive à se placer dans une position qui lui permet de retomber sur ses pattes.

Ces différents processus peuvent être modelés avec le tabouret de Joukovsky. L'expérimentateur placé sur le tabouret peut toujours,

en effectuant des mouvements coniques avec un seul ou avec les deux bras, faire tourner le tabouret de n'importe quel angle. Pour renforcer l'effet, il tiendra à la main un objet pesant de grand moment d'inertie.

§ 35. Le théorème de Huygens-Steiner

Etablissons une corrélation entre les moments d'inertie d un corps par rapport à deux axes parallèles. On supposera que ces axes sont perpendiculaires au plan de la figure et le coupent aux points O et A. Pour alléger l'écriture nous appellerons ces axes axe A et

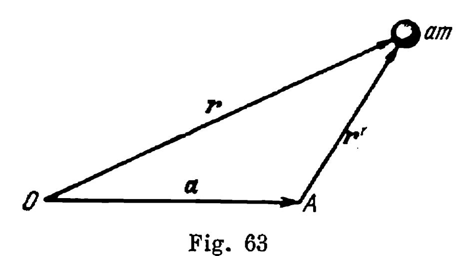


Fig. 63

axe O. Subdivisons en pensée le corps en masses élémentaires dm. Désignons par $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ les rayons vecteurs reliant l'une de ces masses élémentaires aux axes O et A parallèlement au plan de la figure (sur la figure 63 on a représenté le cas particulier où la masse élémentaire dm se trouve dans le plan du dessin). On écrira $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ étant le rayon vecteur $\overrightarrow{OA}$. On aura donc $r'^2 = r^2 + a^2 - 2\,(\boldsymbol{ar})$, et

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + a^2 \int dm - 2\left(\boldsymbol{a} \int \boldsymbol{r}\, dm\right).$$

L'intégrale de gauche est le moment d'inertie I_A du corps par rapport à l'axe A et la première intégrale à droite est son moment d'inertie par rapport à l'axe O. On peut mettre la dernière intégrale à droite sous la forme $\int \boldsymbol{r}\, dm = m\, \boldsymbol{R}_C$, où $\boldsymbol{R}_C$ est le rayon vecteur du centre de masse C du corps par rapport à l'axe O (plus précisément $\boldsymbol{R}_C$ est la composante du rayon vecteur du centre de masse C, parallèle au plan de la figure). Ainsi

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m\,(\boldsymbol{a}\boldsymbol{R}_C). \qquad (35.1)$$

Supposons que l'axe O passe par le centre de masse C du corps. Dans ce cas $\boldsymbol{R}_C = 0$ et la formule (35.1) devient

$$I_A = I_C + ma^2. \qquad (35.2)$$

Cette importante relation géométrique porte le nom de *théorème de Huygens-Steiner* (1796-1863) et s'énonce comme suit: *Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe est égal à la somme de son moment d'inertie par rapport à un axe parallèle au précédent et passant par le centre de masse du corps et de la quantité* ma^2, *où* a *est la distance entre les deux axes.*

§ 36. Calcul des moments d'inertie

1. Le moment d'inertie de tout corps par rapport à un axe quelconque peut être calculé ou mesuré *). Si la répartition de la substance est continue dans le corps, le calcul de son moment d'inertie se ramène au calcul de l'intégrale

$$I = \int r^2\, dm, \tag{36.1}$$

où r est la distance d'un élément de masse dm à l'axe de rotation L'intégration doit être étendue à toute la masse du corps. Ce n'est que pour des cas simples de corps de forme régulière que le calcul analytique de ces intégrales est réalisable. Pour des corps de formes irrégulières, le calcul peut se faire par des méthodes numériques.

Dans nombre de cas on peut simplifier le calcul des moments d'inertie par la mise en œuvre de considérations de similitude et de symétrie, du théorème de Huygens-Steiner et de certaines relations générales dont il sera question plus loin.

Considérons deux corps A et B semblables, de même densité, disposés de façon similaire par rapport à un axe de rotation. Les masses totales et élémentaires de ces corps sont entre elles dans le même rapport que les cubes de leurs dimensions linéaires l. Comme les masses élémentaires doivent être multipliées par les carrés de leurs distances à l'axe de rotation, les moments d'inertie des corps A et B seront entre eux dans le rapport de leurs dimensions linéaires élevées à la puissance cinq, soit $I \sim l^5$ ou

$$I = kml^2. \tag{36.2}$$

l dénote une *dimension caractéristique du corps* ou la distance d'un de ses points caractéristiques jusqu'à l'axe de rotation. Le facteur de proportionnalité k ne dépend que de la forme du corps et de sa position par rapport à l'axe de rotation.

2. Dans bien des cas on peut simplifier le calcul du moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe en calculant d'abord son *moment d'inertie par rapport à un point*. Remarquons qu'en dynamique le moment d'inertie par rapport à un point ne joue aucun rôle, n'étant qu'une notion auxiliaire utilisée pour simplifier les calculs. On

---

*) Au § 42 on décrit une méthode de mesure des moments d'inertie.

appelle *moment d'inertie d'un corps par rapport à un point O* la somme des produits des masses des points matériels constituant le corps par les carrés de leurs distances R au point O: $\Theta = \sum mR^2$. Si la répartition des masses est continue, cette somme se ramène à l'intégrale $\Theta = \int R^2\, dm$. Il ne faut naturellement pas confondre le moment Θ et le moment d'inertie I par rapport à un axe. Dans le cas du moment I on doit multiplier les masses dm par les carrés de leurs distances jusqu'à l'axe et dans le cas du moment Θ on multiplie les masses par les carrés de leurs distances jusqu'au point fixe.

Considérons d'abord un seul point matériel de masse m et de coordonnées rectangulaires x, y, z (fig. 64). Les carrés des distances du point matériel jusqu'aux axes de coordonnées X, Y, Z sont respectivement égaux à $y^2 + z^2$, z^2+x^2, $x^2 + y^2$, et les moments d'inertie par rapport à ces mêmes axes sont

$$I_x = m\,(y^2 + z^2), \quad I_y = m\,(z^2 + x^2),$$
$$I_z = m\,(x^2 + y^2).$$

En additionnant ces égalités nous obtenons

$$I_x + I_y + I_z = 2m\,(x^2 + y^2 + z^2).$$

Mais $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, R étant la distance du point matériel m à l'origine des coordonnées O. Ainsi

$$I_x + I_y + I_z = 2\Theta. \qquad (36.3)$$

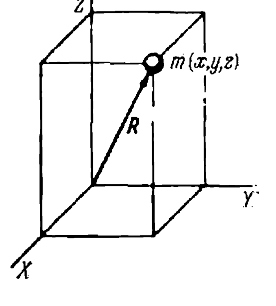


Fig. 64

Cette relation est valable non seulement pour un point matériel, mais pour n'importe quel corps puisqu'on peut considérer tout corps comme un ensemble de points matériels. Ainsi *la somme des moments d'inertie d'un corps par rapport à trois axes rectangulaires se coupant mutuellement en un point O est égale au double du moment d'inertie de ce corps par rapport au point O.*

Si on fait tourner les axes de coordonnées X, Y, Z par rapport au corps, le système de coordonnées restant rectangulaire, les moments d'inertie I_x, I_y, I_z se trouveront changés dans le cas général, mais leur somme ne le sera pas et restera égale à 2Θ, la quantité Θ étant indépendante de l'orientation des axes de coordonnées. Ainsi *la somme des moments d'inertie I_x, I_y, I_z par rapport à trois axes rectangulaires d'origine O ne dépend que de la position de cette origine et ne change pas si on fait varier l'orientation des axes.* Toute la signification géométrique de cette assertion apparaît en algèbre tensorielle.

3. On trouve un autre genre de corrélation dans le cas d'une répartition plane des masses. Soit une plaquette de forme arbitraire dans le volume de laquelle la masse est répartie d'une manière arbi-

traire. Si la plaquette est très mince, on peut admettre que la substance est répartie en couche infiniment mince sur un plan mathématique. Faisons coïncider ce plan avec le plan de coordonnées XY. Les coordonnées z de tous les points matériels seront nulles et le moment d'inertie Θ de la plaquette par rapport à l'origine des coordonnées O sera donné par l'expression $\Theta = \sum \Delta m\,(x^2 + y^2)$, donc égal au moment d'inertie de la plaquette par rapport à l'axe Z. Ainsi pour une répartition plane des masses $I_x + I_y + I_z = 2I_z$, i.e.

$$I_x + I_y = I_z. \tag{36.4}$$

Par ailleurs il est évident que la quantité Θ ne saurait être inférieure à aucun des moments d'inertie I_x, I_y, I_z, par exemple $\Theta \geqslant I_z$ (l'égalité n'a lieu que pour une répartition plane des masses). En soustrayant l'inégalité $2I_z \leqslant 2\Theta$ de l'égalité (36.3) nous trouvons $I_x + I_y - I_z \geqslant 0$ ou

$$I_x + I_y \geqslant I_z. \tag{36.4a}$$

Il en résulte qu'avec des segments de droite dont les longueurs sont numériquement égales à I_x, I_y, I_z on peut construire un triangle. Pour une répartition plane des masses (dans le plan XY), la formule (36.4a) se réduit à la formule (36.4). Après ces quelques remarques préliminaires, nous pouvons passer au calcul des moments d'inertie de corps de formes définies.

4. **Moment d'inertie d'une fine tige homogène par rapport à un axe orthogonal.** Posons que l'axe orthogonal à la tige passe par son extrémité A (fig. 65). Le moment d'inertie peut s'écrire $I_A = kml^2$, l étant la longueur de la tige. Le

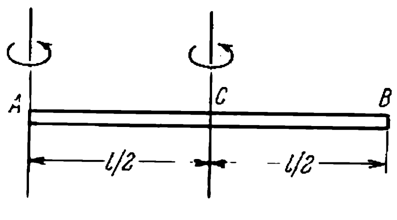


Fig. 65

centre C de la tige est son centre de masse. Selon le théorème de Huygens-Steiner, $I_A = I_C + m\,(l/2)^2$. La quantité I_C peut être présentée comme la somme des moments d'inertie de deux tiges CA et CB de longueurs $l/2$, de masses $m/2$ et dont les moments d'inertie sont égaux à $k\,\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$. Ainsi $I_C = km\left(\frac{l}{2}\right)^2$. En portant ces expressions dans la formule précédente, nous obtenons

$$kml^2 = km\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

d'où $k = 1/3$. Nous trouvons en définitive

$$I_A = \frac{1}{3} ml^2, \tag{36.5}$$

$$I_C = \frac{1}{12} ml^2. \tag{36.6}$$

Il est essentiel que la tige soit fine. Une tige infiniment fine peut être considérée comme un segment de droite; il est donc homothétique à l'une de ses parties. Le coefficient k sera donc le même pour une tige entière ou une fraction de tige, la moitié par exemple. Mais pour une tige d'épaisseur finie, ce n'est plus le cas et le coefficient k aura des valeurs différentes pour une tige entière ou la moitié de cette tige; aussi, en toute rigueur, les formules (36.5) et (36.6) ne sont pas valables pour les tiges d'épaisseur finie; on ne peut les utiliser comme des approximations que lorsque les dimensions transversales de la tige sont petites par rapport à sa longueur.

5. Moment d'inertie d'une plaque et d'un parallélépipède rectangulaires et homogènes. Menons les axes de coordonnées X et Y par le centre de la plaque C et parallèlement à ses côtés (fig. 66). Imaginons que toute la substance de la

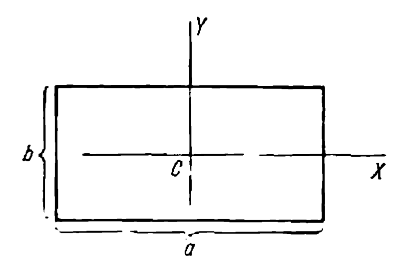


Fig. 66

plaque se soit déplacée parallèlement à l'axe X pour aller se concentrer sur l'axe Y. Pour un tel déplacement les distances entre tous les points matériels et l'axe X restent les mêmes; en conséquence le moment d'inertie I_x par rapport à l'axe X reste inchangé. Mais à la suite de ce déplacement de substance, la plaque se trouve transformée en une tige infiniment fine de longueur l, dont le moment d'inertie est donné par la formule (36.6). Nous trouvons ainsi

$$I_x = \frac{m}{12} b^2, \qquad I_y = \frac{m}{12} a^2. \tag{36.7}$$

Le moment d'inertie I_z de la plaque par rapport à l'axe Z qui lui est orthogonal se laisse calculer à l'aide de la formule (36.4):

$$I_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2). \tag{36.8}$$

La formule (36.8) peut servir également au calcul du moment d'inertie d'un parallélépipède droit par rapport à ses axes géométriques. Pour s'en rendre compte il suffit de s'imaginer qu'on le comprime le long de l'un de ses axes pour le transformer en plaque; le moment d'inertie par rapport à cet axe ne change pas du fait de la compression. La formule (36.8) donne le moment d'inertie du parallélépipède rectangle par rapport à l'axe passant par le centre de sa base de côtés a et b. Sur la figure 66 cet axe est perpendiculaire au plan de la figure.

6. Moment d'inertie d'un anneau infiniment mince. Il est bien évident que le moment d'inertie par rapport à l'axe Z (fig. 67) est égal à

$$I_z = mR^2, \tag{36.9}$$

où R est le rayon de l'anneau. Par raison de symétrie $I_x = I_y$; de ce fait la formule (36.4) donne

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}mR^2. \tag{36.10}$$

La formule (36.9) peut servir aussi au calcul du moment d'inertie d'un cylindre creux homogène à parois infiniment minces par rapport à son axe géométrique.

7. Moment d'inertie d'un disque infiniment mince et d'un cylindre massif. On suppose qu'aussi bien le disque que le cylindre sont homogènes en ce sens

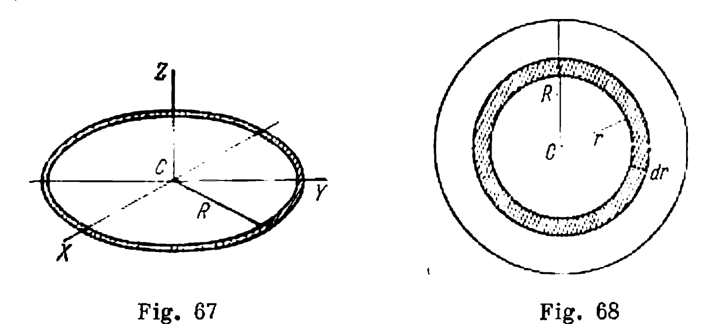


Fig. 67 Fig. 68

que la substance qui les constitue y est répartie avec une densité constante. Faisons passer l'axe Z par le centre C du disque perpendiculairement à son plan (fig. 68). Considérons un anneau infiniment mince de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + dr$. L'aire de cet anneau est $dS = 2\pi r\,dr$. Son moment d'inertie donné par la formule (36.9) est $dI_z = r^2\,dm$. Le moment d'inertie du disque tout entier est $I_z = \int r^2\,dm$. Le disque étant homogène $dm = m\frac{dS}{S} = 2m\frac{r\,dr}{R^2}$, où $S = \pi R^2$ est l'aire du disque. En mettant ces expressions sous le signe d'intégration, nous obtenons

$$I_z = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\,dr = \frac{1}{2}mR^2. \tag{36.11}$$

Le moment d'inertie du disque par rapport à l'un de ses diamètres est, pour raison de symétrie, deux fois plus petit que la valeur donnée par la formule (36.4):

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}mR^2. \tag{36.12}$$

La formule (36.11) sert également au calcul du moment d'inertie d'un cylindre massif et homogène par rapport à son axe géométrique longitudinal.

8. Moment d'inertie d'un cylindre massif et homogène par rapport à un axe transversal. Supposons que l'axe de rotation passe par le centre de la base A du cylindre perpendiculairement à son axe longitudinal (fig. 69). Découpons en pensée un cylindre d'une hauteur infinitésimale de masse dm se trouvant à une distance x de l'axe de rotation. En vertu du théorème de Huygens-Steiner,

son moment d'inertie a pour expression

$$dI_A = dm \cdot x^2 + \frac{1}{4}\, dm \cdot R^2.$$

Le moment d'inertie du cylindre tout entier sera alors

$$I_A = \int x^2\, dm + \frac{1}{4} R^2 \int dm.$$

La première intégrale coïncide par sa forme avec la formule du moment d'inertie d'une tige homogène infiniment mince; elle est donc égale à $^1/_3\, ml^2$. La deuxième intégrale est égale à $^1/_4\, mR^2$. Ainsi

$$I_A = \frac{1}{3}\, ml^2 + \frac{1}{4}\, mR^2. \qquad (36.13)$$

Le moment d'inertie I_C par rapport à un axe géométrique transversal passant par le centre de masse du cylindre peut être calculé à l'aide de la formule

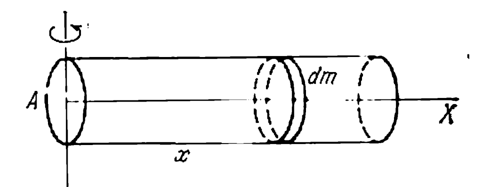


Fig. 69

(36.13) à condition de subdiviser le cylindre initial en deux moitiés de hauteurs $l/2$ et de masses $m/2$. On obtient alors

$$I_C = \frac{1}{12}\, ml^2 + \frac{1}{4}\, mR^2. \qquad (36.14)$$

Pour $R \to 0$ les formules (36.13) et (36.14) se ramènent aux formules (36.5) et (36.6) pour une tige infiniment mince.

9. Moment d'inertie d'une enveloppe sphérique à parois infiniment minces. Calculons d'abord le moment d'inertie Θ par rapport au centre de la sphère. De toute évidence il est égal à $\Theta = mR^2$. Appliquons maintenant la formule (36.3) en y posant par raison de symétrie $I_x = I_y = I_z = I$. Finalement le moment d'inertie d'une enveloppe sphérique par rapport à son diamètre est

$$I = \frac{2}{3}\, mR^2. \qquad (36.15)$$

10. Moment d'inertie d'une sphère massive et homogène. On peut considérer une sphère massive comme un ensemble de minces couches sphériques, chacune de masse dm (voir fig. 68). Comme nous supposons la sphère homogène, on a $dm = m\,\frac{dV}{V}$, où $dV = 4\pi r^2\, dr$ est le volume d'une couche sphérique et $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ le volume de toute la sphère. D'après la formule (36.15) le moment d'inertie d'une couche sphérique par rapport à son diamètre est $dI = {}^2/_3\, dm\, r^2 = 2m\,\frac{r^4\, dr}{R^3}$. En intégrant nous trouvons le moment d'inertie de la sphère mas-

sive

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \qquad (36.16)$$

11. Moment d'inertie d'une ellipse homogène. On supposera que la masse est uniformément répartie sur toute l'aire de l'ellipse. On peut obtenir une ellipse par compression uniforme d'un cercle le long de l'un de ses diamètres, par exemple le long de l'axe Y (fig. 70). Lors de cette compression le moment d'inertie par rapport à l'axe Y ne varie pas. Sa valeur initiale était $^1/_4\ ma^2$ (a est le rayon du cercle à partir duquel on obtient par compression notre ellipse; ce rayon est égal à la longueur du demi-grand axe de l'ellipse). Le même raisonnement vaut pour l'axe X. On obtient ainsi

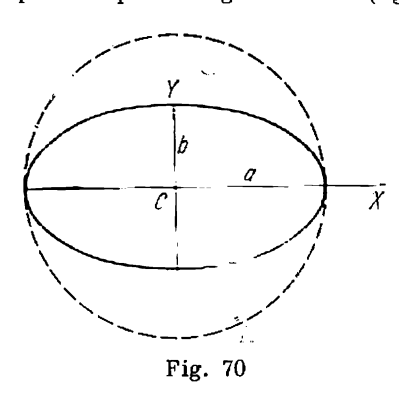


Fig. 70

$$I_x = \frac{1}{4} mb^2, \quad I_y = \frac{1}{4} ma^2. \qquad (36.17)$$

La formule (36.4) permet de calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe Z qui est perpendiculaire au plan de l'ellipse :

$$I_z = \frac{m}{4} (a^2 + b^2). \qquad (36.18)$$

La formule (36.18) permet de calculer aussi le moment d'inertie d'un cylindre elliptique homogène par rapport à son axe géométrique longitudinal.

12. Moment d'inertie d'un ellipsoïde de révolution. On supposera que la masse est uniformément répartie dans tout le volume de l'ellipsoïde. Les axes de coordonnées X, Y, Z sont orientés le long des axes principaux de l'ellipsoïde. Désignons par a, b, c les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde. Calculons son moment d'inertie par rapport à l'axe principal Z. Par compression ou par extension uniforme d'une sphère le long de trois directions orthogonales telles que les directions des axes X, Y, Z, on transforme la sphère en ellipsoïde. Prenons une sphère homogène de rayon a; son moment d'inertie est $I_s = {}^2/_5\ ma^2$. Soumettons-la à une compression uniforme le long de l'axe Z jusqu'à la réduire à l'état d'un disque circulaire infiniment mince (avec une répartition non uniforme des masses). Le moment d'inertie I_z reste le même et les moments d'inertie I_x et I_y sont égaux par raison de symétrie. En vertu de (36.4) $I_x = I_y = {}^1/_2 I_z = {}^1/_5\ ma^2$. Soumettons maintenant notre disque circulaire à une compression uniforme le long de l'axe Y jusqu'à ce que sa dimension le long de cet axe devienne égale à $2b$. Le moment d'inertie I_y n'aura pas varié pendant cette opération, tandis que I_x devient: $I_x = {}^1/_5\ mb^2$. Appliquons à nouveau la formule (36.4) au moment d'inertie I_z du disque elliptique obtenu; nous trouvons $I_z = I_x + I_y = {}^1/_5\ m\ (a^2 + b^2)$. Enfin soumettons le disque elliptique à une extension uniforme le long de l'axe Z jusqu'à ce qu'il se transforme en un ellipsoïde de révolution de demi-axes a, b, c. La valeur de I_z n'aura pas varié. Ainsi le moment d'inertie de l'ellipsoïde de révolution par rapport à l'axe Z est

$$I_z = \frac{m}{5} (a^2 + b^2). \qquad (36.19)$$

Les moments d'inertie par rapport aux deux autres axes principaux sont :

$$I_x = \frac{m}{5} (b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{m}{5} (c^2 + a^2).$$

§ 37. Equation des moments par rapport à une origine et à un axe mobiles

1. L'équation des moments (30.5) est vérifiée dans le cas où l'origine O par rapport à laquelle se déterminent les moments $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{M}$ est *fixe.* De même l'équation (32.2) se rapporte aux moments déterminés par rapport à un *axe fixe.* Il existe cependant des cas où il est nécessaire de prendre en considération des *origines* et des *axes mobiles.* Nous nous proposons d'établir ce que devient alors l'équation des moments. Sont particulièrement intéressants les cas où l'équation des moments par rapport à une origine mobile conserve la forme (30.5).

2. Considérons pour commencer un point matériel. Posons que $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v}$ sont la vitesse et l'impulsion du point matériel par rapport à un référentiel d'inertie immobile S, et $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur reliant le point matériel à l'origine mobile O. Le mouvement de l'origine O peut être ou uniforme ou varié. Désignons par $\boldsymbol{v}_O$ la vitesse de ce mouvement. Le moment cinétique d'un point en mouvement par rapport à l'origine O peut être déterminé par l'expression (30.3), c'est-à-dire $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{rp}]$. En différentiant nous obtenons

$$\dot{\boldsymbol{L}} = [\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}] + [\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}].$$

Mais maintenant $\dot{\boldsymbol{r}}$ désigne non pas la vitesse $\boldsymbol{v}$ du point matériel, mais la différence entre cette vitesse $\boldsymbol{v}$ et la vitesse $\boldsymbol{v}_O$ de l'origine mobile. Ainsi

$$\dot{\boldsymbol{L}} = [(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_O)\,\boldsymbol{p}] + [\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}].$$

En appliquant l'équation de Newton $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$ et en tenant compte de la colinéarité des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{p}$ on a $\dot{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{rF}] - [\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{p}]$ ou enfin

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M} - [\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{p}]. \qquad (37.1)$$

Afin de généraliser cette équation à un système de points matériels, écrivons-la pour le i-ème point matériel: $\dot{\boldsymbol{L}}_i = \boldsymbol{M}_i + [\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{p}_i]$, puis sommons sur toutes les valeurs de i. Nous retrouverons ainsi l'équation (37.1) dans laquelle $\boldsymbol{p}$ représentera maintenant l'impulsion de *tout le système* de points matériels et $\boldsymbol{M}$ le moment des forces extérieures qui lui sont appliquées.

L'impulsion $\boldsymbol{p}$ peut être représentée par $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_C$, $\boldsymbol{v}_C$ étant la vitesse du centre de masse du système. Ainsi

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M} - m\,[\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{v}_C]. \qquad (37.2)$$

C'est l'*équation des moments par rapport à une origine mobile.*

Si l'origine mobile O coïncide avec le centre de masse C du système, on a $v_O = v_C$ *et la formule* (37.2) *se ramène à l'équation* (30 5). *L'équation des moments par rapport au centre de masse est de la même forme que celle qui se rapporte à une origine fixe.* Qui plus est, dans ce cas, il n'est plus indispensable de considérer les vitesses v des points matériels par rapport à un référentiel S fixe. On peut les rapporter notamment au centre de masse C que l'on considérera alors comme s'il était fixe. Si le centre de masse C est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, cette dernière assertion résulte directement du principe de la relativité. Mais elle est valable même si le mouvement du centre de masse est accéléré. En effet, la vitesse de chaque point matériel peut être représentée sous la forme $v = v_C + v_{rel}$, où v_{rel} est la vitesse du point par rapport au centre de masse C. On écrira

$$L = \sum [rmv] = \sum [rmv_C] + \sum [rmv_{rel}].$$

La première somme à droite est nulle; comme la vitesse v_C est la même pour tous les termes de la somme, nous pouvons la sortir de sous le signe somme, ce qui donne $-[v_C \sum mr] = -[v_C r_C] \sum m$, r_C étant le rayon vecteur du centre de masse. Or r_C est nul puisque nous avons convenu de faire coïncider l'origine des coordonnées O avec le centre de masse. Nous obtenons ainsi

$$L = \sum [rmv_{rel}],$$

ce qui démontre notre assertion.

Un autre cas, plus général, où l'équation (37.2) se laisse ramener à la forme simple (30.5) est celui où les vitesses v_O et v_C sont *colinéaires*. Le produit $[v_O v_C]$ s'annule alors, ce qui nous conduit à conclure: *lorsque la vitesse de l'origine mobile O est parallèle à la vitesse du centre de masse C, l'équation des moments prend la forme simple* (30.5). On devra cependant, dans le calcul du moment cinétique L, *rapporter* les vitesses de tous les points matériels *à un référentiel d'inertie S et non pas au centre de masse.*

3. On arrive à des résultats analogues lorsqu'il s'agit d'axes animés d'un mouvement de translation (l'axe en mouvement reste constamment parallèle à sa direction initiale). Il n'est pas nécessaire de formuler spécialement ces résultats puisque l'équation des moments par rapport à un axe se déduit de l'équation des moments par rapport à un point par projection sur cet axe.

PROBLÈMES

1. Calculer les accélérations des corps et les tensions des fils de suspension dans la machine d'Atwood en supposant que $m_2 > m_1$ (fig. 71). Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe géométrique sera dénoté par I et le rayon de la poulie par r. La masse du fil sera considérée comme négligeable.

S o l u t i o n. La masse du fil étant négligeable, les variations des ten-

sions T_1 et T_2 des deux brins du fil peuvent être négligées. Les équations de mouvement des poids et de la poulie sont:

$$m_1 a = T_1 - m_1 g,$$
$$m_2 a = m_2 g - T_2,$$
$$I \frac{d\omega}{dt} = r (T_2 - T_1).$$

Si le fil ne glisse pas sur la poulie, on écrira

$$r \frac{d\omega}{dt} = a.$$

En résolvant ces équations nous obtenons

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} g,$$

d'où on tirera T_1 et T_2. Si la masse de la poulie est très faible, on a $T_1 = T_2$.

2. Un fil portant une charge dont la masse $M = 1$ kg est enroulé sur la poulie d'une croix d'Oberbeck (fig. 72). La charge est abaissée d'une hauteur

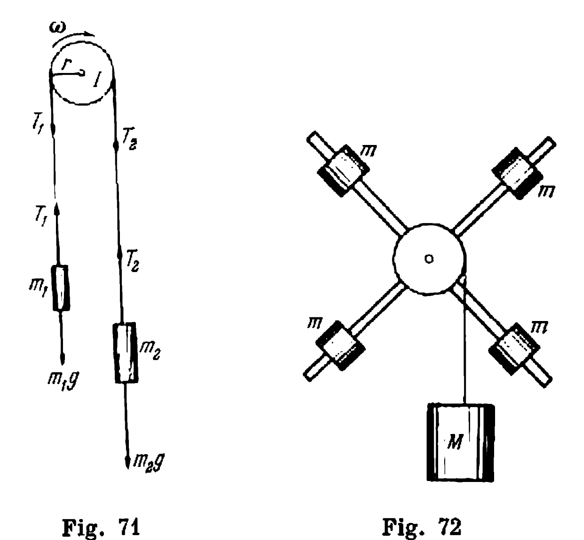


Fig. 71 Fig. 72

$h = 1$ m jusqu'à sa position la plus basse, puis on la fait remonter. Pendant cette opération il se produit une secousse se traduisant par une brusque augmentation de la tension du fil. Déterminer la tension T du fil pendant l'abaissement et la remontée de la charge et estimer de façon approchée la tension du fil pendant la durée T_{sec} de la secousse. Le rayon de la poulie est $r = 3$ cm. La croix porte quatre poids, chacun d'une masse $m = 250$ g et se trouvant à une distance $R = 30$ cm de son axe. Les moments d'inertie de la croix et de la poulie peuvent être négligés par rapport au moment d'inertie de toutes les charges. Ne pas tenir compte de l'allongement que subit le fil pendant la secousse.

Réponse. $T = \frac{Mg}{1+\frac{Mr^2}{I}} = \frac{Mg}{1+\frac{Mr^2}{4mR^2}} = 0{,}99T_0$, où I est le moment d'inertie du système et T_0 la tension du fil lorsque la charge est au repos. On peut estimer la tension moyenne du fil pendant la durée T_{sec} de la secousse de la façon suivante. On commencera par calculer la vitesse maximale de la charge M dans sa position inférieure; désignons-la par v. Pendant le temps $\Delta t = \frac{\pi r}{v}$ où la poulie fait un demi-tour, la quantité de mouvement de la charge M varie de $2Mv$. Cette variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force agissant sur la charge M pendant le même intervalle de temps: $(T_{sec} - Mg)\,\Delta t$. Le calcul donne $T_{sec} = Mg + \frac{Mhr}{\pi mR^2} T \approx 1{,}42\ T_0$.

3. Une pièce de monnaie de masse m et de rayon r tournant dans un plan horizontal autour de son axe géométrique à la vitesse angulaire ω tombe suivant la verticale et vient se coller sur un disque horizontal monté sur un axe vertical. Le disque se met en rotation. Le moment des forces de frottement qui apparaît alors dans l'axe du disque est supposé constant et égal à M_0. Au bout de quel temps le disque s'arrêtera-t-il de tourner? Combien de tours N aura-t-il effectué avant de s'arrêter? Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe géométrique est I_0. La distance entre l'axe de la pièce de monnaie et l'axe du disque est égale à d.

Réponse. $t = \frac{mr^2}{2M_0}\omega$; $N = \frac{M_0}{2I}t^2$, où $I = I_0 + m\left(d^2 + \frac{r^2}{2}\right)$.

4. Un cylindre massif, homogène, de faible longueur et de rayon r, tournant autour de son axe géométrique à la vitesse n tours/s, est placé verticalement sur un plan horizontal. Combien de tours N effectuera-t-il avant de s'arrêter de tourner sur lui-même? Le coefficient de frottement de glissement entre la base du cylindre et la surface horizontale ne dépend pas de la vitesse de rotation et a une valeur constante k.

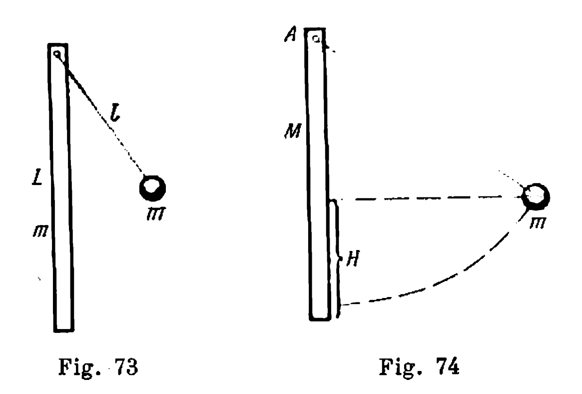


Fig. 73 Fig. 74

Réponse. $N = \frac{3\pi r n^2}{4kg}$.

5. Une tige mince de masse m et de longueur L (fig. 73) est accrochée par une de ses extrémités à l'axe horizontal autour duquel elle peut tourner sans frottement. A ce même axe horizontal on suspend par un fil de longueur l une bille de même masse m. On écarte la bille d'un certain angle par rapport à sa position d'équilibre et on l'abandonne à elle-même. Quelle doit être la longueur

du fil de suspension pour que la bille s'arrête après choc sur la tige ? On supposera que le choc est parfaitement élastique.

Réponse. $l = \frac{L}{\sqrt{3}}$.

6. Un pendule simple, de masse m, et une tige de masse M (fig. 74) sont suspendus à une même attache A autour de laquelle ils peuvent osciller librement. La longueur du pendule est égale à celle de la tige. On écarte la bille en la faisant monter à une hauteur H par rapport à sa position d'équilibre et on l'abandonne à elle-même. En descendant elle percute la tige, le choc étant inélastique. Après le choc, quels seront les mouvements de la bille et de l'extrémité inférieure de la tige et à quelles hauteurs monteront-elles ?

Solution. Lorsque la bille passe par sa position d'équilibre, sa vitesse avant choc est $v_0 = \sqrt{2gH}$. Comme le choc est inélastique, aussitôt après le choc les vitesses de la bille et de l'extrémité inférieure de la tige seront toutes deux égales à v. On la détermine en appliquant la loi de la conservation du moment cinétique par rapport à l'axe A :

$$mlv_0 = mlv + I\omega,$$

où $I = {}^1/_3\, Ml^2$ est le moment d'inertie de la tige par rapport au même axe. Puisque $v = l\omega$, on obtient

$$v = \frac{ml^2}{I + ml^2}\, v_0 = \frac{3m}{M + 3m}\, v_0.$$

Il s'agit maintenant de savoir si après choc la bille et la tige feront un mouvement d'ensemble ou si leurs mouvements seront distincts. Pour répondre à cette question calculons la vitesse v_1 de la bille et la vitesse v_2 de l'extrémité inférieure de la tige qu'elles auraient si, après avoir été relevées à une même hauteur h_1 et abandonnées à elles-mêmes, elles se mouvaient indépendamment l'une de l'autre. Le calcul de ces vitesses se fait à l'aide des équations exprimant la loi de la conservation de l'énergie

$$v^2 - v_1^2 = 2gh_1, \quad \frac{1}{2}\,\frac{I}{l^2}\,(v^2 - v_2^2) = Mg\,\frac{h_1}{2}.$$

En mettant la seconde équation sous la forme

$$v^2 - v_2^2 = 3gh_1,$$

nous voyons que $v_1 > v_2$. Il s'ensuit qu'en toute position la bille ira plus vite que la tige et comme dans notre expérience elle se meut derrière la tige, elle s'y appliquera. Ainsi, après choc, la bille et la tige monteront comme un seul corps ; la hauteur de remontée h se déduit de la loi de la conservation de l'énergie :

$$h = \frac{I + ml^2}{(M + 2m)\, gl^2}\, v^2 = \frac{6m^2}{(M + 2m)(M + 3m)}\, H.$$

7. Résoudre le problème n° 6 en supposant qu'avant le choc c'est la tige qui avait été écartée de sa position d'équilibre (son extrémité inférieure a été relevée à une hauteur H).

Réponse. Après le choc la bille montera à une hauteur

$$h_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{M + 3m}\right)^2 H,$$

et l'extrémité inférieure de la tige à une hauteur

$$h_2 = \left(\frac{M}{M + 3m}\right)^2 H = \frac{2}{3}\, h_1.$$

8. Une tige rigide de longueur l et de masse M peut tourner autour d'un axe horizontal A passant par l'extrémité de la tige (fig. 75). On suspend à ce même axe A un pendule simple, de même longueur l et de masse m. A l'instant initial la tige se trouve dans une position horizontale et ensuite elle est abandonnée à elle-même. En passant par la position d'équilibre, la tige entre en percussion parfaitement élastique avec la bille ; ce choc provoque la déformation de ces deux corps et une partie de l'énergie cinétique se convertit en énergie

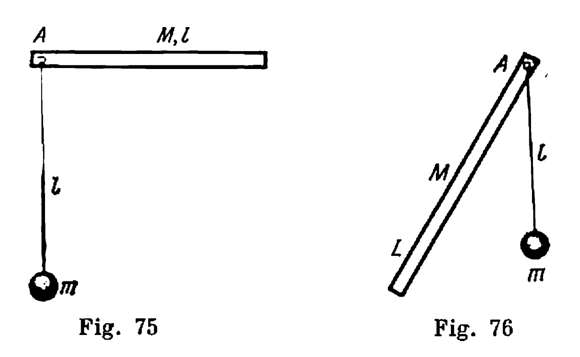


Fig. 75 Fig. 76

potentielle de déformation. Aussitôt après les déformations se relaxent et l'énergie potentielle accumulée se convertit de nouveau en énergie cinétique. Trouver la valeur maximale de l'énergie potentielle de déformation U.

Réponse. $U=\frac{1}{2}\frac{ml^2}{I+ml^2}Mgl=\frac{3}{2}\frac{Mm}{M+3m}gl$, où I est le moment d'inertie de la tige.

9. Soit une planche homogène de longueur $L = 1{,}5$ m et de masse $M = 10$ kg suspendue en position verticale à un axe horizontal passant par son extrémité supérieure. Un projectile tiré suivant l'horizontale avec une vitesse initiale $V_0 = 600$ m/s percute l'extrémité inférieure de la planche, la transperce et poursuit son mouvement à la vitesse V. Calculer la vitesse V sachant qu'après percussion la planche oscille avec une amplitude angulaire $\alpha = 0{,}1$ rad. La masse du projectile est $m = 10$ g.

Réponse. $V = V_0-\frac{M}{m}\sqrt{\frac{2}{3}gL}\,\sin\frac{\alpha}{2} = 444$ m/s.

10. Sur un même axe horizontal A (fig. 76) sont suspendues une bille attachée à un fil de longueur l et une tige homogène de longueur L ; la tige est déviée d'un certain angle de sa position d'équilibre ; lorsqu'on l'abandonne à elle-même, la tige arrive à sa position d'équilibre et entre en collision élastique avec la bille. Quel doit être le rapport des masses de la tige M et de la bille m pour que, après choc, la bille et son point d'impact sur la tige se meuvent en sens inverses à la même vitesse ? Pour quelle valeur de ce rapport ce mouvement devient impossible ?

Réponse. $ML^2 = ml^2$. Comme $L \geqslant l$, le processus décrit n'est possible que si $M \leqslant m$. Pour $M>m$ le processus est impossible.

11. On fait tomber sur un disque horizontal tournant autour de son axe géométrique à la vitesse angulaire ω_1 un deuxième disque tournant autour du même axe à la vitesse angulaire ω_2. Les moments d'inertie des disques par rapport à l'axe de rotation commun sont I_1 et I_2. Lorsque les disques entrent en contact ils s'encastrent l'un dans l'autre (au moyen d'ergots). Quelle sera la variation totale de l'énergie cinétique de rotation du système après la chute

du deuxième disque? A quoi est due la variation de cette énergie? (Les axes géométriques des deux disques sont dans le prolongement l'un de l'autre.)

Réponse. L'énergie cinétique de rotation diminuera de

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1+I_2}(\omega_1-\omega_2)^2.$$

12. Les poulies de deux volants sont réunies par une courroie de transmission (fig. 77). Les rayons des poulies sont R_1 et R_2. Les moments d'inertie des deux volants par rapport à leurs axes géométriques sont I_1 et I_2. En bloquant le mouvement du deuxième volant et de la courroie, on communique au premier volant une vitesse angulaire ω_0; il apparaît alors un glissement entre la courroie et l'axe du premier volant. On libère ensuite la courroie et le deuxième volant.

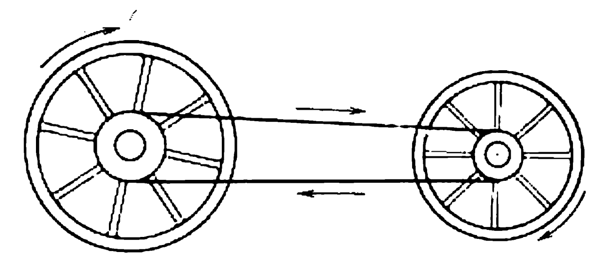


Fig. 77

En négligeant toutes les forces de frottement à l'exclusion des forces de glissement entre la courroie et les axes des volants, trouver les vitesses de rotation ω_1 et ω_2 des volants en régime stationnaire, c'est-à-dire après la cessation du glissement de la courroie. Calculer la perte ΔK d'énergie cinétique déterminée par le frottement de glissement en négligeant la masse de la courroie.

Solution. Du fait du frottement de glissement les tensions T_1 du brin supérieur et T_2 du brin inférieur de la courroie seront différentes. Appliquons aux volants l'équation (33.4); nous obtenons

$$I_1\frac{d\omega_1}{dt}=(T_1-T_2)R_1, \quad I_2\frac{d\omega_2}{dt}=(T_2-T_1)R_2.$$

Divisons la première de ces équations par R_1 et la deuxième par R_2; additionnons puis intégrons. On trouve alors

$$\frac{I_1\omega_1}{R_1}+\frac{I_2\omega_2}{R_2}=\text{const}.$$

La constante y est égale à $I_1\omega_0/R_1$ puisqu'à l'instant initial $\omega_1=\omega_0$ et $\omega_2=0$. Lorsque le glissement de la courroie cesse, $\omega_1 R_1=\omega_2 R_2$. En résolvant le système d'équations obtenu, nous trouvons les valeurs des vitesses angulaires après la cessation du glissement:

$$\omega_1=\frac{I_1R_2^2}{I_1R_2^2+I_2R_1^2}\omega_0, \quad \omega_2=\frac{I_1R_1R_2}{I_1R_2^2+I_2R_1^2}\omega_0.$$

La perte d'énergie cinétique due au frottement est

$$\Delta K=\frac{1}{2}\frac{I_1I_2R_1^2}{I_1R_2^2+I_2R_1^2}\omega_0^2.$$

13. Expliquez pour quelle raison, dans le problème 12, le moment complet de la quantité de mouvement du système ne se conserve pas.

14. Un disque homogène A de masse M_1 et de rayon r_1, qui tourne à la vitesse angulaire ω_0, est mis en contact avec un disque B dont l'axe de rotation est perpendiculaire à celui du disque A (fig. 78). La masse du disque B est M_2; la distance entre le point de contact des disques et l'axe du disque A est égale à a. Déterminer les vitesses angulaires stabilisées ω_1 et ω_2 des disques et la perte d'énergie pendant le processus de stabilisation. Négliger le frottement des axes ainsi que le frottement de roulement.

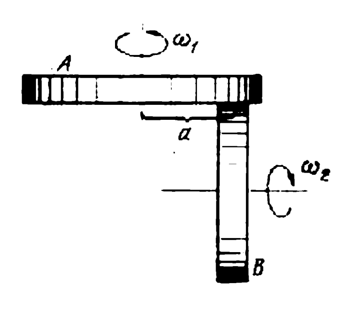


Fig. 78

Réponse. $\omega_1 = \frac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2}\omega_0$, $\omega_2 = \frac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2}\frac{a}{r_2}\omega_0 = \frac{a}{r_2}\omega_1$. La perte d'énergie est

$$\Delta K = \frac{M_1 M_2 r_1^2 a^2}{4(M_1 r_1^2 + M_2 a^2)}\omega_0^2.$$

15. Un poteau vertical de hauteur l scié par le bas tombe sur le sol en tournant autour de sa base inférieure. Déterminer la vitesse linéaire de son extrémité supérieure à l'instant où elle touche au sol. Quel point du poteau aura à cet instant une vitesse égale à celle d'un corps tombant en chute libre d'une hauteur égale à la hauteur initiale du point considéré?

Réponse. $v = \sqrt{3gl}$. Le point cherché se trouve à une distance $x = {}^2/_3\, l$ de la base du poteau.

16. La réponse au problème nº 15 sera-t-elle modifiée si le poteau se trouvait initialement en position verticale sur une plaque de glace parfaitement lisse et tombait ensuite sous l'action de la pesanteur? En quoi son mouvement sera-t-il différent de celui du poteau du problème précédent?

Solution. Selon le théorème de König, l'énergie cinétique du poteau se compose de l'énergie cinétique du mouvement de son centre de masse ${}^1/_2\, mv_C^2$ s'effectuant à la vitesse v_C, et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre de masse ${}^1/_2\, I\omega^2$ s'effectuant à la vitesse angulaire ω. Pendant la durée de la chute le centre de masse parcourt le chemin $l/2$; le travail produit pendant la chute $mgl/2$ sert à augmenter l'énergie cinétique:

$$\frac{mv_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mgl}{2}.$$

A la fin du trajet, lorsque le poteau prend sa position horizontale $v_C = {}^1/_2\, l\omega$. En partant de ce fait et en utilisant l'expression $I = {}^1/_2\, ml^2$, nous trouverons $v_C = {}^1/_2 \sqrt{3gl}$. La vitesse de l'extrémité supérieure du poteau étant deux fois plus grande est donc égale à $v = \sqrt{3gl}$. On arrive donc au même résultat que dans le problème précédent. En ce qui concerne le caractère du mouvement, il est différent dans les deux cas. Dans le premier cas, pendant sa chute, le poteau effectuait un mouvement de rotation autour de sa base inférieure et son centre de masse décrivait un arc de cercle. Dans le second cas, toutes les forces agissantes étant verticales, le centre de masse du poteau décrira une droite verticale pendant sa chute.

17. Une tige homogène de masse m et de longueur l (fig. 79) tombe avec une vitesse initiale nulle de la position verticale *1* en tournant sans frottement autour d'un axe horizontal fixe O. Déterminer les composantes horizontale F_{hor} et verticale F_{vert} de la force qu'applique l'axe O sur la tige en position horizontale *2*.

S o l u t i o n. L'énergie cinétique de la tige arrivant à la position horizontale est $^1/_2\, I\omega^2 = {^1/_2}\, mgl$. L'accélération centripète du centre de masse de la tige en cette position est $\omega^2 l/2$. En vertu du théorème du mouvement du centre de masse

$$F_{\text{hor}} = m\omega^2 \frac{l}{2} = \frac{ml^2}{2I} mg = \frac{3}{2} mg.$$

Appliquant à la rotation de la tige en position *2* l'équation (33.4), on obtient

$$I \frac{d\omega}{dt} = mg \frac{l}{2}.$$

D'où la composante verticale de l'accélération du centre de masse dans la même position:

$$a = \frac{l}{2} \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgl^2}{4I} = \frac{3}{4} g.$$

Comme d'autre part

$$ma = mg - F_{\text{vert}},$$

on trouve finalement

$$F_{\text{vert}} = m(g - a) = {^1/_4}\, mg.$$

18. Une poutre homogène, absolument rigide, de poids P, repose aux deux extrémités sur deux supports absolument rigides (fig. 80, *a*). On supprime brus-

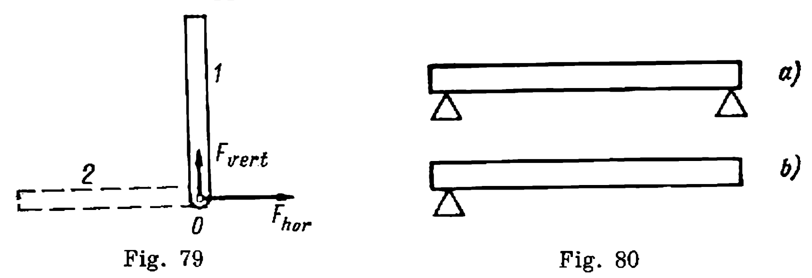


Fig. 79 Fig. 80

quement l'un des supports. Déterminer la force de pression initiale exercée sur le support restant (fig. 80, *b*).

R é p o n s e. $F = {^1/_4}\, P$.

E x p l i c a t i o n. Tant que la poutre repose sur ses deux supports, chacun d'eux est soumis à une force égale à $^1/_2\, P$. Lorsqu'on enlève instantanément l'un des supports, la force qu'exerce la poutre sur l'autre support diminue par saut de deux fois. Ce saut s'explique par l'idéalisation des conditions, la poutre et les supports étant par hypothèse absolument rigides. Les poutres et les supports réels sont déformables, de sorte que la variation de la force F appliquée sur le support restant sera continue.

19. Un gymnaste exécute à la barre fixe un grand tour en équilibre sur les mains, c'est-à-dire qu'il tourne le corps droit autour de la barre sous l'action de son propre poids. Estimer approximativement l'effort F appliqué à ses bras en négligeant le frottement de ses paumes contre la barre.

R é p o n s e. $F = \left(1 + \frac{4a^2m}{I}\right) mg$, où m est la masse, I le moment d'inertie de l'homme par rapport à la barre, a la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse de l'homme. Pour le calcul du moment d'inertie, on assimile l'homme à une tige homogène tournant autour de l'une de ses extrémités; on trouve alors $F = 4mg$.

20. Un homme, à l'attraction foraine dite pas de géant, se déplace le long d'une trajectoire fermée de telle sorte que la hauteur à laquelle il monte par

rapport à sa position d'équilibre varie de h_{min} à h_{max}. Déterminer les vitesses maximale et minimale du mouvement si la longueur de la corde à laquelle est suspendu l'homme est l.

S o l u t i o n. En vertu de la loi de la conservation de l'énergie

$$v^2 + 2gh = \text{const.} \tag{37.3}$$

Le moment de la force de pesanteur par rapport au point de suspension n'a pas de composante verticale. Le moment de la force de tension de la corde est nul. Par suite, pendant le mouvement de l'homme, la composante verticale de

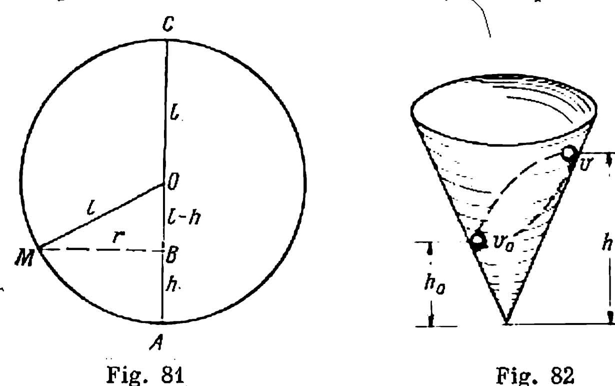


Fig. 81 Fig. 82

son moment de quantité de mouvement reste constante. Dans les positions correspondant aux h maximal et minimal, la vitesse v de l'homme est dirigée suivant l'horizontale et son moment de quantité de mouvement est égal à mvr, r étant la distance jusqu'à l'axe vertical autour duquel tourne l'homme. Il s'ensuit qu'en ces positions le produit vr a même valeur. A l'instant où h est maximal ou minimal, traçons dans le plan vertical un cercle centré au point de suspension O et passant par le point M où se trouve à cet instant l'homme (fig. 81). Selon un théorème de géométrie bien connu, $r^2 = AB \cdot BC$ ou $r^2 = (2l - h)\,h$. Par suite, aux positions où h est maximal ou minimal, on aura

$$(2l - h)\,hv^2 = \text{const.} \tag{37.4}$$

Ecrivons les relations (37.3) et (37.4) pour ces positions en remarquant qu'au maximum de h correspond le minimum de v et inversement:

$$v_{max}^2 + 2gh_{min} = v_{min}^2 + 2gh_{max},$$

$$(2l - h_{min})\,h_{min}v_{max}^2 = (2l - h_{max})\,h_{max}v_{min}^2.$$

On en tire

$$v_{max}^2 = \frac{2gh_{max}(2l - h_{max})}{2l - (h_{max} + h_{min})}, \tag{37.5}$$

$$v_{min}^2 = \frac{2gh_{min}(2l - h_{min})}{2l - (h_{max} + h_{min})}. \tag{37.6}$$

Comme nous avons tenu compte de ce que dans les conditions réelles $h < l$, la quantité (37.5) est bien maximale et la quantité (37.6) est bien minimale. Dans le cas où h_{max} et h_{min} seraient très petits par rapport à l, on aurait

$$v_{max}^2 = 2gh_{max}, \quad v_{min}^2 = 2gh_{min}. \tag{37.7}$$

21. Sur la surface interne d'un entonnoir conique placé en position verticale glisse sans frottement une petite bille (fig. 82). A l'instant initial elle se trouvait

à la hauteur h_0 et sa vitesse v_0 était horizontale. Calculer v_0 sachant que dans son mouvement ultérieur la bille monte d'abord à la hauteur h, puis commence à descendre. Quelle est la vitesse v de la bille à l'instant où elle atteint la cote h?

Réponse. $v_0^2 = \frac{2gh^2}{h+h_0}$, $v^2 = \frac{2gh_0^2}{h+h_0}$.

22. Une corde pesante (de densité linéaire ρ), de longueur L, est placée sur une poulie de moment d'inertie I et de rayon r. A l'instant initial la poulie est immobile et le brin le plus long de la corde a une longueur l. Calculer la vitesse angulaire de rotation de la poulie ω lorsque la corde tombera à terre. La corde se meut sur la poulie sans glissement; on négligera le frottement de la poulie sur son axe.

Réponse. $\omega^2 = \frac{\rho g}{I+L\rho r^2}[L^2 + 4r^2 - l^2 - (L - l - \pi r)^2]$.

Indication. Utiliser la loi de la conservation de l'énergie.

23. Un météorite de masse $m = 10^5$ t qui se déplaçait à la vitesse $v = 50$ km/s est entré en collision avec la Terre en un point de latitude $\vartheta = 60°$. Toute son énergie cinétique a été convertie en chaleur (énergie interne) et il s'est vaporisé tout entier. Quelle pourrait être l'influence maximale de ce choc sur la durée du jour?

Réponse. La variation maximale ΔT de la durée du jour provoquée par le choc du météorite est donnée par la formule

$$\frac{\Delta T}{T} = \pm \frac{mvR\cos\vartheta}{2\pi I} T,$$

où $T = 86\,164$ s est la durée du jour, $R = 6400$ km est le rayon de la Terre, $M = 6 \cdot 10^{21}$ t la masse de la Terre, I son moment d'inertie. En assimilant la Terre à une sphère homogène, $I = {}^2/_5\, MR^2$ (en réalité, comme la densité s'accroît vers le centre de la Terre, son moment d'inertie est plus petit $I \approx {}^1/_3\, MR^2$). On arrive ainsi au résultat suivant: $\frac{\Delta T}{T} \sim 2 \cdot 10^{-5}$, $\Delta T \sim 2 \cdot 10^{-10}$ s.

24. Estimer la valeur minimale de la vitesse v de lancement à l'Equateur d'un obus de masse $m = 1000$ t pour faire varier la durée du jour terrestre de $\Delta T = 1$ mn.

Réponse. Le plus avantageux est d'effectuer un tir horizontal dans le plan de l'Equateur. Dans ce cas

$$\frac{c-v}{c} \approx \frac{5}{18} \frac{m^2c^2T^4}{\pi^2 IM(\Delta T)^2} \approx \frac{25}{36} \frac{m^2c^2T^4}{\pi^2 M^2R^2(\Delta T)^2} \approx 2 \cdot 10^{-22},$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Toutes les autres notations sont les mêmes que dans le problème précédent. Sur les calculs approchés, voir § 22.

25. On appelle *pulsars* des corps célestes émettant des impulsions de rayonnement radioélectrique qui se succèdent à des intervalles de temps très réguliers, compris entre $3 \cdot 10^{-2}$ s et 4 s pour les pulsars connus à ce jour. On estime aujourd'hui que les pulsars sont des étoiles neutroniques en rotation, formées par compression gravitationnelle. Les étoiles neutroniques sont semblables à de gigantesques noyaux atomiques ne comportant que des neutrons. Dans ces étoiles la densité de substance ρ n'est pas homogène mais on peut l'estimer grossièrement constante dans tout le volume de l'étoile et égale à 10^{14} g/cm³ environ. Evaluer la période T de rotation du Soleil s'il s'était transformé en étoile neutronique. La densité de substance augmente vers le centre du Soleil et ses différentes couches tournent à des vitesses différentes. Dans les calculs on ne tiendra pas compte de ces particularités et on admettra que la densité moyenne de la substance solaire $\rho_0 = 1,41$ g/cm³, et la période de rotation du Soleil est $T_0 = 2,2 \cdot 10^6$ s.

Réponse. $T \approx T_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3} = 1,3 \cdot 10^{-3}$ s.

26. Une tige rigide et lisse de longueur l_0 et de masse M est en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω_0 autour d'un axe fixe passant par une des extrémités de la tige normalement à son axe longitudinal. Sur cette tige est enfilée une bille perforée de masse m. Au début de l'expérience, la bille se trouve près de l'extrémité libre de la tige où une butée l'empêche de s'échapper. A un certain moment on communique à la bille une vitesse v, orientée le long de la tige vers l'axe de rotation. Déterminer la distance minimale l jusqu'à l'axe de rotation à laquelle parviendra la bille, ainsi que la vitesse angulaire ω du système pour cette position de la bille. Dans quel sens s'infléchira la tige lorsque la bille se déplacera vers l'axe de rotation? Comment variera la flexion de la tige lorsque la bille, après s'être rapprochée au maximum de l'axe de rotation, commencera à se déplacer en sens inverse?

Réponse. $\omega = \omega_0 + \dfrac{mv^2}{\left(\frac{1}{3}M+m\right) l_0^2\omega_0}$, $l = l_0 \sqrt{\dfrac{\omega_0}{\omega}}$. Lorsque la bille se rapproche de l'axe de rotation, la tige s'infléchira dans le sens contraire de celui de la rotation et lorsqu'elle s'en éloignera, la tige s'infléchira en sens inverse.

§ 38. Les lois de conservation et la symétrie de l'espace et du temps

1. La loi de la conservation de l'énergie est une conséquence de l'homogénéité du temps, la loi de la conservation de l'impulsion résulte de l'homogénéité de l'espace et la loi de la conservation du moment cinétique provient du caractère isotrope de l'espace. De telles assertions sont faites très souvent, mais la concision de ces énoncés peut conduire à des interprétations erronées. On peut s'imaginer, par exemple, que la connaissance de ces propriétés de l'espace et du temps pourrait suffire à l'établissement de ces lois de conservation. Rien n'est moins vrai. Les trois lois de conservation susmentionnées sont des corollaires de la deuxième loi de Newton (ou des lois équivalentes à cette loi) à condition d'y adjoindre des considérations relatives aux forces agissantes. Ainsi pour établir les lois de conservation de l'impulsion et du moment cinétique, il suffit de supposer que les forces sont régies par la *loi de l'égalité de l'action et de la réaction*. Mais on peut aussi remplacer cette loi par d'autres propositions. Les énoncés donnés au début de ce paragraphe doivent être compris dans ce sens que les lois de conservation citées peuvent être déduites de la *deuxième loi de Newton à condition de lui adjoindre les propriétés de symétrie de l'espace et du temps, à savoir: l'homogénéité de l'espace et du temps, ainsi que la propriété d'isotropie de l'espace.* Notons encore que l'établissement de la loi de la conservation de l'énergie implique l'introduction d'hypothèses spéciales sur la nature des forces agissantes.

2. Avant d'utiliser les concepts d'homogénéité et d'isotropie de l'espace et celui de l'homogénéité du temps pour établir les lois de conservation, il importe de préciser la signification de ces concepts.

On dit souvent que l'homogénéité du temps signifie l'*équivalence de tous les instants du temps*. L'homogénéité de l'espace signifie qu'*il*

n'existe pas dans l'espace de positions privilégiées, tous les points de l'espace étant *équivalents*. L'isotropie de l'espace signifie l'*absence de directions privilégiées*, toutes les directions dans l'espace étant *équivalentes*. Mais toutes ces formulations sont imprécises et même erronées si on les prend à la lettre. Ainsi les directions pointant vers le centre de la Terre sont différentes de toute direction horizontale. Pour un alpiniste le pied et le sommet d'une montagne ne sont guère équivalents. Un corps se trouvant au sommet d'une montagne peut la dévaler, mais ne pourra jamais remonter une pente à moins qu'on ne lui communique une vitesse suffisante. De même la notion de temps est bien différente pour un homme jeune et plein d'ardeur et pour un homme au déclin de la vie. Que doit-on entendre par homogénéité du temps, par homogénéité et isotropie de l'espace?

L'homogénéité du temps signifie que si on place tous les corps d'un système fermé dans des conditions identiques à deux instants quelconques, à partir de ces instants tous les phénomènes y évolueront de manière absolument identique.

L'homogénéité de l'espace signifie que si on transfère un système fermé d'un point de l'espace à un autre, tous les corps du système se trouvant dans les mêmes conditions aux deux points, l'évolution de tous les phénomènes ultérieurs n'en sera pas affectée. C'est dans ce sens que l'on doit concevoir aussi l'isotropie de l'espace en remplaçant le transfert d'un système fermé par sa *rotation* dans l'espace d'un angle arbitraire.

On est amené à faire ici la même remarque que celle que nous avons faite au § 15 à propos du principe de la relativité de Galilée. On ne doit pas entendre par système fermé tout l'Univers, car si on le faisait, les propriétés de symétrie de l'espace et du temps deviendraient évidentes par elles-mêmes. Mais en même temps elles se videraient de leur contenu puisqu'on ne peut parler de translation ou de rotation d'un système de corps que par rapport à d'autres corps servant de repères. Il s'agit donc non pas de l'Univers, mais de certaines de ses parties que l'on peut considérer, en approximation, comme des *systèmes fermés*. Il apparaît ainsi que les propriétés de symétrie de l'espace et du temps dont il a été question ci-dessus ne sont pas évidentes à priori et doivent être considérées comme des *généralisations fondamentales des données expérimentales*.

3. Après ces éclaircissements nous allons établir la loi de la conservation de l'énergie en mécanique. La dynamique met à notre disposition la conséquence de la deuxième loi de Newton s'exprimant par la formule

$$A_{12} = K_2 - K_1 \tag{38.1}$$

qui indique que le travail effectué par les forces appliquées au système mécanique est égal à l'accroissement de son énergie cinétique K (cf. § 22). Pour nos développements ultérieurs nous considérerons le

cas d'un point matériel, car pour un système de points matériels la seule modification à apporter concernera le nombre de variables dont dépend la fonction potentielle U que nous allons introduire dans ce qui suit. Supposons que les projections F_x, F_y, F_z de la force appliquée au point matériel peuvent être déterminées par dérivation de la fonction potentielle U:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Toutefois la fonction potentielle U peut dépendre explicitement aussi bien des coordonnées x, y, z du point matériel que du temps t: $U = U(x, y, z, t)$. Il en sera ainsi, par exemple, si le point matériel se trouve dans le champ de forces d'autres corps, variable dans le temps. Le travail effectué par les forces appliquées au point matériel lorsque celui-ci passe d'une position *1* à une position *2* le long d'une certaine courbe est représenté par l'intégrale

$$A_{12} = -\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right)$$

prise le long de cette même courbe. Ajoutons à la quantité placée sous le signe d'intégration, puis retranchons le terme $\frac{\partial u}{\partial t} dt$ et introduisons la différentielle totale

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt,$$

ce qui permet de mettre l'expression du travail sous la forme

$$A_{12} = -\int dU + \int \frac{\partial U}{\partial t} dt,$$

qui est vraie sous cette forme pour tout système de points matériels. Aussi nos développements ultérieurs ne seront-ils pas liés à la condition que le système ne comporte qu'un seul point matériel. Après intégration nous obtenons

$$A_{12} = U_1 - U_2 + \int \frac{\partial U}{\partial t} dt. \qquad (38.2)$$

En combinant (38.2) à (38.1) nous trouvons

$$(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \int \frac{\partial U}{\partial t} dt. \qquad (38.3)$$

Jusqu'à présent nous n'avons pas imposé les conditions que le système soit fermé et que le temps soit homogène, ce qui signifie que nos raisonnements s'appliquent également aux systèmes non fermés. Si nous supposons maintenant que le système est fermé, le temps étant homogène, la fonction U ne peut dépendre explicitement du temps, i.e. $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. Nous obtenons ainsi

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2, \qquad (38.4)$$

qui est l'équation exprimant la loi mécanique de la conservation de l'énergie.

4. Donnons maintenant la démonstration de la loi de la conservation de l'impulsion. Supposons que le système mécanique est fermé. Toutes les forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, . . . agissant sur les points matériels du système sont des forces intérieures et il n'y a pas de forces extérieures. Transportons notre système d'une position arbitraire *1* à une position quelconque *2*, mais de telle manière que tous les points subissent le même déplacement $\boldsymbol{r}$ et que leurs vitesses soient les mêmes en module, en direction et en sens. L'espace étant homogène, un tel déplacement n'exige aucun travail; en effet, puisque le travail de déplacement est donné par le produit scalaire $(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots)\,\boldsymbol{r}$, il est nul quel que soit le déplacement $\boldsymbol{r}$. Il s'ensuit que pour un système fermé $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots = 0$. Or c'est justement la condition imposée pour déduire de la deuxième loi de Newton la loi de la conservation de l'impulsion (cf. § 12).

5. On démontre exactement de la même manière la loi de la conservation du moment cinétique. Partant du concept de l'isotropie de l'espace, on démontre que la somme géométrique des moments des forces intérieures agissant dans le système est nulle: $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots = 0$ (voir problème n° 2 à la fin du § 46). Il en découle aussitôt la loi de conservation cherchée (cf. § 30).

PROBLÈMES

1. Soit $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ la fonction représentant l'énergie potentielle d'interaction de deux points matériels en fonction des rayons vecteurs $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ caractérisant leurs positions dans l'espace. En s'appuyant sur le concept d'homogénéité de l'espace, démontrer que U ne dépend que de la différence $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Généraliser le résultat à un système de n points matériels en interactions mutuelles.

S o l u t i o n. L'espace étant homogène, l'énergie potentielle U n'est pas modifiée si on déplace les deux points matériels d'un même vecteur $\boldsymbol{a}$. Cela s'exprime par l'égalité $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = U(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a})$, qui doit être vérifiée quel que soit $\boldsymbol{a}$. Posons $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{r}_1$, nous obtenons $U = U(0, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$, soit $U = f(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$, où f représente une certaine fonction de la différence $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

Si le système comporte n points matériels en interactions mutuelles, un raisonnement analogue conduit à

$$U = f(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1, \ldots).$$

Il est bien évident qu'au lieu du point *1* on peut prendre n'importe quel autre point matériel du système. Par conséquent l'énergie potentielle U ne peut dépendre que de $n - 1$ variables vectorielles qui sont les différences des rayons vecteurs des $n - 1$ points du système et du rayon vecteur du n-ième point.

2. Quelles contraintes supplémentaires impose l'isotropie de l'espace à la forme de la fonction U?

R é p o n s e. L'énergie potentielle U ne dépend que des distances entre les $n - 1$ points matériels du système et le point restant.

3. En se fondant sur le concept de l'homogénéité de l'espace et sur le principe de la relativité de Galilée, montrer que la force d'interaction des points matériels *1* et *2* ne dépend ni de leurs coordonnées ni de leurs vitesses, mais dépend uniquement de la *différence* de ces quantités.

S o l u t i o n. En vertu de l'homogénéité de l'espace et du principe de la relativité de Galilée, l'accélération $\boldsymbol{a}$ et par suite la force $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$ sont invariantes par rapport à un transport de l'origine des coordonnées et aux transformations de Galilée. Prenons deux référentiels S et S'. En considérant la force $\boldsymbol{f}$ comme une fonction des coordonnées et des vitesses dans le référentiel S', nous écrivons $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2', \boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2')$. Comme le choix du référentiel S' est arbitraire, nous pouvons le choisir tel qu'à l'instant considéré le point matériel *1* se trouve à l'origine des coordonnées ($\boldsymbol{r}_1' = 0$) et sa vitesse soit nulle ($\boldsymbol{v}_1' = 0$). A cet instant la force $\boldsymbol{f}$ ne sera fonction que de deux variables: $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_2', \boldsymbol{v}_2')$. Mais comme les différences des coordonnées et des vitesses des points matériels sont les mêmes dans les deux référentiels on aura $\boldsymbol{r}_2' = \boldsymbol{r}_2' - \boldsymbol{r}_1' = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$. Finalement on trouve

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1).$$

CHAPITRE VI

LES OSCILLATIONS HARMONIQUES

§ 39. Cinématique du mouvement oscillatoire harmonique

Les phénomènes oscillatoires jouent un rôle important dans diverses parties de la physique; leur étude détaillée sera présentée dans les autres parties de ce cours. Dans ce chapitre nous nous limiterons à une étude préliminaire des *oscillations mécaniques* les plus simples, en commençant par le *mouvement oscillatoire* d'un point matériel. Effectuant un tel mouvement le point passe à intervalles de temps égaux par une même position en allant chaque fois dans le même sens.

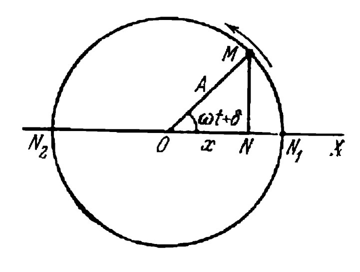


Fig. 83

Le mouvement oscillatoire dont l'importance est particulièrement grande est le *mouvement harmonique* (ou *sinusoïdal*). Nous en avons déjà parlé au § 11. Le modèle cinématique suivant permet de décrire commodément les particularités de ce mouvement. Considérons un point mobile M en mouvement uniforme sur un cercle de rayon A à une vitesse angulaire constante ω (fig. 83). Sa projection N sur un diamètre du cercle, sur l'axe X par exemple, effectuera un mouvement oscillatoire entre les positions extrêmes N_1 et N_2. Ce mouvement de N est appelé mouvement harmonique. Pour le décrire il faut trouver la coordonnée x du point N en fonction du temps t. Posons qu'à l'instant initial $t = 0$, le rayon OM formait l'angle δ avec l'axe X. Au bout d'un temps t cet angle s'est accru de ωt: $\omega t + \delta$. Il ressort de la figure 83 que

$$x = A \cos (\omega t + \delta). \tag{39.1}$$

Cette équation décrit analytiquement le mouvement harmonique du point N sur le diamètre N_1N_2.

La quantité A désigne l'élongation maximale (distance du mobile à sa position d'équilibre O). La quantité A est l'*amplitude* du mouvement. La quantité ω est la *pulsation* ou *fréquence circulaire*. La

quantité $\omega t + \delta$ s'appelle *phase de l'oscillation* et la quantité δ est la *phase initiale* (ou déphasage) correspondant à $t = 0$. Pour $\delta = 0$, $x = A \cos \omega t$; pour $\delta = -\frac{\pi}{2}$, $x = A \sin \omega t$, etc. Ainsi pour un mouvement harmonique l'abscisse x du mobile est une fonction sinusoïdale ou cosinusoïdale du temps t. Pour donner une représentation graphique de ce mouvement, on peut porter t en abscisses et les élongations correspondantes du point x en ordonnées; on obtient alors une courbe périodique *sinusoïdale* (fig. 22). La forme de la courbe est complètement définie par l'amplitude A et la fréquence cyclique ω, mais sa position dépend également de la phase initiale δ. Au bout d'un temps

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{39.2}$$

la phase s'accroît de 2π et le mobile revient dans sa position initiale, le sens du mouvement restant le même. Le temps T est la *période d'oscillation*.

La vitesse du point oscillant s'obtient par dérivation de (39.1) par rapport au temps:

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \delta). \tag{39.3}$$

Une seconde dérivation donne l'accélération

$$a = \dot{v} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \tag{39.4}$$

ou avec (39.1)

$$a = -\omega^2 x. \tag{39.5}$$

La force agissant sur un point matériel en mouvement harmonique est égale à

$$F = ma = -m\omega^2 x. \tag{39.6}$$

Elle est proportionnelle à l'élongation x et pointe toujours vers la position d'équilibre. Les forces de ce type apparaissent souvent lorsqu'un point matériel subit de petits déplacements par rapport à sa position d'équilibre.

§ 40. Oscillations harmoniques d'un pendule élastique

1. Considérons un ressort à boudin fixé à l'une de ses extrémités; suspendons à son autre extrémité un corps de masse m (fig. 84). Soit l_0 la longueur du ressort non déformé. Si on le comprime ou si on l'allonge jusqu'à ce que sa longueur devienne égale à l, on fait apparaître une force de rappel F qui tend à ramener le corps dans sa position d'équilibre. Pour de petits allongements $x = l - l_0$ du ressort se vérifie la *loi de Hook* (1635-1703) selon laquelle la force est proportionnelle à l'allongement du ressort: $F = -kx$. Dans ces

conditions l'équation de mouvement du corps est

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{40.1}$$

où k est la *raideur* ou *coefficient d'élasticité* du ressort. Le signe moins s'explique par le fait que la force de rappel F est toujours de sens opposé à l'élongation x comptée à partir de la position d'équilibre.

Nous avons écrit l'équation (40.1) en supposant que le corps suspendu n'était soumis à aucune force autre que la force de rappel élastique F. Montrons maintenant que cette même équation décrit le mouvement d'un corps suspendu à un ressort et placé dans un champ de gravitation uniforme. Désignons par X l'*élongation du ressort* qui est la différence $X = l - l_0$. Le ressort applique au corps suspendu une force de rappel kX dirigée de bas en haut, tandis que la force de la pesanteur agit de haut en bas. L'équation de mouvement s'écrit donc

$$m\ddot{X} = -kX + mg.$$

Soit X_0 l'élongation du ressort dans la position d'équilibre. On a alors $-kX_0 + mg = 0$. En excluant le poids mg du corps on obtient $m\ddot{X} = -k(X - X_0)$. Introduisons la notation $x = X - X_0$, l'équation de mouvement prend alors la forme (39.1), où x désigne, comme avant, le déplacement de la charge par rapport à la position d'équilibre. Or la position d'équilibre se déplace elle-même sous l'action de la pesanteur et la signification de la quantité $-kx$ n'est plus la même. Ici elle représente la résultante de la force élastique du ressort et du poids de la charge. Cependant la description purement mathématique du pendule élastique n'en est pas affectée et on peut continuer à raisonner comme si la force de pesanteur n'existait pas; c'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

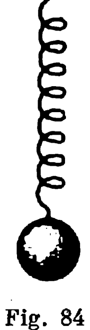


Fig. 84

2. La force résultante $F = -kx$ est de la même forme que celle figurant dans (39.6). En posant $m\omega^2 = k$ l'équation (40.1) devient

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{40.2}$$

Cette équation coïncide avec l'équation (39.5). La fonction (39.1) est solution de cette équation quelles que soient les valeurs des constantes A et δ. On peut démontrer que c'est une *solution générale* en ce sens que toute solution de l'équation (40.2) peut être mise sous la forme (39.1), les différentes solutions ne se distinguant les unes des autres que par les valeurs des constantes A et δ (la démonstration de cette assertion est donnée à la fin de ce paragraphe). Il résulte de ces considérations que la masse suspendue au ressort effectuera des oscillations harmoniques avec une fréquence circulaire

(pulsation)

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{40.3}$$

et une période

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{40.4}$$

Lorsque la période des oscillations T est indépendante de l'amplitude A on dit que les oscillations sont *isochrones.* Les oscillations sont isochrones tant que reste valable la loi de Hook. Pour de grands allongements, cette loi cesse d'être vérifiée et les oscillations cessent d'être isochrones, c'est-à-dire que leur période d'oscillation commence à dépendre de l'amplitude.

L'équation différentielle (40.2) ne permet pas de calculer l'amplitude A et la phase initiale δ. Les valeurs de ces constantes dépendent des conditions initiales, par exemple des valeurs initiales de l'élongation x et de la vitesse $\dot{x}$. L'équation (40.2) est valable quelles que soient les conditions initiales et décrit toutes les oscillations que peut effectuer le système considéré. Une oscillation donnée est caractérisée par les valeurs des constantes A et δ.

3. Les énergies potentielle et cinétique du corps suspendu ont pour expressions

$$E_{\text{pot}}=\frac{1}{2}kx^2,\quad E_{\text{cin}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{40.5}$$

et elles varient toutes deux en fonction du temps. Mais leur somme E doit rester constante dans le temps:

$$E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\text{const.} \tag{40.6}$$

En utilisant (39.1) on tire des formules (40.5)

$$E_{\text{pot}}=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta),\ E_{\text{cin}}=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\delta),$$

et en vertu de (40.3)

$$E_{\text{cin}}=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\delta).$$

Ces formules peuvent s'écrire aussi sous la forme

$$E_{\text{pot}}=\frac{1}{4}kA^2[1+\cos 2(\omega t+\delta)],\quad E_{\text{cin}}=\frac{1}{4}kA^2[1-\cos 2(\omega t+\delta)].$$

Elles montrent que *ni l'énergie potentielle ni l'énergie cinétique prises isolément ne sont constantes, mais que leurs valeurs effectuent des oscillations harmoniques autour de la valeur moyenne commune* $^1/_4\ kA^2$ *avec une fréquence circulaire double* 2ω. Lorsque l'énergie cinétique atteint sa valeur maximale, l'énergie potentielle s'annule et inverse-

ment. L'énergie totale $E = E_{cin} + E_{pot}$ reste cependant constante et est liée à l'amplitude A par la relation

$$E = \frac{1}{2} kA^2. \qquad (40.7)$$

Ces calculs simples montrent que l'expression (39.1) n'est solution de l'équation différentielle (40.6) que si la pulsation ω est donnée par la formule (40.3) et l'amplitude A par la formule (40.7). Il s'ensuit que si l'énergie totale E est donnée, la constante A ne peut être choisie arbitrairement. La seule constante arbitraire ne dépendant que des conditions initiales est la phase initiale δ ; pour la déterminer il suffit de connaître ou l'élongation ou la vitesse initiales. Le fait que la solution ne comporte qu'une seule constante arbitraire résulte de ce que l'équation (40.6) est *du premier ordre* par rapport au temps, à la différence de l'équation (40.2) qui est *du second ordre* par rapport au temps. Si on considère l'énergie figurant dans (40.6) comme un paramètre pouvant prendre toutes les valeurs positives définies par les conditions initiales, l'équation (40.6) devient alors équivalente à l'équation (40.2).

4. Toutes ces considérations s'appliquent aux oscillations harmoniques de tous les systèmes mécaniques ayant un *seul degré de liberté*. La position instantanée d'un tel système mécanique peut être déterminée par une *seule* quantité q, appelée *coordonnée généralisée* qui peut être l'angle de rotation, le déplacement suivant une certaine courbe, etc. La dérivée $\dot{q}$ de la coordonnée généralisée par rapport au temps porte le nom de *vitesse généralisée*. Dans les études des oscillations des systèmes mécaniques à un seul degré de liberté il est commode de partir de l'*équation de l'énergie* (qui est plus facile à établir) et non de l'équation de mouvement de Newton. D'ailleurs l'équation de l'énergie est plus simple, étant une équation différentielle du *premier* et non du second ordre par rapport au temps. Soit un système mécanique dont les énergies potentielle et cinétique s'expriment par des formules telles que

$$E_{pot} = \frac{\alpha}{2} q^2, \quad E_{cin} = \frac{\beta}{2} \dot{q}^2, \qquad (40.8)$$

où α et β sont des constantes positives (les paramètres du système). Appliquant la loi de la conservation de l'énergie, on obtient l'équation

$$E = \frac{\alpha}{2} q^2 + \frac{\beta}{2} \dot{q}^2 = \text{const} \qquad (40.9)$$

qui ne se distingue de l'équation (40.6) que par les notations, ce qui n'est pas gênant dans une étude mathématique. Les équations (40.6) et (40.9) étant mathématiquement identiques, leurs solutions générales doivent être pareilles. Par conséquent, *si l'équation de l'énergie*

se ramène à la forme (40.9), *on aura*

$$q = q_0 \cos(\omega t + \delta), \tag{40.10}$$

ce qui signifie que la coordonnée généralisée q effectue des oscillations harmoniques de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{40.11}$$

5. Pour conclure nous allons montrer comment on trouve la solution générale de l'équation différentielle (40.2). Comme l'équation (40.6) découle tout naturellement de (40.2), nous chercherons à résoudre l'équation (40.6). A l'aide de (40.3) nous pouvons la mettre sous la forme

$$\omega^2 x^2 + \dot{x}^2 = \text{const.} \tag{40.12}$$

Le premier membre de cette relation est une quantité essentiellement positive, étant la somme de deux carrés. On peut donc désigner le second membre de l'équation par $\omega^2 A^2$, ce qui revient à introduire la nouvelle constante A. Alors

$$\dot{x}^2 = \omega^2 (A^2 - x^2). \tag{40.13}$$

Comme $\dot{x}^2 \geqslant 0$, on a $x \leqslant A$ et on peut poser

$$x = A \cos \Theta, \tag{40.14}$$

où Θ est une fonction inconnue du temps t. En portant (40.14) dans (40.13), on obtient

$$\dot{x}^2 = \omega^2 A^2 (1 - \cos^2 \Theta) = \omega^2 A^2 \sin^2 \Theta,$$

d'où

$$\dot{x} = \pm \omega A \sin \Theta.$$

D'autre part, en dérivant l'expression (40.14) par rapport au temps on trouve

$$\dot{x} = -\dot{\Theta} A \sin \Theta.$$

En comparant les expressions de $\dot{x}$, on trouve $\dot{\Theta} = \pm\omega$, d'où

$$\Theta = \pm \omega t + \delta,$$

où δ est une constante arbitraire. On écrira donc

$$x = A \cos(\pm \omega t + \delta).$$

Les deux expressions de x, à savoir : $x_1 = A \cos(\omega t + \delta)$ et $x_2 = A \cos(-\omega t + \delta) = A \cos(\omega t - \delta)$ peuvent être réunies en une seule puisque δ est une constante arbitraire. Dans l'expression de x_2 on peut remplacer δ par $-\delta$ et écrire dans le cas général

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

qui n'est autre que l'équation (39.1).

§ 41. Pendule pesant

1. Un *pendule pesant* est constitué par un corps mobile autour d'un axe horizontal fixe dont le point d'intersection A avec le plan vertical passant par le centre de masse du pendule est son *point de*

suspension (fig. 85). A tout instant la position du corps peut être caractérisée par l'angle d'écart φ de l'axe du pendule avec sa position d'équilibre. L'angle φ joue ici le rôle de la coordonnée généralisée q. L'énergie cinétique du pendule pesant est

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2,$$

où I est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de suspension A. Son énergie potentielle est $E_{\text{pot}} = mgh$, où h est la hauteur d'élévation du centre de masse C par rapport à sa position la plus basse. Désignons par a la distance entre le centre de masse C et le point de suspension A. Nous avons alors

$$E_{\text{pot}} = mga\,(1 - \cos\varphi) = 2mga \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Si les oscillations sont de petite amplitude, on peut remplacer le sinus de l'angle $\varphi/2$ par l'angle. Dans cette approximation

$$E_{\text{pot}} = \frac{mga}{2} \varphi^2.$$

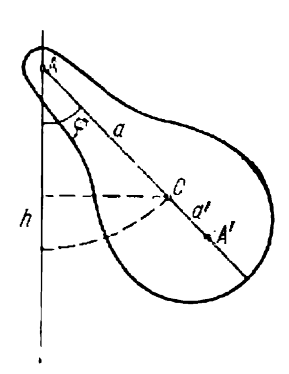


Fig. 85

Dans le cas des petites oscillations les énergies potentielle et cinétique se ramènent à la forme (40.8) avec $\alpha = mga$ et $\beta = I$. On en conclut que les oscillations de faible amplitude du pendule pesant seront approximativement harmoniques, de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} \tag{41.1}$$

et de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \tag{41.2}$$

Si la période des oscillations ne dépend pas de leur amplitude, ces oscillations sont dites *isochrones*. *Les petites oscillations du pendule pesant sont isochrones.* Les oscillations sont approximativement isochrones lorsque l'amplitude angulaire du pendule ne dépasse pas quelques degrés; pour des amplitudes plus grandes l'isochronisme n'a plus lieu. L'isochronisme des oscillations du pendule est utilisé dans les horloges.

Un cas particulier de pendule pesant est le *pendule simple*. C'est un pendule dont toute la masse est pratiquement concentrée en un seul point — le centre de masse C du pendule. Un pendule simple est constitué, par exemple, par une petite bille suspendue à un fil de longueur l.

En substituant dans la formule (41.2) $a = l$, $I = ml^2$, on obtient

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{41.3}$$

En comparant les formules (41.2) et (41.3), nous voyons que *le pendule pesant se comporte comme un pendule simple de longueur*

$$l = \frac{I}{ma}. \tag{41.4}$$

C'est la *longueur réduite* du pendule pesant. Bien que la démonstration ne se rapportait qu'aux petites oscillations des pendules, elle reste valable pour les oscillations d'amplitude finie qui ne sont pas isochrones. La seule condition imposée est que les amplitudes angulaires du pendule pesant et du pendule simple soient égales. Nous laissons au lecteur le soin de le démontrer.

2. Portons le long de la droite AC, à partir du point de suspension A, un segment de droite AA' de longueur égale à la longueur réduite l du pendule pesant (cf. fig. 85). Le point A' ainsi défini est le *centre* (axe) *d'oscillation. On peut définir le centre d'oscillation comme un point mathématique où on devrait concentrer toute la masse du pendule pesant pour que la période de ses oscillations reste inchangée.* D'après le théorème de Huygens-Steiner $I = I_C + ma^2$, où I_C est le moment d'inertie du pendule par rapport à un axe parallèle passant par le centre de masse C. En portant cette expression de I dans (41.4) on obtient

$$l = a + \frac{I_C}{ma}. \tag{41.5}$$

On voit tout d'abord que $l > a$, c'est-à-dire que le point de suspension A et le centre d'oscillation A' se trouvent de part et d'autre du centre de masse C; la deuxième conclusion que l'on peut faire est qu'à tous les points de suspension situés à une même distance du centre de masse du pendule correspond la même longueur réduite l et par suite la même période T des oscillations.

Le point de suspension et le centre d'oscillation sont des *points conjugués. Si on suspend le pendule au centre d'oscillation A', sa période restera inchangée et l'ancien point de suspension A jouera le rôle d'un nouveau centre d'oscillation.* C'est l'énoncé du *théorème de Huygens* que nous allons démontrer. Désignons par a' la longueur du segment $A'C$ et supposons que le point de suspension du pendule est A'. Sa longueur réduite sera alors

$$l' = a' + \frac{I_C}{ma'}.$$

Mais $a' = l - a$, ou en vertu de la relation (41.5) $a' = I_C/(ma)$. En portant cette valeur dans la formule précédente on obtient $l' =$

$= \frac{I_C}{ma} + a$. Par suite $l' = l$, ce qui signifie que la longueur réduite ainsi que la période du pendule pesant sont restées inchangées. C'est ce qui démontre le théorème de Huygens.

3. Donnons une autre démonstration du théorème de Huygens dégageant mieux toute sa signification. Déplaçons le point de suspension du pendule le long d'une même droite passant par le centre de masse C et voyons comment varie la période de ses oscillations. Lorsque le point de suspension A se trouve à une distance infinie de C, le pendule se comporte comme un pendule simple dont la période d'oscillation est infiniment grande. A mesure que le point de suspension A se rapproche du centre de masse C, la période d'oscillation commence par diminuer, puis lorsque le point A se confond avec le centre de masse C,

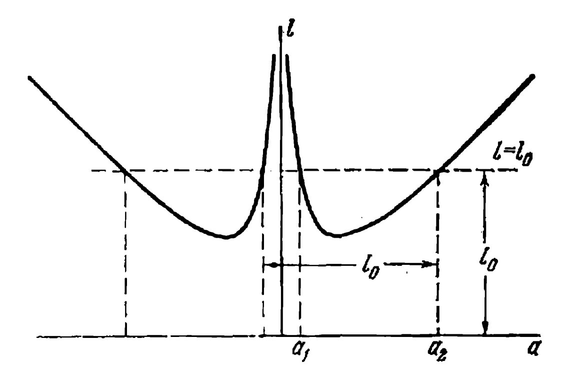


Fig. 86

le pendule se trouve dans un état d'équilibre indifférent quelle que soit la déviation qu'on lui impose; cela signifie que sa période d'oscillation devient de nouveau infiniment grande. Ainsi, à mesure que le point A se rapproche du point C, la diminution de la période fait place à son augmentation. Pour cette position du point de suspension, la période d'oscillation devient minimale. Lorsque le point de suspension dépasse le point C sur la droite AA', la période des oscillations revenant de l'infini commence à diminuer. La période des oscillations a même valeur en deux points de suspension équidistants du point C le long de la droite AA'.

Au lieu de parler de période d'oscillation, on peut utiliser la longueur réduite du pendule l dont la valeur définit univoquement sa période d'oscillation. Lorsque le point de suspension s'éloigne à l'infini ou se rapproche du centre de masse C, la longueur réduite l tend vers l'infini et pour certaine position intermédiaire du point de suspension, elle atteint sa valeur minimale. Sur la figure 86, on a porté en abscisses la quantité a et en ordonnées la longueur réduite l. La courbe comporte deux branches symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Une branche correspond au cas où le point de suspension se trouve d'un côté du centre de masse C et la deuxième branche, au cas où il se trouve de l'autre côté. L'équation (41.5) donnant la description analytique de cette courbe peut s'écrire sous la forme

$$a^2 - la + \frac{I_C}{m} = 0. \qquad (41.6)$$

A une valeur fixe l_0 de la longueur réduite correspond sur la figure 86 une droite horizontale $l = l_0$. Ses points d'intersection avec la courbe déterminent les positions des points de suspension du pendule pesant telles que sa longueur réduite soit égale à la valeur donnée l_0. En fait il y a quatre points d'intersection, dont deux se trouvent d'un côté du centre de masse C et deux autres de l'autre côté. Les positions de ces points se laissent aisément calculer par l'équation quadratique

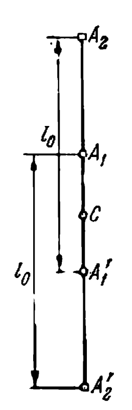


Fig. 87

$$a^2 - l_0 a + \frac{I_C}{m} = 0. \qquad (41.7)$$

Si $l_0 > 2\sqrt{I_C/m}$, cette équation a deux racines réelles positives a_1 et a_2 telles que

$$a_1 + a_2 = l_0. \qquad (41.8)$$

Il y a donc deux points de suspension A_1 et A_2 situés du même côté par rapport au point C, auxquels correspond une même longueur réduite l_0 (fig. 87). De l'autre côté du point C on trouve les points A_1' et A_2' symétriques des points A_1 et A_2 et définissant la même longueur réduite l_0. Si $l_0 = 2\sqrt{I_C/m}$, les racines de l'équation (41.7) coïncident, i.e. chaque paire des points de suspension se confond; si $l_0 < 2\sqrt{I_C/m}$, les racines de l'équation (41.7) sont imaginaires, ce qui signifie qu'il n'existe pas de points de suspension pour lesquels la longueur réduite serait inférieure à $2\sqrt{I_C/m}$.

Le théorème de Huygens est maintenant parfaitement évident. En effet, il résulte de (41.8) que les distances entre les points A_1 et A_2' et les points A_1' et A_2 sont égales toutes deux à la longueur réduite l du pendule. En prenant l'un des points de chaque paire pour point de suspension, l'autre point jouera le rôle de centre d'oscillation. Or c'est justement ce qu'affirme le théorème de Huygens. Nos considérations montrent également que *le point de suspension et le centre d'oscillation se trouvent de part et d'autre du centre de masse à des distances inégales de celui-ci. Dans le cas où $l_0 = 2\sqrt{I_C/m}$ les points A_1 et A_2, ainsi que les points A_1' et A_2' sont confondus. Dans ce cas exceptionnel le point de suspension et le centre d'oscillation sont symétriques par rapport au centre de masse C.*

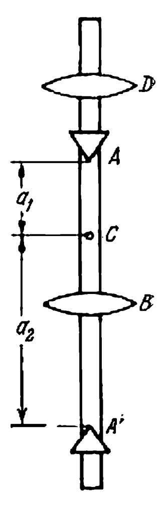


Fig. 88

4. Le théorème de Huygens est utilisé dans le *pendule réversible* servant à la mesure précise de l'accélération de la pesanteur. Il existe plusieurs constructions du pendule réversible; la figure 88 représente l'une d'elles. Le pendule est constitué par une tige d'acier d'environ un mètre de longueur, sur laquelle sont rigidement fixés deux couteaux prismatiques en acier A et A' et une lentille en acier B, disposée entre A et A'. Une autre lentille D se trouve près de l'une des extrémités de la tige (en dehors de l'intervalle AA') et peut coulisser sur la tige et être bloquée en position voulue. En faisant coulisser cettedli eème lentille, on arrive à égaliser les périodesocs'dx ation du pendule lorsqu'on le fait osciller successivement autour des couteaux A et A'. Comme les couteaux A et A' sont *asymétriques* par rapport au centre

de masse C, leur distance de séparation définit la longueur réduite l lorsque les périodes des oscillations deviennent égales. Ayant mesuré la période T on peut calculer g par la formule (41.3).

§ 42. Suspensions bifilaire et trifilaire

1. Calculons la période des petites oscillations d'une *suspension bifilaire* qui est un dispositif constitué par deux fils AB et CD de même longueur, supportant un corps pesant BD (fig. 89). Si on fait tourner le corps suspendu autour de l'axe vertical OO', il commence à effectuer des oscillations de torsion autour de cet axe. La suspension bifilaire est un système ayant un seul degré de liberté. Pour coordonnée déterminant sa position instantanée il est commode de prendre l'angle de rotation φ du corps BD autour de l'axe OO' par rapport à la position d'équilibre.

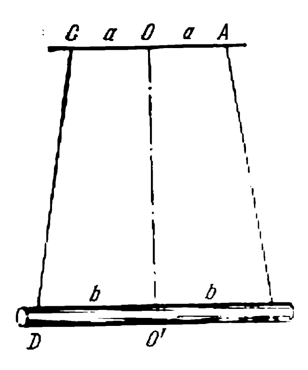


Fig. 89

L'énergie cinétique du système est $E_{\text{cin}} = {}^1/_2 I\dot{\varphi}^2$, où I est le moment d'inertie par rapport à l'axe OO'. L'énergie potentielle est $E_{\text{pot}} = mgh$, où h est la hauteur instantanée du corps par rapport à sa position d'équilibre. Désignons par l la longueur OO' à l'équilibre, par $2a$ la distance entre les points de suspension C et A, par $2b$ la distance DB. On suppose le système symétrique, les points O et O' se trouvant au milieu des segments de droite CA et DB, et les fils de suspension inextensibles, ce qui permet de déterminer la hauteur h. Choisissons un système de coordonnées rectangulaires d'origine O, l'axe X étant dirigé suivant la droite OA, l'axe Z suivant la droite OO' et l'axe Y suivant une direction orthogonale aux axes X et Z. Les coordonnées du point A restent invariables et égales à

$$x_A = a, \quad y_A = 0, \quad z_A = 0.$$

A l'équilibre, les coordonnées du point B sont égales à

$$x_B^{(0)} = b, \quad y_B^{(0)} = 0, \quad z_B^{(0)} = l.$$

Lorsque le système tourne d'un angle φ les coordonnées de ce point deviennent égales à

$$x_B = b\cos\varphi, \quad y_B = b\sin\varphi, \quad z_B = l - h.$$

La condition de l'inextensibilité du fil AB est:

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = (x_B^0 - x_A^0)^2 + (y_B^0 - y_A^0)^2 + (z_B^0 - z_A^0)^2,$$

ou encore

$$(b\cos\varphi - a)^2 + b^2\sin^2\varphi + (l-h)^2 = (b-a)^2 + l^2.$$

On en tire après réarrangement

$$h = \frac{2ab(1-\cos\varphi)}{2l+h} = \frac{4ab}{2l+h}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Si l'amplitude des oscillations est petite, on peut poser $\sin(\varphi/2) = \varphi/2$. Comme $h \ll 2l$, on peut négliger h dans le dénominateur. Avec ces approximations

$$h = \frac{ab}{2l}\varphi^2, \quad E_{\text{pot}} = \frac{mgab}{2l}\varphi^2.$$

Ainsi les énergies cinétique et potentielle sont ramenées à la forme (40.9), avec $\alpha = \frac{mgab}{l}$ et $\beta = I$. Il s'ensuit que les oscillations du système seront harmoniques, de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Il}{mgab}}. \qquad (42.1)$$

La période des oscillations est proportionnelle à la racine carrée du moment d'inertie et inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse du système. Supposant que le corps BD est un barreau métallique, dévions-le de sa position d'équilibre et laissons-le effectuer des oscillations de torsion. Ces oscillations seront relativement lentes. Fixons au point O' un poids important et remettons

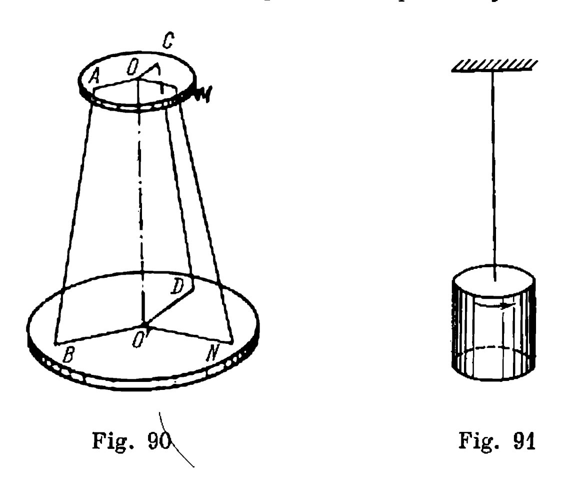


Fig. 90 Fig. 91

le système en oscillation. Nous constaterons que les oscillations sont devenues plus rapides: la raison en est qu'ayant fixé le poids supplémentaire sur l'axe de rotation, nous avons accru considérablement la masse du système sans que son moment d'inertie en soit pratiquement modifié. La diminution de la période d'oscillation peut s'expliquer aussi de la manière suivante. Le système revient dans sa position d'équilibre sous l'action des composantes horizontales des forces de tension des fils. En ajoutant un poids supplémentaire nous augmentons considérablement la tension des fils sans que le moment d'inertie augmente notablement, et nous obtenons une diminution de la période d'oscillation.

2. La formule (42.1) permet aussi de calculer la période d'oscillation d'une *suspension trifilaire* représentée schématiquement sur la figure 90. Les points de suspension A, C et M sont disposés sur un cercle de rayon a, et les points B, D, N sur un cercle de rayon b. Le disque inférieur peut effectuer des oscillations de torsion autour de l'axe vertical OO'. Le calcul qui nous a conduit à la formule (42.1) s'applique ici sans ajout, puisqu'il se base sur la constance de la longueur du seul fil de suspension AB. La constance de la longueur du second fil CD en découle automatiquement.

Les dispositifs à suspension trifilaire servent à la mesure du moment d'inertie des corps. On commence par mesurer la période d'oscillation T_0 du dispositif à vide, et on en déduit son moment d'inertie

$$I_0 = \frac{m_0 gab}{4\pi^2 l} T_0^2.$$

On place ensuite sur le disque inférieur le corps de masse m dont on cherche à déterminer le moment d'inertie I. Soit T la période d'oscillation de torsion du dispositif sous charge. Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe OO' est alors

$$I+I_0=\frac{(m+m_0)\,gab}{4\pi^2 l}\,T^2.$$

En soustrayant l'expression précédente on trouve le moment d'inertie I cherché.

3. Indiquons une deuxième méthode de mesure des moments d'inertie qui, souvent, est d'un usage plus commode. Suspendons le corps étudié à un fil d'acier de telle sorte qu'il puisse effectuer des oscillations de torsion autour d'un axe vertical confondu avec l'axe du fil (fig. 91). Lorsqu'on fait tourner le corps d'un angle φ, le fil subit une torsion qui fait apparaître un moment des forces M qui cherche à ramener le corps à sa position d'équilibre. L'expérience montre que le moment M est, dans de larges limites, proportionnel à l'angle φ: $M = -f\varphi$, où f est une constante caractérisant le fil et appelée *module de torsion*. On peut donc écrire

$$I\ddot{\varphi}=-f\varphi.$$

Puisque cette équation est mathématiquement identique à l'équation (40.1), le corps suspendu effectuera des oscillations de torsion harmoniques de période

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}. \qquad (42.2)$$

Remplaçons le premier corps par un autre de moment d'inertie I'. La nouvelle période d'oscillation sera

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{I'}{f}}.$$

Le rapport de ces deux expressions

$$\frac{I}{I'}=\left(\frac{T}{T'}\right)^2$$

ne contient plus le module de torsion inconnu f.

Si on connaît l'un des moments d'inertie, I par exemple, cette formule permet de calculer le moment d'inertie I' du second corps. Le moment d'inertie I peut être calculé connaissant la configuration géométrique et la masse du corps. Il faut pour cela prendre un corps de forme régulière, par exemple un cylindre ou une sphère. La formule (42.2) peut servir à la mesure des modules de torsion des fils.

PROBLÈMES

1. Soit un point matériel se mouvant dans le champ de gravitation suivant une corde de cercle avec une vitesse initiale nulle (fig. 92). Montrer que le temps qu'il met pour passer du point supérieur A au point inférieur B ne dépend pas de la position du point A sur le cercle. (Galilée utilisa ce fait pour établir la loi des petites oscillations du pendule simple. Pour trouver la période d'oscillation du pendule, Galilée substitua la corde AB au petit arc de cercle ADB suivant lequel se mouvait le point mobile.) Calculer dans cette approximation la période d'oscillation du pendule et montrer que cette approximation conduit à une relation correcte entre la période d'oscillation, la longueur l du pendule et l'accélération de la pesanteur g. Comparer le résultat obtenu avec la formule exacte (41.3).

R é p o n s e. $T = 8\sqrt{l/g}$.

2. On fait passer un fil sur une poulie immobile de moment d'inertie I et de rayon r (fig. 93) ; à une extrémité de ce fil est suspendu un poids de masse m, l'autre extrémité du fil étant attachée à un ressort fixe. Calculer la période d'oscillation du poids, le coefficient d'élasticité du ressort étant égal à k et le fil ne glissant pas sur la poulie.

Réponse. $T = 2\pi \sqrt{\frac{I/r^2 + m}{k}}$.

3. Un pendule pesant est constitué par une tige homogène de longueur l suspendue à l'une de ses extrémités. Calculer la période d'oscillation de ce pendule.

Réponse. $T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}$.

4. Un corps de révolution de rayon a, de moment d'inertie I (par rapport à l'axe géométrique du corps) et de masse m roule sans glissement sur la surface

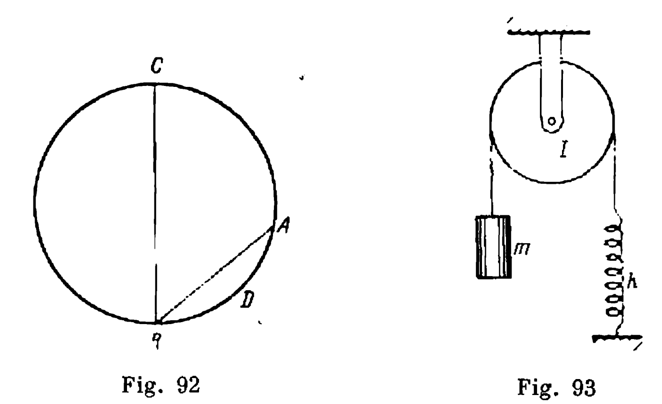


Fig. 92 Fig. 93

ntérieure d'un cylindre de rayon R en effectuant de petites oscillations autour d'une position d'équilibre (fig. 94). Calculer la période de ces oscillations.

Solution. En considérant ce mouvement comme une rotation autour de l'axe instantané *) à une vitesse angulaire ω, on écrira pour la vitesse de son centre $v = \omega a$. Cette même vitesse peut s'exprimer par $v = (R - a)\dot{\varphi}$. En égalant ces deux équations, on trouve

$$\omega = \frac{R-a}{a}\dot{\varphi}.$$

Selon le théorème de König, l'énergie cinétique est

$$K = \frac{I}{2}\omega^2 + \frac{m}{2}(R-a)^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{a^2}\right)(R-a)^2\dot{\varphi}^2.$$

L'énergie potentielle est

$$U = mg(R-a)(1-\cos\varphi) \approx \frac{mg}{2}(R-a)\varphi^2.$$

*) La définition de l'axe instantané est donnée au § 45.

En appliquant la méthode générale exposée au § 40, nous trouverons

$$T=2\pi\sqrt{\left(1+\frac{I}{ma^2}\right)\frac{R-a}{g}}.$$

En particulier, pour un cylindre massif et une sphère massive

$$T=2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{R-a}{g}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\,\frac{R-a}{g}}.$$

5. Un cylindre de moment d'inertie I (par rapport à l'axe géométrique longitudinal) de masse m et de rayon r repose sur un plan horizontal. A l'axe du cylindre sont attachés deux ressorts à boudin horizontaux dont les extrémités sont fixées à un mur (fig. 95, vue de dessus). Les coefficients élastiques des

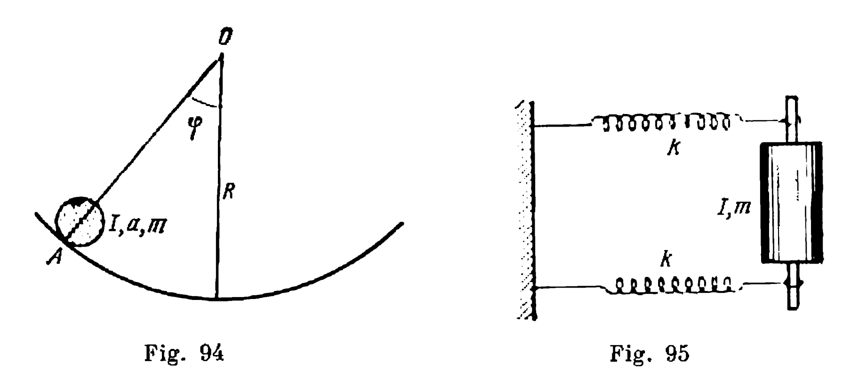


Fig. 94 Fig. 95

ressorts sont égaux à k ; les ressorts peuvent travailler aussi bien à la compression qu'à l'extension. Déterminer la période des petites oscillations du cylindre qui apparaissent si on écarte le cylindre de sa position d'équilibre et qu'on l'abandonne ensuite à lui-même, lui permettant de rouler sans glissement sur le plan horizontal.

Réponse. $T=\frac{2\pi}{r}\sqrt{\frac{I+mr^2}{2k}}$. Pour un cylindre massif $T=\pi\sqrt{3m/k}$.

6. Une plaque carrée homogène est suspendue au plafond d'une salle par quatre cordes parallèles attachées aux sommets de la plaque; la longueur de chaque corde est l. Calculer la période des petites oscillations de torsion de la plaque qui apparaissent si on fait tourner la plaque d'un petit angle autour de l'axe vertical.

Réponse. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$.

Dans le cas plus général où la plaque n'est pas homogène, mais son centre de masse coïncide avec son centre géométrique

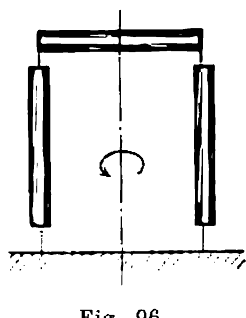
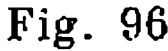
$$T=2\pi\sqrt{\frac{2Il}{Mga^2}},$$

où I est le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe vertical passant par son centre et a la longueur de l'un de ses côtés.

7. Trois tiges homogènes, chacune de longueur l, sont réunies entre elles par des fils courts, comme indiqué sur la figure 96. On fait tourner la tige inférieure d'un petit angle autour de l'axe vertical passant par le centre du système,

puis on l'abandonne à elle-même. Calculer la période des petites oscillations du système dans le cas où les tiges ont mêmes masses.

Réponse. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.



Fig. 96

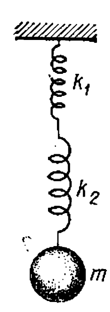


Fig. 97

8. Une bille de masse m est suspendue à l'extrémité inférieure d'un ensemble de deux ressorts mis bout à bout dont les raideurs sont k_1 et k_2 (fig. 97). Calculer la période de ses oscillations verticales.

Réponse. $T = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)}$.

Indication. Démontrer que lors des compressions et des extensions, les deux ressorts se comportent comme un seul ressort dont la raideur aurait pour valeur:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}.$$

9. Calculer la période des oscillations de torsion d'un disque emmanché sur un support constitué de deux tiges différentes engagées l'une dans l'autre

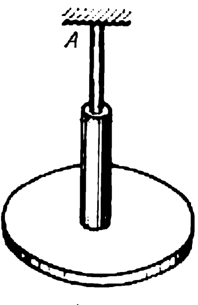


Fig. 98

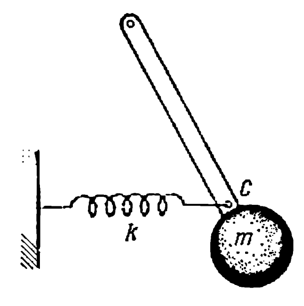


Fig. 99

(fig. 98). L'extrémité supérieure A du support est fixe. Si le disque n'était emmanché que sur la première tige, sa période d'oscillation aurait été T_1 et s'il ne l'était que sur la seconde, sa période aurait été T_2.

Réponse. $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

10. Calculer la période des petites oscillations d'un pendule pesant de masse m, attaché en son centre de masse C à un ressort horizontal de coefficient d'élasticité k ; l'autre extrémité du ressort est fixée au mur (fig. 99). Le moment d'inertie du pendule par rapport à son point de suspension est I, la distance entre le point de suspension et le centre de masse du pendule est a. A l'équilibre le ressort n'est pas déformé.

Réponse. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{I}{mga + ka^2}}$.

11. Soit un système oscillant constitué par une tige homogène de longueur l et de masse m pouvant tourner autour d'un axe horizontal O passant par l'une de ses extrémités et perpendiculaire à l'axe longitudinal de la tige (fig. 100). L'autre extrémité de la tige est suspendue à un ressort de coefficient d'élasticité k. La distance entre le centre de masse de la tige et l'axe de rotation $CO = a$.

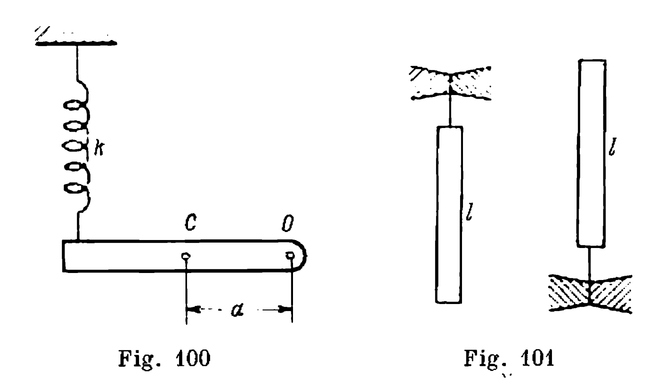


Fig. 100 Fig. 101

Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe O est égal à I. Calculer l'allongement du ressort x_0 (par rapport à sa longueur à l'état non déformé) dans la position d'équilibre si dans cette position la tige est horizontale. Calculer également la période des petites oscillations de la tige autour de la position d'équilibre.

Réponse. $x_0 = \dfrac{mga}{kl}$, $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{I}{kl^2}}$.

12. Une courte plaque élastique est fixée à l'extrémité d'une tige homogène de longueur l et de masse m. On bloque une fois la plaque dans un étau de façon que la tige pointe vers le bas et une autre fois de manière que la tige pointe vers le haut (fig. 101). Calculer le rapport des périodes des petites oscillations de la tige dans ces deux cas. Le moment des forces élastiques de la plaque est proportionnel à l'angle de déviation de la tige de sa position d'équilibre. Le coefficient de proportionnalité est égal à k.

Réponse. $\dfrac{T_1}{T_2} = \sqrt{\dfrac{2k - mgl}{2k + mgl}}$.

13. Deux billes non fixées de masses m_1 et m_2 sont réunies par un ressort à boudin de coefficient d'élasticité k. Calculer la période des oscillations des billes par rapport au centre de masse du système, résultant d'une extension du ressort.

Réponse. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)\, k}}$.

14. Deux disques de moments d'inertie I_1 et I_2 sont emmanchés sur un axe commun passant par leurs centres. L'axe est une tige de module de torsion f.

Calculer la période des oscillations de torsion de l'un des disques par rapport à l'autre en supposant que le système est libre. Négliger la masse de la tige.

R é p o n s e. $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_1 I_2}{f(I_1+I_2)}}$.

15. Deux cylindres massifs et homogènes de même rayon R, de masses m_1 et m_2, reposent sur une table horizontale, étant attachés l'un à l'autre par deux ressorts identiques de coefficient d'élasticité k (fig. 102, vue de dessus). Calculer la période des petites oscillations qui apparaissent lorsqu'on abandonne

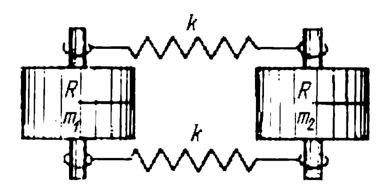


Fig. 102

le système à lui-même après avoir tendu les ressorts et sans avoir communiqué au système de vitesse supplémentaire. Les cylindres roulent sur la table sans glissement. Les ressorts peuvent travailler à la compression et à l'extension.

R é p o n s e. $T = \pi\sqrt{\frac{3m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}$.

16. Les oscillations d'un pendule simple ne sont approximativement isochrones que tant que leurs amplitudes sont petites. Huygens se fixa pour tâche de construire un pendule dont les oscillations seraient rigoureusement iso-

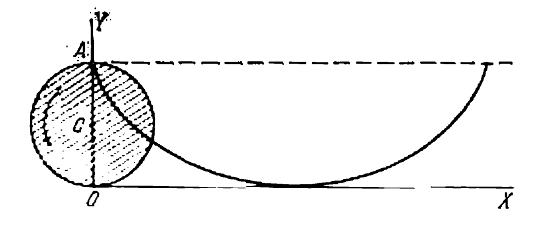


Fig. 103

chrones, quelle que soit l'amplitude des oscillations. Il démontra que c'est le cas d'un *pendule cycloïdal*. Le pendule cycloïdal simple est constitué par un point matériel qui oscille en se déplaçant sur un arc de cycloïde sous l'action de la force de pesanteur. Démontrer que les oscillations d'un pendule cycloïdal sont isochrones et établir la formule exprimant sa période.

S o l u t i o n. On sait que la cycloïde est la courbe décrite par un point d'un cercle qui roule sur une droite fixe. Pour nos besoins nous devons prendre une cycloïde convexe vers le bas. Nous supposerons donc que le cercle est disposé au-dessous de la droite horizontale sur laquelle il roule (sur la figure 103 cette droite est représentée en pointillé). On prend pour axe X une droite parallèle à la droite de roulement et décalée vers le bas d'une distance égale au diamètre $2a$ du cercle. Supposons que le point A du cercle, qui décrit la cycloïde, occupe dans sa position initiale un point d'ordonnée $2a$ sur l'axe Y. Si, en roulant sur la droite, le cercle tourne d'un angle φ, son centre C se déplace vers la droite

d'une distance $a\varphi$ et le point A se déplace par rapport au centre C vers la gauche d'une distance $a \sin \varphi$ et vers le bas d'une distance $a(1 - \cos \varphi)$. Les coordonnées rectangulaires du point A deviennent alors

$$x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 + \cos \varphi).$$

C'est la forme paramétrique de l'équation de la cycloïde. Admettons maintenant que x et y désignent les coordonnées du point matériel effectuant des oscillations cycloïdales sous l'action de la force de pesanteur. Le paramètre φ devient alors une fonction du temps. L'énergie potentielle du point est $U = mgy$ et son énergie cinétique est $K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$. Ayant calculé les dérivées $\dot{x}$, $\dot{y}$ et procédé à quelques transformations élémentaires, il vient

$$U = 2mga \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad K = 2ma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Introduisons la notation $q = \cos \frac{\varphi}{2}$. Alors $\dot{q} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi}$. La quantité q peut être choisie pour coordonnée du point oscillant et sa dérivée $\dot{q}$ représentera donc sa vitesse généralisée. Avec ces notations

$$U = 2mgaq^2, \quad K = 8ma^2\dot{q}^2.$$

L'énergie potentielle est une fonction quadratique de la coordonnée q et l'énergie cinétique est une fonction quadratique de la dérivée $\dot{q}$ avec les coefficients constants. Il s'ensuit que quelles que soient les amplitudes, les oscillations du pendule cycloïdal seront isochrones et harmoniques de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

17. Un pendule est suspendu à un élastique tendu si fortement qu'on peut négliger sa longueur initiale. Le pendule peut-il effectuer des oscillations horizontales harmoniques et isochrones d'amplitude aussi grande que l'on veut? S'il le peut, calculer la période d'oscillation. Le pendule peut-il effectuer des mouvements circulaires dans un plan vertical? Quel sera le mouvement pour des conditions initiales arbitraires?

Réponse. Les deux types de mouvement sont possibles. Leur période est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

où m est la masse du pendule et k le coefficient d'élasticité de l'élastique. Pour des conditions initiales arbitraires, le mouvement du pendule sera elliptique de période de révolution T.

18. Sur une barre tournant dans un plan horizontal à la vitesse angulaire constante ω glisse sans frottement un poids de masse m retenu à une certaine distance de l'axe de rotation par un ressort de coefficient d'élasticité k et de longueur initiale r_0. Quel sera le mouvement du poids si on arrête instantanément la rotation de la barre.

Réponse. $r = r_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega_0 t\right)$, avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. On doit avoir $\omega < \omega_0$ sinon le poids placé sur la barre en rotation s'éloignera indéfiniment de l'axe de rotation et l'équilibre postulé dans l'énoncé du problème deviendra irréalisable.

19. On attache à un ressort horizontal un corps de masse $M = 10$ kg reposant sur une table lisse sur laquelle il peut glisser sans frottement (fig. 104).

Un projectile de masse $m = 10$ g vient percuter ce corps et s'y encastre. La vitesse horizontale du projectile dont la trajectoire est dans l'axe du ressort est $v = 500$ m/s. Sous l'action du choc, le corps avec le projectile s'écarte de sa

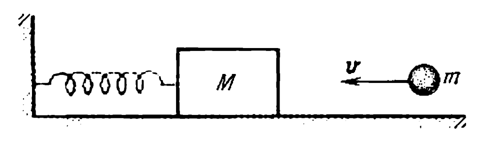


Fig. 104

position d'équilibre et commence à osciller par rapport à cette position avec une amplitude $a = 10$ cm. Quelle est la période d'oscillation du corps?

Réponse. $T = 2\pi \frac{M+m}{mv} a \approx 1{,}26$ s.

20. Une bille est enfilée sur une aiguille à tricoter en acier dont une extrémité est fixe. En supposant que la masse de l'aiguille est négligeable par rapport à celle de la bille, montrer que la période des petites oscillations que l'on provoque en tirant la bille de côté est proportionnelle à la distance l entre la bille et le point de fixation de l'aiguille.

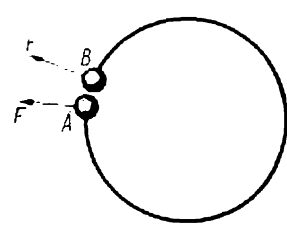


Fig. 105

Indication. Considérons une aiguille à tricoter auxiliaire en forme de bague. Si on la coupe en un point quelconque et qu'on fixe sur les bouts en regard deux petites billes A et B, on verra apparaître des forces élastiques radiales F appliquées aux billes et tendant à redresser l'aiguille recourbée (fig. 105). L'intensité de ces forces ne dépend pas du lieu de coupure. Ayant fait cette remarque, revenons-en à notre problème. Si on déplace la bille enfilée sur l'aiguille, celle-ci se déforme. Tant que les déformations sont petites, la région de l'aiguille comprise entre la bille et le point de fixation de l'aiguille peut être considérée en première approximation comme arc de cercle. Conformément à la remarque que nous venons de faire, la force agissant sur cet arc de courbe déformé est partout la même. Partant de là, il ne reste qu'à démontrer que le coefficient d'élasticité k de l'aiguille est inversement proportionnel au carré de la longueur l.

21. Calculer la période des oscillations d'un pendule pesant en fonction de leur amplitude angulaire.

Solution. Appliquons la loi de la conservation de l'énergie

$$\frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 = mga(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

où φ est l'angle d'écart du pendule avec sa position d'équilibre, φ_0 la valeur maximale de cet angle (amplitude angulaire des oscillations). Introduisons la longueur réduite du pendule (formule 41.4); après quelques transformations simples, nous obtenons

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Résolvons cette équation par rapport à dt, puis intégrons sur φ; nous trouverons alors que la période d'oscillation du pendule T est égale au quadruple du temps que met le pendule pour parcourir l'angle compris entre $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$.

Pour faciliter l'intégration nous introduirons une nouvelle variable d'intégration $u = \sin(\varphi/2)\sin(\varphi_0/2)$ et obtiendrons ainsi

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}},$$

où $k = \sin(\varphi_0/2)$. L'intégrale qui figure dans cette formule ne se laisse pas prendre en fonctions élémentaires ; elle porte le nom d'*intégrale elliptique de première espèce* et se laisse représenter par une série infinie. Comme $|k\sin u| < 1$, la quantité sous le signe d'intégration peut être développée en série par la formule du binôme de Newton :

$$(1-k^2\sin^2 u)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2 u+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4 u+\\+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6 u+\ldots$$

Cette série étant régulièrement convergente, on peut l'intégrer terme à terme ; nous trouverons ainsi :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi_0}{2}+\right.\\\left.+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 5}\right)^2\sin^6\frac{\varphi_0}{2}+\ldots\right].$$

Pour de petites amplitudes φ_0 cette formule se ramène à la formule (41.3).

§ 43. Les invariants adiabatiques

1. L'énergie, l'impulsion et le moment cinétique d'un système mécanique sont fonctions de ses coordonnées et de ses vitesses. Pour un système fermé ces quantités se conservent, i.e. ne varient pas avec le temps. Si le système n'est pas fermé et les paramètres caractérisant son état varient dans le temps, les quantités ci-dessus varient en général elles aussi. Considérons, par exemple, un pendule simple dont le fil de suspension passe sur un clou. Les paramètres sont la longueur l du fil et l'accélération de la pesanteur g. En tirant sur le fil on peut diminuer ou augmenter sa longueur l, mais ce faisant on effectue un travail extérieur et par suite l'énergie du pendule doit changer. On peut aussi modifier l'accélération de la pesanteur en faisant monter ou descendre le pendule par rapport à la surface terrestre. Parmi toutes les variations que l'on peut faire subir aux paramètres extérieurs un rôle particulier revient aux variations infiniment lentes que l'on appelle *variations adiabatiques* *).

Dans ce cas, aussi lentes que soient les variations des paramètres, ceux-ci peuvent prendre toutes les valeurs compatibles avec la posi-

*) En thermodynamique le terme « adiabatique » a une autre signification. Un processus est dit adiabatique s'il s'effectue sans apport ou évacuation de la chaleur.

tion du problème, ce qui exige évidemment un temps suffisamment long. Les variations des paramètres du système, aussi lentes soient-elles, entraînent la variation des autres grandeurs physiques. Nous avons déjà indiqué que l'énergie du système ne reste pas constante puisque lors des variations des paramètres du système un travail est effectué. Mais il peut exister des grandeurs qui resteront invariables ou presque invariables si la variation des paramètres est très lente.

Les fonctions des coordonnées, des vitesses et des paramètres du système, qui restent constantes lors des variations infiniment lentes des paramètres du système, sont désignées sous le nom d'invariants adiabatiques. Nous préciserons plus tard cette définition puisqu'il faut s'entendre d'abord sur la signification du qualificatif « infiniment lent ». Les invariants adiabatiques jouèrent un rôle important dans l'ancienne théorie atomique semi-classique de Bohr, mais il existe d'autres domaines de la Physique où ils conservent toute leur valeur.

2. Pour bien éclaircir la signification de la notion d'invariant adiabatique, considérons l'exemple simple mais fort important d'un oscillateur harmonique dont la fréquence propre varierait lentement dans le temps. C'est le cas d'un pendule simple dont les paramètres lentement variables seraient la longueur l du fil de suspension et l'accélération en chute libre g (plus exactement leur combinaison $\omega^2 = g/l$). Un autre exemple est fourni par les oscillations d'une bille attachée à un ressort dont le coefficient d'élasticité k varierait lentement dans le temps. Tous les systèmes désignés sous le nom d'*oscillateurs harmoniques* sont mathématiquement équivalents. Aussi prendrons-nous pour exemple la bille attachée à un ressort. Pour le ramener au problème du pendule simple, il suffit de poser $k = mg/l$. Tant que nous nous attachons au seul aspect mathématique du problème, il importe peu de connaître la cause de la variation lente du coefficient d'élasticité k du ressort ou de n'importe quelle autre quantité lentement variable.

L'énergie totale d'un oscillateur harmonique est

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Sa dérivée par rapport au temps peut s'écrire

$$\dot{E} = (mv\dot{v} + kx\dot{x}) + \frac{x^2}{2}\dot{k}.$$

La quantité entre parenthèses s'annule puisque $\dot{x} = v$, la force agissante $F = -kx$ et selon la loi de Newton $m\dot{v} = F$. En introduisant l'énergie potentielle $U = {}^1/_2\, kx^2$, nous obtenons

$$\dot{E} = U(x)\,\frac{\dot{k}}{k}. \tag{43.1}$$

Jusqu'ici nos calculs étaient parfaitement exacts. Utilisons maintenant le fait de la *variation lente* du paramètre k et de sa dérivée $\dot{k}$. Dire que la variation est lente signifie que, k variant, le mouvement est toujours oscillatoire, à cette différence près que sa « période » T et ses élongations maximales varient légèrement d'une oscillation à la suivante. Cela veut dire que durant chaque oscillation, la variation du paramètre k doit être très petite. C'est la conception usuelle d'une variation lente, qui ne saurait cependant suffire à notre problème, car il faut imposer une contrainte supplémentaire à la variation de k et de sa dérivée, en exigeant que durant chaque période d'oscillation le quotient $\dot{k}/k$ reste sensiblement constant. Plus exactement il faut que pour chaque période d'oscillation le rapport $\dot{k}/k$ puisse être représenté sous la forme

$$\frac{\dot{k}}{k}=\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_0[1+\alpha], \tag{43.2}$$

où $(\dot{k}/k)_0$ est la valeur de ce rapport en un point quelconque de la période considérée, par exemple à la mi-période, et α une correction tendant vers zéro pour $\dot{k}\to 0$. En tenant compte de ces remarques, intégrons (43.1) entre les limites t et $t+T(k)$ pour un instant t quelconque:

$$\Delta E=E(t+T)-E(t)=\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_0\left[\int_t^{t+T} U[x(t')]\,dt'+\beta\right]. \tag{43.3}$$

β est ici un terme correctif qui s'annule pour $\dot{k}\to 0$. (Nous avons désigné la variable d'intégration par t' pour éviter toute confusion avec la limite d'intégration inférieure t.) Il suffit de calculer l'intégrale qui entre dans cette formule à l'approximation d'ordre zéro, ce qui revient à admettre dans les calculs que durant le temps T le paramètre k ne varie pas. L'erreur que l'on commet alors sur la valeur de ΔE sera d'un ordre de petitesse en $\dot{k}$ égal ou supérieur à 2. Pour une raison identique on peut rejeter le terme correctif β. On peut encore rejeter l'indice 0 dans le facteur $(\dot{k}/k)_0$. Cela revient à écrire

$$\Delta E=\frac{\dot{k}}{k}\int_t^{t+T} U[x(t')]\,dt', \tag{43.4}$$

où l'intégrale (et non pas le facteur devant l'intégrale) est calculée en supposant k constant. Lors du calcul de l'intégrale on peut prendre l'instant t pour origine du temps, i.e. poser $t=0$, sans que le résultat en soit affecté. Pour $k=$ const, la coordonnée x effectue des oscil-

lations harmoniques $x = x_0 \cos(\omega t + \delta)$, et par suite

$$U = \frac{kx_0^2}{2} \cos^2(\omega t + \delta) = \frac{E}{2} [1 + \cos(2\omega t + \delta)],$$

puisque l'énergie totale $E = {}^1/_2 kx_0^2$. En utilisant l'expression obtenue et en procédant à l'intégration on obtient

$$\int_0^T U\,dt = \frac{E}{2} \int_0^T [1 + \cos(2\omega t + \delta)]\,dt = \frac{ET}{2}.$$

Le produit $T\dot{k}$, aux termes d'ordre de petitesse en $\dot{k}$ supérieur près, représente l'accroissement Δk du paramètre k par période T. On peut donc écrire à la place de (43.4)

$$\Delta E = \frac{\Delta k}{2k} E. \tag{43.5}$$

Comme l'accroissement Δk par période peut être aussi petit que l'on veut, on peut considérer l'énergie E comme une fonction du paramètre k; à la limite l'égalité approchée (43.5) devient une équation différentielle exacte

$$\frac{dE}{E} - \frac{dk}{2k} = 0.$$

En l'intégrant on trouve

$$\ln \frac{E}{\sqrt{k}} = \text{const},$$

et par suite

$$\frac{E}{\sqrt{k}} = \text{const}. \tag{43.6}$$

Compte tenu de (40.3) et (40.4) nous en déduisons

$$ET = \text{const}, \tag{43.7}$$

$$\frac{E}{\omega} = \text{const}. \tag{43.8}$$

Ces relations signifient que *pour un oscillateur harmonique les quantités ET et E/ω sont des invariants adiabatiques. La période d'oscillation T et la pulsation* ω figurant dans ces expressions *doivent être calculées en admettant que le paramètre k reste invariable pendant les oscillations*, donc à l'aide des formules (40.3) et (40.4). Si, par exemple, on diminue lentement la longueur du fil de suspension d'un pendule simple effectuant les petites oscillations, sa période T diminuera lentement d'une oscillation à la suivante. Simultanément l'énergie des oscillations augmentera de telle manière que le produit ET reste constant.

3. Pour apprécier à sa juste valeur le théorème que nous venons de démontrer, il importe de se faire une idée juste de ce qu'il faut

entendre par « variation lente » du paramètre k de l'oscillateur. Il ne suffit pas qu'à chaque période d'oscillation les variations du paramètre k soient infiniment petites, il faut encore qu'elles satisfassent à la condition (43.2). Imaginons, par exemple, qu'à proximité de la position inférieure d'un pendule simple en état d'oscillation on diminue légèrement la longueur de son fil de suspension en faisant agir des forces extérieures et qu'à proximité de ses positions extrêmes on l'allonge d'autant. Le travail effectué par les forces extérieures pour raccourcir le fil dans la position inférieure sera plus grand que celui effectué à l'encontre des champs extérieurs pour allonger le fil à proximité des positions extrêmes du pendule, car pendant les oscillations du pendule la tension du fil varie et est maximale dans la position inférieure. Par suite on fournira au système de l'énergie deux fois à chacune de ses oscillations. Si le nombre d'oscillations est grand, l'accroissement d'énergie du système sera grand, bien que la longueur du pendule et sa période T seront constantes. Les oscillations dont les paramètres varient périodiquement sont appelées *oscillations paramétriques*. Un exemple en est la balançoire. Les résultats (43.7) et (43.8) ne s'appliquent pas aux oscillations paramétriques, même si la variation du paramètre k à chaque période est aussi petite que l'on veut. La raison en est que ces variations ne vérifient pas la condition (43.2). *La condition* (43.2) *exige, grosso modo, que les variations de k soient lentes et monotones.* Ainsi, dans notre exemple, l'invariance adiabatique des expressions (43.7) et (43.8) ne pourrait être réalisée que si la longueur du fil variait d'une manière lente et monotone. Mais si on superpose à de telles variations lentes et monotones de petites variations de caractère oscillatoire, comme celles que l'on utilise pour provoquer une excitation paramétrique des oscillations, le théorème relatif à l'invariance adiabatique des expressions (43.7) et (43.8) ne s'applique plus.

4. Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent être étendus au cas d'oscillations non harmoniques à un degré de liberté, c'est-à-dire aux oscillations produites par des forces qui ne sont pas quasi élastiques. Dans ce cas la grandeur qui oscille varie dans le temps suivant une loi autre qu'une loi sinusoïdale. La période d'oscillation T dépend alors non seulement des paramètres du système, mais encore de l'amplitude des oscillations et la formule (43.7) doit être remplacée par la formule

$$\overline{K}T = \text{const}, \tag{43.9}$$

où $\overline{K}$ est la valeur moyenne de l'énergie cinétique par période (c'est ce qu'indique le trait placé au-dessus du symbole K), i.e.

$$\overline{K}(t) = \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} K(t')\, dt'. \tag{43.10}$$

On démontre aisément que dans le cas d'oscillations harmoniques les valeurs moyennes par période de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle sont égales chacune à la moitié de l'énergie totale: $\bar{K} = \bar{U} = {}^1/_2 E$. De ce fait la formule (43.9) se ramène à (43.7).

Portons l'expression (43.10) dans (43.9) et remarquons que $K = {}^1/_2 mv^2$, $p = mv$, $dq = v\,dt$, dq étant l'accroissement de la coordonnée caractérisant la position du point matériel. On obtient alors

$$\oint p\,dq = \text{invariant adiabatique}, \tag{43.11}$$

l'intégration étant étendue à toute la période du mouvement du point matériel en supposant que les paramètres du système sont invariables.

Nous nous abstiendrons de donner ici la démonstration générale de (43.11) fondée sur les équations de la mécanique données sous la forme de Hamilton, mais deux exemples serviront à illustrer la question.

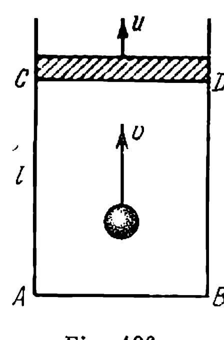


Fig. 106

5. Premier exemple. Une bille parfaitement élastique placée dans un cylindre à parois lisses s'y meut de haut en bas et de bas en haut en se réfléchissant successivement sur le fond AB du cylindre et sur le piston CD, conformément aux lois du choc parfaitement élastique (fig. 106). Supposons d'abord qu'elle n'est soumise ni au champ de la pesanteur, ni à aucun autre champ de forces. Assurons le déplacement lent du piston CD à la vitesse u et voyons ce qu'il advient du mouvement de la bille. Passons à un référentiel mobile par rapport auquel le piston est au repos. Dans ce référentiel la vitesse de la bille sera $v - u$. Après chaque réflexion la vitesse reste inchangée en grandeur mais inverse son signe et devient égale à $-v + u$. Par rapport à un référentiel immobile, cette même vitesse est égale à $(-v + u) + u = -v + 2u$. L'accroissement de l'énergie cinétique de la bille, résultant d'une seule réflexion sur le piston mobile, est donc:

$$\Delta K = \frac{m}{2}\left[(-v+2u)^2 - v^2\right] = -2m\,(uv - u^2).$$

En divisant tous les termes par $K = {}^1/_2 mv^2$ et en négligeant le carré de la petite vitesse u, on a

$$\frac{\Delta K}{K} = -4\frac{u}{v}. \tag{43.12}$$

Voyons maintenant quelle sera la variation de la période T des oscillations de la bille résultant du mouvement du piston. Nous entendons ici par période T le temps que met la bille pour faire un aller et retour entre le fond du cylindre et le piston en supposant que celui-ci est *fixe*. En désignant par l la distance entre le piston et le fond du cylindre pendant ce mouvement d'aller et retour, $T = 2l/v$. Au bout du temps T la distance l s'accroît de uT et la vitesse de la bille diminue de $2u$. La période que nous venons de définir variera donc et deviendra égale à

$$T' = \frac{2\,(l+uT)}{v-2u} = \frac{2\,(l+uT)\,(v+2u)}{v^2-4u^2},$$

et en négligeant le carré de la petite vitesse u

$$T' = T + \frac{2uTv + 4lu}{v^2} = T + 4T\frac{u}{v}.$$

Ainsi durant le temps T la période s'accroît de

$$\Delta T = 4T\frac{u}{v} = -T\frac{\Delta K}{K}.$$

A la limite où le mouvement du piston est infiniment lent, on peut considérer les accroissements ΔT et ΔK comme des différentielles infiniment petites et écrire:

$$\frac{dT}{T} + \frac{dK}{K} = 0.$$

L'intégration conduit à

$$TK = \text{const}, \tag{43.13}$$

ce qui signifie que *le produit TK est un invariant adiabatique.*

6. Deuxième exemple. Reprenons l'exemple précédent mais en tenant compte de la force de pesanteur. Soit v_1 la vitesse de la bille après réflexion sur le piston (fig. 107). A une distance x du piston sa vitesse v est donnée par la relation $v^2 = v_1^2 + 2gx$. Dans ces conditions l'intégrale (43.11) s'écrira

$$J = 2m\int_0^l \sqrt{v_1^2 + 2gx}\, dx,$$

où l est la distance entre le piston et le fond du cylindre. *Le calcul de cette intégrale doit s'effectuer en supposant que le piston est fixe, donc pour $l =$* const. Nous obtenons alors

$$J = \frac{2m}{3g}(v_1^2 + 2gl)^{3/2} - v_1^3 = \frac{2m}{3g}(v_2^3 - v_1^3),$$

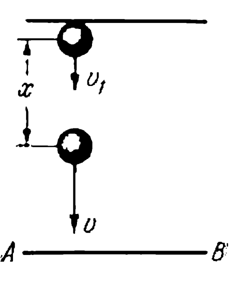


Fig. 107

v_2 étant la vitesse de la bille dans sa position inférieure. Il nous faut démontrer que la différence $v_2^3 - v_1^3$ est un invariant adiabatique. Calculons les vitesses v_1 et v_2 au bout de la période T; notons-les v_1' et v_2'. Il va de soi que les calculs doivent être effectués en supposant que le piston se trouvant dans sa nouvelle position est immobilisé. Dans le temps T le piston se déplace vers le haut d'une distance uT. Pour parcourir cette distance la bille met un temps $\Delta T = uT/v_1$ (en négligeant les petites quantités d'ordre supérieur). Sous l'action de la force de pesanteur, sa vitesse diminue de $g\Delta T = g\frac{u}{v_1}T$. D'autre part, par réflexion sur le piston mobile, la vitesse de la bille diminue encore de $2u$. Ainsi

$$v_1' = v_1 - \left(\frac{gT}{v_1} + 2\right)u = v_1 - 2\frac{v_2}{v_1}u,$$

puisque

$$v_2 = v_1 + g\frac{T}{2}.$$

Au niveau AB la vitesse de la bille sera $v_1'' = v_1 - 2u$ et près du fond du cylindre elle sera

$$v_2'^2 = v_1''^2 + 2gl = (v_1 - 2u)^2 + 2gl = v_2^2 - 4v_1u$$

si on néglige le carré de la vitesse u. Calculons la racine carrée et en négligeant une nouvelle fois u^2 nous obtenons

$$v_2' = v_2 - \frac{2v_1}{v_2} u.$$

Au même degré d'approximation

$$v_2'^3 = v_2^3 - 6v_1v_2u, \quad v_1'^3 = v_1^3 - 6v_1v_2u.$$

Il en résulte que $v_2'^3 - v_1'^3 = v_2^3 - v_1^3$ ou $J' - J = 0$, cette relation étant vraie aux termes de l'ordre de $u^2 = \dot{l}^2$ près. En divisant cette égalité par T et en identifiant le quotient $\frac{J' - J}{T}$ à la dérivée $\frac{dJ}{dt}$, nous obtenons

$$\frac{dJ}{dt} = A\dot{l}^2,$$

A étant indépendant de $\dot{l}$. Or comme nous cherchons les variations de la quantité J correspondant aux *variations finies* de l, nous devons transformer la relation ci-dessus à l'aide de la substitution $dl = \dot{l}\, dt$. On obtient alors

$$\frac{dJ}{dl} = A\dot{l}$$

et à la limite pour $\dot{l} \to 0$

$$\frac{dJ}{dl} = 0.$$

Par conséquent J = const, aussi grandes que soient les variations du paramètre l; or cela signifie que *la quantité J est un invariant adiabatique*. Ce résultat tient à ce que la dérivée $\frac{dJ}{dt}$ est proportionnelle à $\dot{l}^2$ et non pas à $\dot{l}$. Si $\frac{dJ}{dt}$ avait été proportionnelle à $\dot{l}$, J n'aurait pas été un invariant adiabatique.

PROBLÈMES

1. La bille d'un pendule simple ou la bille attachée à un ressort de coefficient d'élasticité k se vaporise lentement (système de masse variable). La quantité ET sera-t-elle un invariant adiabatique? Si elle l'est, expliquer pourquoi.

Réponse. Non, cette quantité n'est pas un invariant adiabatique.

2. Soit une bille de masse m enfilée sur une tige fine en acier, de masse négligeable, dont une extrémité est fixe. On communique à la bille une vitesse longitudinale pointant vers le point de fixation de la tige et une vitesse perpendiculaire à la précédente. En admettant que pendant la période d'oscillation de la bille son déplacement le long de la tige est petit comparativement à sa longueur et en négligeant le frottement, déterminer la nature du mouvement ultérieur de la bille.

Solution. Si $v_\perp$ est la vitesse transversale de la bille, la quantité $v_\perp^2 T$ est un invariant adiabatique. La période T est proportionnelle à la distance l entre la bille et le point de fixation de la tige (cf. problème 20 au § 42). Il s'ensuit que la quantité $A = v_\perp^2 l$ sera aussi un invariant adiabatique. D'autre part, le mouvement de la bille doit satisfaire à la loi de la conservation de l'énergie qui impose que la vitesse totale v de la bille se conserve en valeur absolue. Si $v_\parallel$ est la vitesse longitudinale de la bille, alors $v^2 \equiv v_\parallel^2 + v_\perp^2$ = const. Ainsi la quantité $A = (v^2 - v_\parallel^2)\, l$ est un invariant adiabatique. A une distance l_0 pour laquelle $v^2 l_0 = A$, la vitesse longitudinale $v_\parallel$ s'annule. Par suite la bille ne peut s'approcher du point de fixation qu'à une distance l_0. Arrivée à la position $l = l_0$, la bille doit rebrousser chemin.

CHAPITRE VII

LA MÉCANIQUE DES SOLIDES

§ 44. Les corps solides en mécanique. Equations de mouvement et d'équilibre des corps solides

1. Dans les deux chapitres précédents il a été question des lois de mouvement des corps solides et de leurs applications à leurs mouvements les plus simples. Nous étudierons dans ce chapitre certaines questions de la mécanique des corps solides.

En mécanique on appelle *corps solide* un système invariable de points matériels dont les distances mutuelles restent les mêmes quel que soit le mouvement. Ici et en mécanique classique en général on entend par points matériels non pas des atomes ou des molécules, mais des parties macroscopiquement petites que l'on pourrait obtenir en subdivisant, en pensée, le système mécanique considéré.

D'un point de vue atomistique, les forces d'interaction s'exerçant entre les points matériels d'un corps solide sont des forces *électriques*. Mais la mécanique phénoménologique des corps solides n'a que faire de l'approche atomistique, car elle considère tout corps solide comme un *milieu continu* entre les éléments constitutifs duquel s'exercent des forces intérieures se manifestant sous forme de *contraintes normales et tangentielles* qui résulteraient, selon la mécanique phénoménologique, de la *déformation des corps*. Dans un corps non déformé il ne peut y avoir des contraintes internes, mais si les déformations qui ont été produites par action des forces extérieures sont petites et nous importent peu, nous pouvons les négliger dans nombre de cas. On arrive ainsi à un modèle idéalisé d'un corps solide absolument indéformable, bien que des contraintes et des pressions internes puissent s'y manifester sous l'action des forces extérieures. C'est ce qu'on appelle un corps solide absolument rigide. Pour savoir si cette idéalisation est admissible ou non, il faut prendre en considération non seulement les propriétés des corps réels, mais encore la nature des questions que l'on cherche à élucider.

2. Tout corps solide est un système mécanique à six degrés de liberté (cf. § 8); pour décrire son mouvement on doit donc disposer de six équations analytiques indépendantes ou de deux équations vectorielles indépendantes. Ces équations vectorielles sont l'équation

de mouvement du centre de masse

$$m\frac{dV}{dt}=F_{\text{ext}} \qquad (44.1)$$

et l'équation des moments

$$\frac{dL}{dt}=M_{\text{ext}}. \qquad (44.2)$$

L'équation des moments peut être établie par rapport à tout point fixe ou par rapport au centre de masse du corps solide. On peut également prendre pour origine un point mobile, à condition que sa vitesse soit à tout instant équipollente à la vitesse du centre de masse (cf. § 37). Si la liberté de mouvement du corps est limitée, le nombre d'équations indépendantes requises pour décrire son mouvement diminue, ce nombre étant toujours égal au nombre de degrés de liberté.

Dans les équations (44.1) et (44.2) ne figurent que les forces extérieures puisque les forces intérieures n'influent pas sur le mouvement du centre de masse et ne peuvent donc modifier le moment cinétique du corps. Elles ne peuvent modifier que la disposition mutuelle et les vitesses des points matériels constituant le corps. Ces modifications sont cependant irréalisables dans un corps solide absolument rigide. Par suite les forces intérieures n'affectent aucunement le mouvement d'un corps solide. Dans le cas d'une force extérieure on peut faire glisser son point d'application le long de son support ; en effet, un tel déplacement du point d'application de la force ne modifie ni la résultante des forces extérieures F_{ext}, ni leur moment M_{ext}, et par suite les équations de mouvement (44.1) et (44.2) restent inchangées. Si le corps est déformé, un déplacement du point d'application de la force est inadmissible, car il donnerait lieu à une redistribution des déformations et modifierait les mouvements internes du corps.

3. Si le corps solide est au repos, les équations (44.1) et (44.2) deviennent

$$F_{\text{ext}}=0, \quad M_{\text{ext}}=0. \qquad (44.3)$$

Ce sont les *conditions nécessaires* à l'équilibre d'un corps solide, mais elles ne sont pas suffisantes. Même lorsqu'elles sont satisfaites, le centre de masse peut encore être animé d'un mouvement rectiligne et uniforme avec une vitesse quelconque et le corps lui-même peut être en rotation avec conservation de l'impulsion rotatoire. Puisqu'à l'équilibre la résultante des forces extérieures F_{ext} est nulle, le moment de ces forces M_{ext} ne dépend pas, à l'équilibre, de la position du point fixe O auquel on le rapporte (cf. formule (30.7)). C'est pour cela que dans les problèmes traitant de l'équilibre des corps solides l'origine O peut être choisie arbitrairement, ce qui peut simplifier la résolution de ces problèmes.

4. Même si les déformations sont très petites, il n'est pas toujours possible de substituer aux corps solides réels des modèles idéalisés de corps solides absolument rigides. A titre d'exemple illustrant cette proposition, considérons le problème relatif à l'équilibre d'une poutre rigide. Une poutre homogène de poids P repose sur deux appuis *1* et *2* (fig. 108). Le centre de masse de la poutre se trouve au milieu de la distance séparant les appuis. Déterminons les forces F_1 et F_2 qu'exerce la poutre sur les appuis. Selon la mécanique des solides, il existe deux conditions d'équilibre

$$F_1+F_2=P, \quad F_2 l=P\cdot\frac{l}{2}, \tag{44.4}$$

l étant la distance entre les points d'appui. La seconde condition signifie que le moment des forces agissantes par rapport à l'appui *1* doit être nul. On tire de

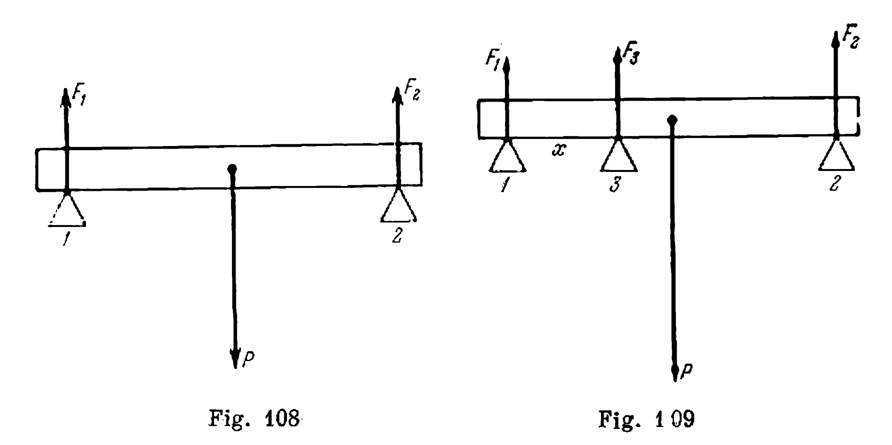


Fig. 108 Fig. 109

ces conditions $F_1 = F_2 = P/2$. C'est un résultat raisonnable. Dans ce problème les déformations de la poutre ne jouent aucun rôle essentiel et on peut avoir recours au modèle idéalisé du corps solide absolument rigide.

Voyons maintenant le comportement d'une poutre reposant sur trois appuis (fig. 109). La mécanique des solides fournit toujours deux conditions d'équilibre:

$$F_1+F_2+F_3=P, \quad F_3x+F_2l=P\frac{l}{2}, \tag{44.5}$$

où l est la distance entre les appuis *1* et *2* et x est la distance entre les appuis *1* et *3*. (La seconde équation (44.5) s'obtient en égalant à zéro le moment des forces extérieures par rapport au point d'appui *1*.) Deux équations ne suffisent évidemment pas au calcul des trois forces inconnues F_1, F_2 et F_3. Si on attribue à l'une de ces forces une valeur arbitraire, les équations (44.5) nous donneront les valeurs des deux autres forces. Nous voyons que le problème de la répartition du poids de la poutre rigide entre trois points d'appui est indéterminé. Les systèmes mécaniques analogues à une poutre rigide reposant sur trois appuis, sont dits ***statiquement indéterminés.***

On retrouve une situation analogue dans le problème concernant l'équilibre d'une table reposant sur un plan horizontal. La mécanique des solides fournit alors, pour définir l'équilibre, trois équations indépendantes. Si la table n'avait que trois pieds, ces trois équations permettraient de calculer de

manière univoque les trois forces avec lesquelles les trois pieds de la table exercent une pression sur le plan d'appui. Mais s'il y a quatre pieds, ces trois équations ne peuvent suffire au calcul des forces de pression. Une table absolument rigide ayant quatre pieds et reposant sur un plan horizontal parfaitement rigide est encore un système statiquement indéterminé.

Il est bien évident que le poids d'une poutre réelle reposant sur trois appuis se répartit entre eux d'une manière bien déterminée. De même la force de pression qu'exerce une table réelle sur ses quatre pieds s'y répartit d'une manière bien déterminée. L'indétermination dont il a été question ci-dessus indique tout simplement que dans nos problèmes ni la poutre reposant sur trois appuis ni la table reposant sur ses quatre pieds *ne peuvent être considérées comme absolument rigides*. Autrement dit, on doit tenir compte de leurs déformations, ainsi que de celles des points d'appui.

5. Un raisonnement simple permet d'expliquer pour quelles raisons les déformations peuvent devenir essentielles à la résolution des problèmes. Supposons qu'une poutre absolument rigide repose sur trois appuis (cf. fig. 109). Déplaçons

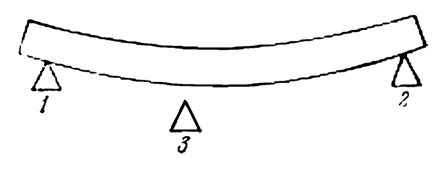


Fig. 110

vers le bas l'appui du milieu. Comme une poutre absolument rigide ne peut se déformer, il apparaît aussitôt un interstice entre la poutre et l'appui *3* qui a été abaissé, de sorte que la poutre n'y reposant plus cesse d'exercer une pression sur cet appui. La force de pression agissant sur l'appui *3* s'annule brusquement et le poids de la poutre se redistribue tout aussi brusquement et d'une façon déterminée entre les appuis *1* et *2*. La même chose se produira si on raccourcit de très peu un des quatre pieds de la table. Mais la situation est tout autre dans le cas d'une poutre et d'une table réelles. Si on abaisse l'appui *3* d'une longueur infiniment petite, la poutre s'affaissera en s'incurvant et continuera à y prendre appui. La force de pression exercée par la poutre sur l'appui *3* ne s'annulera donc pas, mais diminuera d'une quantité infiniment petite. De même lorsque la table repose sur ses quatre pieds, tous les pieds subissent des déformations et raccourcissent sous l'action de la force de pesanteur. Si on raccourcissait l'un des pieds d'aussi peu que ce fût, sa déformation deviendrait plus petite, il deviendrait donc un peu plus long et reprendrait appui sur le plan horizontal. La pression exercée sur ce pied varierait donc d'une quantité infiniment petite, autrement dit cette variation serait continue.

Considérons maintenant une poutre réelle reposant sur deux appuis *1* et *2* (fig. 110). Sous l'action de son propre poids, la poutre s'incurve. Commençons à placer un troisième appui *3* en le haussant petit à petit. Lorsque cet appui viendra en contact avec la poutre, celle-ci ne subira encore aucun changement. Mais si on continue à hausser l'appui *3*, la poutre devrait se redresser; mais il faut pour cela que l'appui applique à la poutre une force suffisante. Au fur et à mesure que l'on hausse l'appui *3*, cette force ne cesse de croître, prenant à chaque position une valeur bien déterminée. Ces considérations montrent clairement pourquoi dans le problème de la poutre avec trois points d'appui on doit tenir compte de ses propriétés élastiques. Ce problème sera traité au chapitre X (problème nº 3 du § 80). Un raisonnement analogue s'applique au problème de la table reposant sur quatre pieds.

§ 45. Axe instantané de rotation

1. Soit un corps solide en rotation autour d'un axe fixe. Pour se faire une idée de la répartition des vitesses dans ce corps, il suffit d'étudier le mouvement de ses points matériels contenus dans un plan arbitraire orthogonal à l'axe de rotation. Cela revient à assimiler le corps solide à un corps plan. La répartition correspondante des vitesses est schématiquement représentée sur la figure 111. Le point

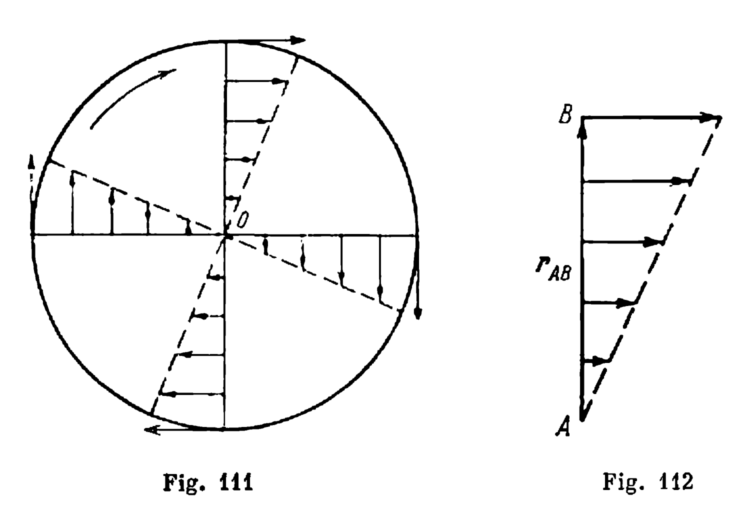


Fig. 111 Fig. 112

O du corps par lequel passe l'axe de rotation est immobile. Tous les autres points décrivent des trajectoires circulaires de centre O et leurs vitesses sont proportionnelles aux rayons de leurs trajectoires. Les vitesses peuvent varier en grandeur dans le temps, mais l'axe de rotation est toujours le même.

2. Considérons maintenant un mouvement plus général d'un corps solide plan. Faisons coïncider le plan de rotation avec le plan du corps; on n'envisage l'existence d'aucun axe fixe autour duquel tournerait le corps. Si A et B sont deux points arbitraires du corps solide (fig. 112), la distance entre eux reste constante et par suite $(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)^2 =$ const. Dérivons cette relation par rapport au temps, nous obtenons $(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)(\dot{\mathbf{r}}_B - \dot{\mathbf{r}}_A) = 0$, soit

$$\mathbf{r}_{AB}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) = 0, \tag{45.1}$$

où $\mathbf{r}_{AB} \equiv \overrightarrow{AB}$. Supposons qu'il existe dans le corps, à l'instant considéré, un point dont la vitesse est nulle. (Nous démontrerons au § 47 qu'un tel point existe pour tout mouvement plan d'un corps solide.) Supposons qu'il s'agit du point A. On aura alors à l'instant

considéré :

$$r_{AB}v_B = 0,$$

et ce, quelle que soit la position du point B. La vitesse v_B est donc orthogonale à r_{AB}, c'est-à-dire qu'elle est dirigée suivant la tangente au cercle de centre A. Lorsqu'un corps solide est en mouvement, toute droite qu'on y choisit reste une droite. C'est le cas de la droite reliant les points A et B. Puisqu'à l'instant considéré le point A est immobile, la valeur de la vitesse v_B est à cet instant proportionnelle à la distance AB séparant le point B du point A. On peut donc affirmer qu'*à l'instant considéré la répartition instantanée des vitesses dans le corps sera exactement la même que s'il était en rotation autour d'un axe fixe passant par le point A*. Le mouvement du corps est alors appelé *mouvement de rotation instantané*. La droite passant par les points du corps dont les vitesses sont nulles à l'instant considéré est appelée *axe instantané de rotation*. Dans notre exemple l'axe instantané passe par le point A. Le qualitatif « instantané » précise que cette notion ne convient à la description de la répartition des vitesses qu'à *un instant donné*. A la différence d'un axe fixe dont la position est immuable dans l'espace et dans le corps, l'*axe instantané se déplace, lui, aussi bien dans le corps que dans l'espace*. Si on disposait d'une photographie instantanée de la répartition des vitesses dans un corps, l'image qu'on y trouverait ne permettrait pas de décider si la rotation s'effectue autour d'un axe fixe ou autour d'un axe instantané. Pour distinguer l'un de l'autre ces deux mouvements, on devrait obtenir au moins deux photographies prises à deux instants différents.

3. *L'axe instantané ne peut servir qu'à la description de la répartition instantanée des vitesses*. Le même axe ne peut servir à la description de la répartition instantanée des accélérations ou des dérivées supérieures de la vitesse par rapport au temps. La répartition des accélérations dans une rotation autour d'un axe instantané peut différer largement de la répartition des accélérations dans une rotation autour d'un axe fixe même si les vitesses angulaires de ces deux mouvements sont les mêmes. En effet, pour déterminer les accélérations, la connaissance de la répartition des vitesses à un instant donné ne peut suffire et il faut connaître encore quelle sera la répartition des vitesses à un instant ultérieur, infiniment proche du précédent. Or, à cet instant ultérieur il peut s'avérer que le mouvement du corps n'est plus une rotation autour de l'ancien axe instantané.

L'exemple simple suivant aidera à bien éclaircir le fond de l'affaire. Considérons le roulement sans glissement d'un cerceau ou d'un disque sur un plan (fig. 113). Dire qu'il n'y a pas de glissement, c'est dire que le point A du cerceau, qui à l'instant considéré est en contact avec le plan, est immobile. On peut donc considérer le mouvement du cerceau comme une rotation instantanée autour de son axe instantané passant par le point A. La figure 113 illustre la ré-

partition des vitesses dans ce mouvement. Aux instants ultérieurs d'autres points du cerceau viendront en contact avec le plan de roulement et de ce fait l'axe instantané de rotation se déplacera par rapport au cerceau mobile et au plan de roulement. C'est bien ce qu'affirmait la proposition énoncée disant que l'axe instantané se déplace aussi bien dans le corps que dans l'espace. Supposons maintenant que le roulement s'effectue à vitesse constante. On commettrait

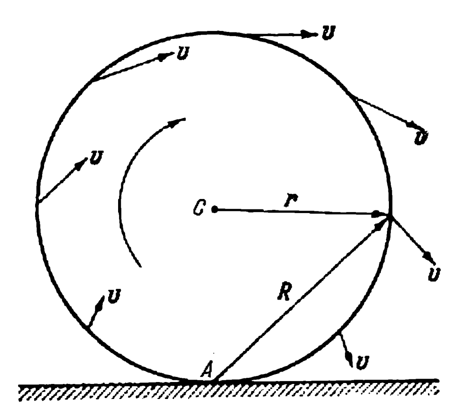


Fig. 113

une erreur grossière en voulant calculer l'accélération par la formule $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{R}$, où $\boldsymbol{R}$ est le rayon vecteur reliant l'axe instantané au point considéré du cerceau. En effet, la vitesse résultante $\boldsymbol{v}$ de n'importe quel point du cerceau est égale à la somme vectorielle de la vitesse de translation $\boldsymbol{v}_C$ du centre C du cerceau et de la vitesse de rotation $\boldsymbol{v}_{\text{rot}}$ du point considéré par rapport au centre C : $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{\text{rot}}$. Si le roulement du cerceau est uniforme, on a $\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = 0$ et l'accélération sera $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}_{\text{rot}}}{dt}$. Le mouvement de translation est sans action sur l'accélération $\boldsymbol{a}$ dont la valeur est la même que si la rotation s'effectuait autour d'un centre fixe, i.e. $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}$ étant le rayon vecteur passant par le centre du cerceau O. Ainsi pour un roulement uniforme l'accélération $\boldsymbol{a}$ est dirigée vers le centre du cerceau et non vers l'axe instantané.

§ 46. La vitesse angulaire considérée comme vecteur. Composition des mouvements de rotation

1. Soit un corps solide tournant autour d'un axe fixe ou d'un axe instantané OA à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ (fig. 114). Choisissons un point arbitraire M de ce corps se trouvant à une distance $r_\perp$ de l'axe

de rotation. Les vitesses linéaire et angulaire du point M sont liées entre elles par la relation

$$v = \omega r_{\perp}. \tag{46.1}$$

Introduisons un vecteur axial $\boldsymbol{\omega}$ défini par le produit vectoriel

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{[\boldsymbol{r}_{\perp}\boldsymbol{v}]}{r_{\perp}^2}, \tag{46.2}$$

où $\boldsymbol{r}_{\perp}$ est le rayon vecteur mené perpendiculairement à l'axe de rotation au point M. D'après la relation (46.1) la longueur de ce vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est numériquement égale à la vitesse angulaire de rotation

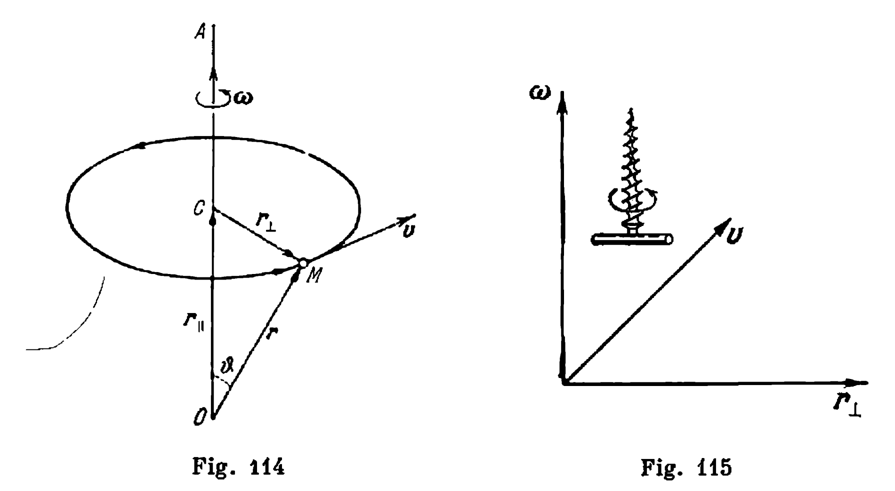


Fig. 114 Fig. 115

et sa direction est celle de l'axe de rotation. Les positions relatives des vecteurs $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{r}_{\perp}$ et $\boldsymbol{v}$ apparaissent plus clairement en les menant à partir d'une origine commune (fig. 115). Ces trois vecteurs sont orthogonaux et il ressort de la figure 115 que

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}_{\perp}]. \tag{46.3}$$

Cette formule est la généralisation de la formule (46.1) puisqu'elle définit, en plus de la valeur de la vitesse v, sa direction et son sens. On appelle le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ *vecteur vitesse angulaire* ou plus simplement *vitesse angulaire de rotation*. Ainsi *on peut considérer la vitesse angulaire comme une grandeur vectorielle*. Si on dispose un tire-bouchon normal parallèlement à l'axe de rotation et si on le fait tourner dans le même sens que celui du corps en rotation, il avancera dans le même sens que le vecteur $\boldsymbol{\omega}$.

On peut mettre la formule (46.3) sous une forme plus générale et plus commode. Prenons sur l'axe de rotation un point arbitraire O que l'on adoptera comme origine des coordonnées (cf. fig. 114).

Le rayon vecteur r mené de cette origine au point M peut alors être présenté par la somme vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\perp + \boldsymbol{r}_\parallel$, où $\boldsymbol{r}_\parallel$ est la composante du vecteur r le long de l'axe de rotation. Comme $[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}_\parallel] = 0$, on peut remplacer la formule (46.3) par la formule plus générale

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]. \tag{46.4}$$

On en déduit que $v = \omega r \sin \vartheta$; c'est la même formule que (46.1) puisque $r \sin \vartheta = r_\perp$.

2. *Il n'est nul besoin de démontrer que* $\boldsymbol{\omega}$ *est une grandeur vectorielle, puisque nous l'avons définie comme le produit vectoriel de deux vecteurs. Dire que* $\boldsymbol{\omega}$ *est une grandeur vectorielle ne peut évidemment signifier qu'une seule chose: à la rotation des systèmes de coordonnées les projections de* $\boldsymbol{\omega}$ *sur les axes se transforment exactement comme les différences des coordonnées des extrémités d'un segment de droite orienté.* On peut faire subir aux vecteurs vitesse angulaire toutes les opérations mathématiques applicables aux vecteurs en général. On peut notamment faire la somme mathématique des vecteurs $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$ en appliquant la règle du parallélogramme. Mais si on définit l'addition des vitesses angulaires à l'aide d'une certaine opération physique, la question ne peut être tranchée qu'après une analyse du problème. Introduisons la notion d'*addition* (*composition*) *des mouvements de rotation* en lui attribuant la signification suivante. Soit un corps tournant à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_1$ autour d'un axe OA qui est lui-même en rotation à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_2$ autour d'un second axe OB (fig. 116). Remarquons qu'*il s'agit dans le cas général de rotations instantanées à des vitesses non relativistes.* La première rotation est rapportée à un référentiel où (à l'instant considéré) l'axe OA est immobile; on rapporte la seconde rotation à un autre référentiel dans lequel (au même instant) l'axe OB est immobile. Composer ces deux mouvements de rotation revient à définir le mouvement résultant. Pour faciliter la résolution de ce problème, nous prendrons le cas où les axes OA et OB se coupent, car alors il s'agit de l'addition de deux vitesses linéaires ayant des significations physiques analogues (cf. § 7; en mécanique non relativiste l'addition des vitesses linéaires s'effectue par la règle du parallélogramme). Un point quelconque M du corps solide de rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ acquiert par rotation autour de l'axe OA une vitesse linéaire $\boldsymbol{v}_1 = [\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{r}]$ et par rotation autour de l'axe OB une vitesse linéaire $\boldsymbol{v}_2 = [\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{r}]$. La vitesse linéaire résultante est

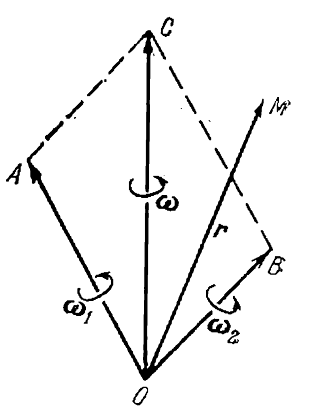


Fig. 116

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = [(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)\,\boldsymbol{r}].$$

Si on introduit la somme vectorielle dans le sens mathématique du terme

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \tag{46.5}$$

le résultat ci-dessus s'écrira

$$v = [\omega r]. \tag{46.6}$$

Plaçons le point M sur l'axe portant le vecteur ω, donc sur la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs ω_1 et ω_2 ou sur le prolongement de cette diagonale. On a alors $v = 0$. A l'instant considéré tous les points de cet axe sont au repos. La raison en est que tous les points de cet axe se meuvent dans le premier

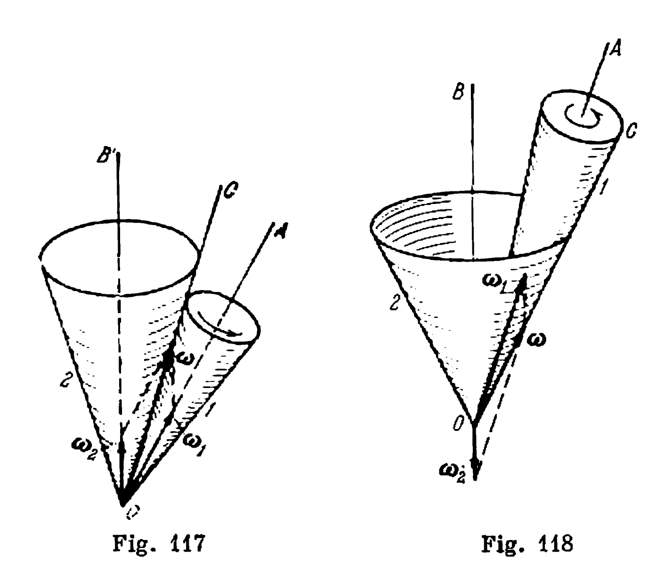


Fig. 117 Fig. 118

mouvement de rotation dans un sens et dans le second mouvement de rotation dans le sens inverse, de sorte que la vitesse linéaire résultante est nulle. Tous les autres points du corps solide tournent autour de l'axe du vecteur ω avec la vitesse angulaire ω. La vitesse linéaire instantanée de n'importe quel point du corps se laisse calculer par la formule (46.6). Cela signifie que *le mouvement instantané résultant du corps solide est une rotation autour de l'axe instantané OC*. Dans le cas général, cet axe se déplace constamment par rapport au corps solide et par rapport au référentiel immobile dans lequel on étudie le mouvement.

Nous avons démontré ainsi que *deux rotations à vitesses angulaires* ω_1 et ω_2 *se composent* (dans le sens physique que nous avons précisé) *pour donner un seul mouvement de rotation à vitesse angulaire* $\omega =$

$= \omega_1 + \omega_2$ *autour d'un axe instantané. L'axe instantané est à chaque instant dirigé suivant la diagonale du parallélogramme construit avec les vecteurs* ω_1 et ω_2. *L'addition de ces vecteurs s'effectue donc d'après la règle du parallélogramme.* La composition physique est dans ce cas identique à l'addition mathématique.

3. Illustrons ces considérations par un exemple concret. Sur la surface d'un cône circulaire immobile *2* roule sans glissement un second cône circulaire *1* (fig. 117 et 118). A tout instant les sommets des deux cônes sont confondus au point O. Dans ce mouvement le cône *1* tourne autour de son propre axe OA à la vitesse angulaire ω_1. L'axe OA décrit lui-même une surface conique en tournant à la vitesse angulaire ω_2 autour de l'axe OB. Il s'agit de composer ces deux mouvements de rotation. Puisqu'il n'y a pas de glissement, tous les points du corps situés sur la droite OC, le long de laquelle s'effectue le contact des deux corps, sont immobiles. La tangente OC est donc l'axe instantané de rotation du cône *1*. L'axe instantané de rotation se déplace sur la surface du cône *1* et simultanément dans l'espace, en l'occurrence sur la surface du cône *2*.

4. La rotation autour d'axes parallèles peut être considérée comme le cas limite de rotations autour d'axes concourants. On doit

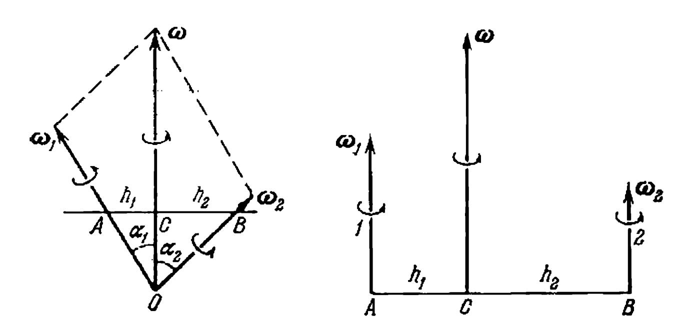


Fig. 119

alors distinguer deux cas: 1) les rotations sont de même sens; 2) les rotations sont de sens contraires. Considérons le premier cas. Construisons avec les vecteurs ω_1 et ω_2 un parallélogramme et coupons-le par une droite ACB perpendiculaire au vecteur ω (fig. 119, à gauche). On a alors $h_1 = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$, $h_2 = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$. Si les angles α_1 et α_2 sont petits, on peut remplacer leurs tangentes par leurs sinus:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{46.7}$$

En faisant tendre le point O vers l'infini, nous arrivons alors au cas limite de deux rotations de même sens autour d'axes parallèles (fig. 119, à droite). Ces deux rotations se composent en un seul mouvement de rotation à vitesse angulaire $\omega = \omega_1 + \omega_2$ autour de l'axe instantané. Cet axe instantané passe entre les axes *1* et *2* et partage

la distance entre eux en proportions inverses des vitesses angulaires ω_1 et ω_2.

L'étude du cas où les vecteurs $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$ sont opposés se fait de manière analogue. Si $\omega_1 > \omega_2$, on a $\omega = \omega_1 - \omega_2$. L'axe instantané se situe au dehors du segment de droite AB, du côté de la plus grande vitesse angulaire (fig. 120). Cet axe instantané détermine les distances h_1 et h_2 dont les longueurs sont inversement proportionnelles aux vitesses angulaires ω_1 et ω_2.

5. Il nous reste à étudier la composition d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation. Si le mouvement de

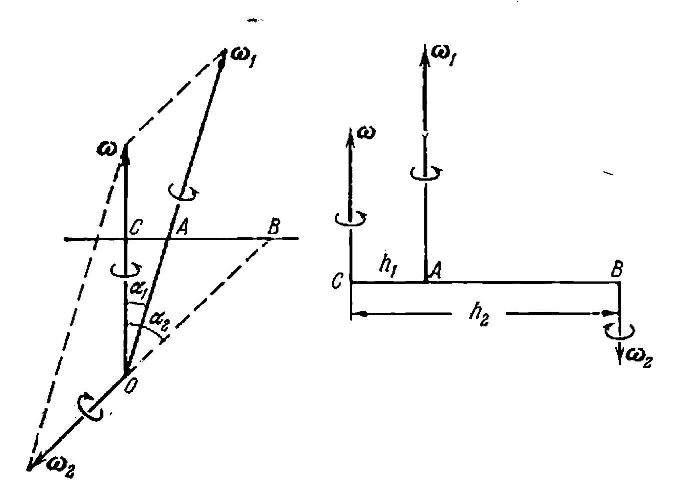


Fig. 120

translation est parallèle à l'axe de rotation, leur composition donne évidemment un *mouvement hélicoïdal.* Il suffit donc de considérer le cas où le mouvement de translation est perpendiculaire à l'axe de rotation. Dans ce cas tous les points du corps se déplaceront parallèlement à un seul et même plan orthogonal à un même axe. Un tel mouvement est dit *plan.* On peut prendre pour plan de la figure le plan parallèlement auquel a lieu le mouvement. Le mouvement de translation peut être considéré comme une rotation autour d'un axe infiniment éloigné, ce qui permet de ramener le cas étudié à la composition de deux rotations autour d'axes parallèles dont l'un est à l'infini. Il est bien évident que le résultat ne peut être qu'une rotation autour d'un axe instantané et le problème consiste donc à déterminer la position de l'axe instantané et la vitesse angulaire de la rotation instantanée. Posons que le corps tourne avec la vitesse angulaire ω autour de l'axe O qui tourne lui-même autour d'un axe parallèle fixe O_1 avec la vitesse angulaire ω_1 (fig. 121). Par composi-

tion de ces deux mouvements apparaît une rotation autour de l'axe instantané A qui est telle que

$$\frac{h}{h_1}=\frac{\omega_1}{\omega}$$

L'axe O tournant autour de l'axe O_1 acquiert une vitesse $v = \omega_1 (h + h_1)$ qui est perpendiculaire à la droite O_1O. Déplaçons l'axe O_1 vers l'infini en réduisant simultanément ω_1 de manière que la vitesse v reste constante. A la limite la rotation de l'axe O autour de l'axe O_1 devient un mouvement de translation à la vitesse v. La position de l'axe instantané de rotation A est déterminée par sa distance à l'axe O qui est égale à

$$h=\frac{h_1\omega_1}{\omega}=\frac{(h_1+h)\,\omega_1-h\omega_1}{\omega}=\frac{v-h\omega_1}{\omega}$$

D'où

$$h\left(1+\frac{\omega_1}{\omega}\right)=\frac{v}{\omega}.$$

Comme $\omega_1 \to 0$ on obtient à la limite

$$h=\frac{v}{\omega}. \qquad (46.8)$$

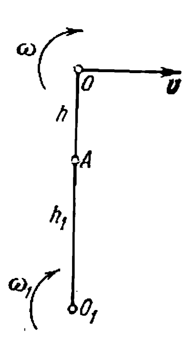


Fig. 121

A la limite la vitesse angulaire de la rotation instantanée devient égale à ω.

6. En dérivant le vecteur axial $\boldsymbol{\omega}$ par rapport à un argument scalaire, tel que le temps t, on obtient un autre vecteur axial $\boldsymbol{\eta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ qui porte le nom d'*accélération angulaire* (cf. § 7). Par définition ses projections sur les axes de coordonnées sont: $\eta_x = \frac{d\omega_x}{dt}$, $\eta_y = \frac{d\omega_y}{dt}$, $\eta_z = \frac{d\omega_z}{dt}$. En intégrant $\boldsymbol{\omega}$ par rapport à t on obtient un autre vecteur axial $\boldsymbol{\varphi} = \int \boldsymbol{\omega}\, dt$ dont les composantes sont $\varphi_x = \int \omega_x\, dt$, $\varphi_y = \int \omega_y\, dt$, $\varphi_z = \int \omega_z\, dt$. Le caractère vectoriel (ou plus exactement pseudo-vectoriel) de ces grandeurs signifie que si on fait tourner le système de coordonnées d'un certain angle, leurs composantes se transforment comme les différences des coordonnées des extrémités d'un segment de droite orienté (ce qui n'est pas vrai pour une inversion du système de coordonnées). Si la direction de l'axe de rotation ne varie pas dans le temps, le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ est parallèle à $\boldsymbol{\omega}$, donc dirigé suivant l'axe de rotation. Sa longueur est numériquement égale à l'angle de rotation du corps dans un intervalle de temps donné. Il est par conséquent tout indiqué de l'appeler *vecteur rotation angulaire du corps*. La grandeur de la rotation angulaire est

proportionnelle à l'aire du secteur OAB que décrit un segment de droite OA orthogonal à l'axe de rotation lorsqu'on le fait passer de sa position initiale OA dans sa position finale OB (fig. 122). La direction de φ est celle de la normale au plan du secteur OAB et ses composantes φ_x, φ_y, φ_z sont proportionnelles aux aires des projections de ce secteur sur les plans de coordonnées. C'est une preuve supplémentaire du caractère vectoriel de la grandeur φ (cf. § 7).

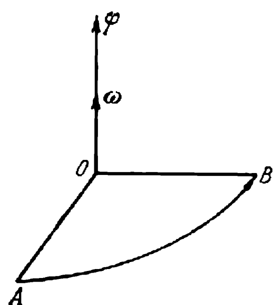


Fig. 122

7. En reprenant l'exemple des rotations angulaires d'un corps on peut montrer de façon évidente qu'il est réellement nécessaire de faire une distinction rigoureuse entre l'*addition mathématique* des vecteurs (définie axiomatiquement par la règle du parallélogramme) et leur *addition* (*composition*) *physique*, introduite par une certaine opération physique. Introduisons la composition physique des déplacements angulaires en leur attribuant la même signification que dans le cas de la composition physique des déplacements linéaires (cf. § 7, pt. 6). Soit un point matériel effectuant successivement des rotations autour des différents axes passant par le même point fixe O (fig. 123). Au cours de ces rotations le point matériel décrit des arcs de grands cercles sur la surface d'une sphère de centre O. Posons que le point matériel passe de sa position initiale A dans sa

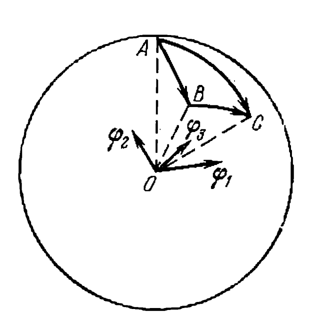


Fig. 123

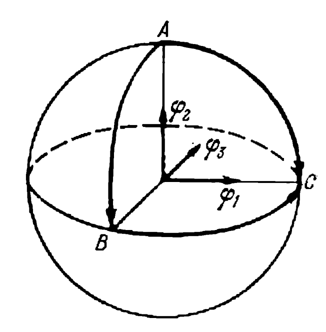


Fig. 124

position finale B le long de l'arc du grand cercle AB. Son rayon vecteur aura tourné alors d'un angle φ_1. Le point matériel tourne ensuite d'un angle φ_2 en passant sur l'arc de grand cercle BC de la position B dans la position C. Il s'agit maintenant de trouver la rotation qui remplacerait les deux rotations indiquées et ferait passer le point matériel de sa position initiale A à la même position finale C. Il est clair que ce doit être une rotation du point suivant un arc de

grand cercle passant par les points A et C. Soit φ_3 cet angle de rotation. D'après ce que nous en avons dit plus haut, les trois rotations considérées peuvent être caractérisées par les vecteurs $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$, $\boldsymbol{\varphi}_3$ orthogonaux respectivement aux plans des secteurs OAB, OBC et OAC. On peut dire que la rotation $\boldsymbol{\varphi}_3$ est la somme des rotations $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ dans la signification physique de ce terme. Il est bien évident que cette opération d'addition n'obéit pas à la règle du parallélogramme puisque dans le cas général le vecteur $\boldsymbol{\varphi}_3$ n'est pas coplanaire aux vecteurs $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$.

Cette proposition devient encore plus évidente si on prend le cas particulier suivant. Choisissons comme position initiale du point matériel le pôle A (fig. 124). En suivant l'arc du méridien AB effectuons une rotation $\varphi_1 = 90°$ pour faire passer le point dans la

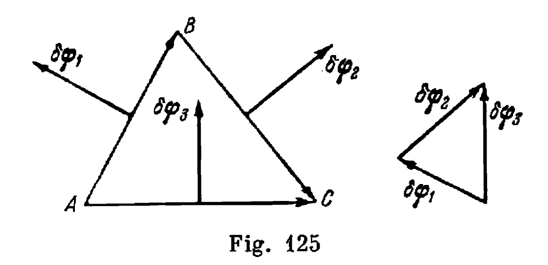


Fig. 125

position B sur l'équateur. Nous exécuterons une deuxième rotation d'un angle $\varphi_2 = 90°$ suivant l'arc de l'équateur BC. Il est clair que la troisième rotation d'un angle $\varphi_3 = 90°$ doit être exécutée suivant l'arc du méridien AC. Dans cet exemple les trois vecteurs $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$, $\boldsymbol{\varphi}_3$ sont orthogonaux et ont même grandeur et aucun d'eux ne peut être somme géométrique des deux autres.

Si φ_x, φ_y, φ_z sont les projections du vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ sur les axes de coordonnées, on a $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x \boldsymbol{i} + \varphi_y \boldsymbol{j} + \varphi_z \boldsymbol{k}$. Cette sommation est mathématique (règle du parallélogramme). Il apparaît de nos considérations précédentes que les termes $\varphi_x \boldsymbol{i}$, $\varphi_y \boldsymbol{j}$, $\varphi_z \boldsymbol{k}$ ne peuvent être considérés comme des rotations successives autour des axes de coordonnées, équivalentes à une seule rotation caractérisée par le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$.

8. Supposons cependant que les angles φ_1, φ_2, φ_3 tendent infiniment vers zéro. Le triangle sphérique ABC (cf. fig. 123) devient alors infiniment petit et peut être assimilé au triangle plan (fig. 125). Les arcs AB, BC, AC des grands cercles peuvent être assimilés à des segments de droites. Les vecteurs déplacement angulaire $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$ se trouvent dans le plan du triangle ABC. (Nous écrivons $\delta\boldsymbol{\varphi}$ et non pas $\boldsymbol{\varphi}$ pour souligner qu'il s'agit d'angles infiniment petits.) Ces vecteurs sont évidemment perpendiculaires aux côtés AB, BC et AC et leurs grandeurs sont proportionnelles aux longueurs de ces

côtés (cf. fig. 125). Il s'ensuit que le vecteur infiniment petit $\delta\varphi_3$ est la somme géométrique des vecteurs $\delta\varphi_1$ et $\delta\varphi_2$. Cela signifie que l'*on somme géométriquement les déplacements angulaires infiniment petits* (dans la signification physique invoquée), i.e. *selon la règle du parallélogramme*. Autrement dit, *la sommation physique des déplacements angulaires se ramène à la limite où les angles sont infiniment petits à une sommation mathématique.*

PROBLÈMES

1. Démontrer que le travail élémentaire effectué sur un système de points matériels lors de sa rotation d'un angle infiniment petit $\delta\varphi$ s'exprime par le produit scalaire

$$\delta A = (M\delta\varphi), \tag{46.9}$$

où M est la somme géométrique des moments des forces agissant sur les points matériels, par rapport au sommet de l'angle de rotation.

S o l u t i o n. $\delta A = \Sigma\ (F_i \delta r_i)$. La sommation est étendue à tous les points du système. Pour une rotation $\delta r_i = [\delta\varphi r_i]$, l'angle $\delta\varphi$ étant le même pour tout le système. En portant cette expression dans la formule précédente et en remarquant que $F_i\ [\delta\varphi r_i] = \delta\varphi\ [r_i F_i] = (M_i \delta\varphi)$ nous arrivons au résultat cherché.

2. A l'aide du concept d'isotropie de l'espace, démontrer que la somme géométrique des moments des forces intérieures agissant dans un système de points matériels est nulle (voir § 38).

S o l u t i o n. Supposons que le système est fermé. Soient M_1, M_2, . . . les moments des forces intérieures par rapport à une origine O arbitraire et fixe auxquels sont soumis les points matériels du système. Faisons tourner tout le système autour du point O d'un angle infiniment petit $\delta\varphi$ de telle manière que les vitesses de tous les points matériels subissent une rotation du même angle $\delta\varphi$ sans que leurs modules changent. L'espace étant isotrope, une telle rotation ne nécessite aucun travail. Mais comme un tel travail se laisse représenter par le produit scalaire $(M_1 + M_2 + \ldots)\ \delta\varphi$ et que ce travail est nul, ce produit scalaire doit être nul quelle que soit la rotation $\delta\varphi$. Il s'ensuit que pour un système fermé $M_1 + M_2 + \ldots = 0$.

3. Un vecteur A de module constant tourne autour de son origine avec une vitesse angulaire ω. Montrer que sa dérivée par rapport au temps est donnée par la formule

$$\dot{A} = [\omega A]. \tag{46.10}$$

En particulier, lors de la rotation du système de coordonnées, les dérivées des vecteurs unitaires i, j, k sont données par les formules

$$\frac{di}{dt} = [\omega i], \quad \frac{dj}{dt} = [\omega j], \quad \frac{dk}{dt} = [\omega k]. \tag{46.11}$$

S o l u t i o n. On peut identifier tout vecteur A de longueur constante à une tige rigide infiniment mince de même longueur. Si l'origine du vecteur A est fixe, la dérivée $\dot{A}$ prend la signification de la vitesse de l'extrémité mobile de la tige. Dans cette interprétation la formule (46.10) devient un cas particulier de la formule (46.4).

4. Le mouvement d'un point sur un plan peut être décrit par les coordonnées polaires r et φ (fig. 126). Trouver les expressions de la vitesse et de l'accélération du point en coordonnées polaires.

S o l u t i o n. Introduisons les vecteurs unitaires i, j, k. Orientons le vecteur i suivant le rayon r. Le vecteur j est dirigé suivant la normale au rayon dans

le sens de l'accroissement de l'angle φ. Le vecteur $\boldsymbol{k}$ (non représenté sur la figure) est perpendiculaire au plan du dessin et forme avec les deux autres vecteurs un trièdre de sens direct. Lorsque le point se déplace, les vecteurs $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ tournent autour de l'origine des coordonnées avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$. Le vecteur vitesse angulaire est orienté suivant $\boldsymbol{k}$, de sorte que $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$. A l'aide des formules (46.11) on trouve les dérivées de $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$:

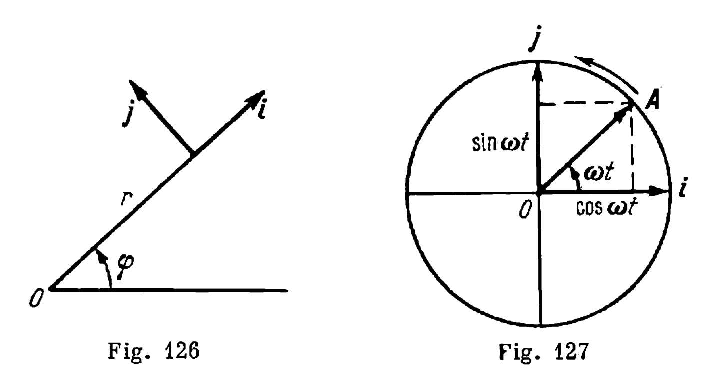


Fig. 126 Fig. 127

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \dot{\varphi}\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}] = \dot{\varphi}\boldsymbol{j}, \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \dot{\varphi}\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{j}] = -\dot{\varphi}\boldsymbol{i}. \tag{46.12}$$

Représentons le rayon vecteur du point mobile sous la forme $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}$. Par dérivation on trouve la vitesse du point

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{i} + r\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \dot{r}\boldsymbol{i} + r\dot{\varphi}\boldsymbol{j}.$$

Puis en dérivant encore une fois on trouve l'accélération

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{r}\,\boldsymbol{i} + r\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\boldsymbol{j} + \dot{r}\dot{\varphi}\boldsymbol{j} + r\dot{\varphi}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} =$$
$$= (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)\,\boldsymbol{i} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\boldsymbol{j}.$$

Ces formules donnent directement les composantes radiales (dirigées suivant le rayon) et azimutales (dirigées suivant le vecteur $\boldsymbol{j}$, i.e. dans le sens des angles φ croissants) de la vitesse et de l'accélération:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}; \tag{46.13}$$

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \tag{46.14}$$

5. A l'aide de la relation (46.10) établir des formules de dérivation du sinus et du cosinus.

Solution. Prenons un vecteur unitaire $\boldsymbol{A}$ en rotation uniforme autour de l'origine des coordonnées O (fig. 127). Si les axes de coordonnées sont fixes, on aura

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\sin\omega t.$$

La dérivée de $\boldsymbol{A}$ par rapport à t est

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{i}\,\frac{d}{dt}(\cos\omega t) + \boldsymbol{j}\,\frac{d}{dt}(\sin\omega t).$$

D'autre part, cette même dérivée se laisse exprimer par la formule (46.10). Puisque $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$, cette formule donne

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \omega [\boldsymbol{kA}] = \omega \cos \omega t [\boldsymbol{ki}] + \omega \sin \omega t [\boldsymbol{kj}] = \boldsymbol{j}\omega \cos \omega t - \boldsymbol{i}\omega \sin \omega t.$$

En comparant les deux résultats, on trouve

$$\frac{d}{dt}(\sin \omega t) = \omega \cos \omega t, \quad \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = -\omega \sin \omega t.$$

On peut donc dire que la formule vectorielle (46.10) équivaut aux règles de dérivation du sinus et du cosinus.

§ 47. Théorème d'Euler. Mouvement général d'un solide

1. Considérons le *mouvement plan* d'un corps solide, i.e. un mouvement tel que tous les points du corps se meuvent parallèlement à un plan. Sans restreindre la généralité on peut considérer que ce corps mobile est lui-même plan (mouvement plan sur plan). La position du corps plan mobile est définie de façon univoque par la donnée des positions de deux de ses points. Il suffit donc d'étudier le mouvement d'une droite quelconque d'un corps plan. Soit une droite du solide qui passe de la position AB dans la position A_1B_1 (fig. 128). Relions les points A et A_1 et B et B_1. Du milieu des segments AA_1 et BB_1 dressons les normales EO et DO qui se coupent au point O. Nous allons démontrer que l'on peut faire passer le segment de droite AB dans la position A_1B_1 en effectuant une rotation autour du point O. La construction de la figure 128 montre que le point O se trouve à égale distance des points A et A_1 et des points B et B_1. On peut donc soumettre la droite AB à une rotation autour du point O telle que le point A coïncide avec le point A_1. Nous allons démontrer que le point B viendra alors en coïncidence avec le point B_1. Supposons que le point B ne coïncide pas avec le point B_1 mais vient se placer en B_2. Il est évident que le point B_2 doit se trouver à la même distance de O que le point B_1 et par conséquent $OB_1 = OB_2$. En outre les triangles OA_1B_1 et OA_1B_2 ont le côté OA_1 commun et les côtés A_1B_1 et A_1B_2 sont égaux puisque, le corps étant solide, la distance entre les extrémités du segment de droite AB ne peut varier lors de son mouvement. Il s'ensuit que les triangles OA_1B_1 et OA_1B_2 sont égaux et que $\angle OA_1B_1 = \angle OA_1B_2$, ce qui signifie que les points B_2 et B_1 sont confondus.

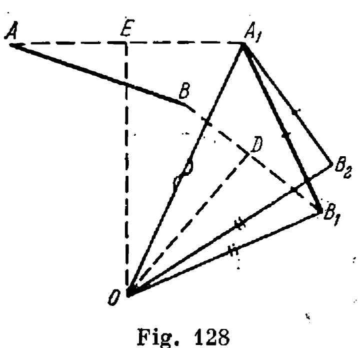


Fig. 128

Ainsi *tout corps solide se déplaçant parallèlement à un plan fixe peut passer d'une position arbitraire dans une autre en effectuant une*

rotation autour d'un certain axe. Cette proposition est un cas particulier du *théorème d'Euler* (1707-1783) que nous démontrerons ci-dessous.

Un mouvement plan arbitraire peut être décomposé en une suite de déplacements élémentaires. On obtient ainsi une série de positions *1*, *2*, *3*, *4*,. . . infiniment proches les unes des autres, que le corps occupe successivement. Selon le théorème énoncé, pour passer de la position *1* à la position *2* il suffit de faire tourner le corps auautour d'un certain axe O_1; de même pour le faire passer de *2* à *3* on le fera tourner autour d'un autre axe O_2 infiniment proche du premier, et ainsi de suite. Si on fait tendre vers l'infini le nombre des positions intermédiaires *1*, *2*, *3*, . . . et vers zéro les déplacements successifs du corps, *tout mouvement plan d'un solide peut être considéré comme une rotation autour d'un axe instantané se déplaçant dans le corps et dans l'espace.*

2. Le *théorème d'Euler* s'énonce de manière analogue: *Tout corps solide dont un point est fixe peut passer d'une position arbitraire dans une autre par rotation autour d'un axe passant par ce point fixe.* La démonstration du théorème d'Euler se fait exactement de la même façon que celle du théorème relatif au mouvement plan sur plan. Si un point C du solide est fixe, sa position est univoquement définie par l'indication de la position de deux points A et B qui ne se trouvent pas sur la même droite que le point C. Ces points A et B peuvent être pris sur la surface d'une sphère de centre C. Menons par les points A, B et C un plan coupant la sphère suivant l'arc de grand cercle AB. (Voir fig. 128. Nous ne représentons pas spécialement la sphère et les arcs des grands cercles, mais utilisons la représentation plane en remplaçant en pensée les segments de droite par des arcs de grands cercles. Il est clair qu'on ne pourrait représenter le centre d'une sphère C sur un dessin à deux dimensions.) Le mouvement de l'arc AB sur la surface de la sphère définit univoquement celui du corps solide tout entier. Supposons que l'arc choisi passe de la position AB dans la position A_1B_1. Relions par des arcs de grands cercles les points A et A_1 et les points B et B_1. Par les milieux E et D de ces arcs menons des arcs de grands cercles EO et DO normaux aux précédents et se coupant en un point O de la sphère. Relions le point O au centre C de la sphère par la droite OC. Démontrons que l'on peut faire passer l'arc AB en position A_1B_1 par une rotation autour de l'axe CO. En effet, comme les points A et A_1 et les points B et B_1 se trouvent à la même distance du point O, on peut faire tourner le corps solide autour de l'axe CO de manière à faire passer le point A dans la position A_1. Il reste à démontrer que par cette même rotation le point B viendra se placer en B_1. Supposons que par rotation le point B vienne non pas en B_1 mais dans une position B_2. Traçons les arcs de grands cercles OA_1, A_1B_2 et OB_2. Comme le point B_2 se trouve à la même distance

du point O que le point B, on a $\cup OB_1 = \cup OB_2$. D'autre part, dans les triangles sphériques OA_1B_1 et OA_1B_2 l'arc OA_1 est commun et les arcs A_1B_1 et A_1B_2 sont égaux puisque, le corps étant rigide, la longueur de l'arc AB ne peut varier par suite de ses déplacements. Ces triangles sont donc égaux et $\angle OA_1B_1 = \angle OA_1B_2$; le point B_1 est donc confondu avec B_2, ce qui démontre le théorème d'Euler.

Le théorème que nous avons démontré au début de ce paragraphe est un cas particulier du théorème d'Euler, puisqu'un mouvement plan sur plan peut être considéré comme un cas limite de mouvement sur la surface d'une sphère de rayon infiniment grand.

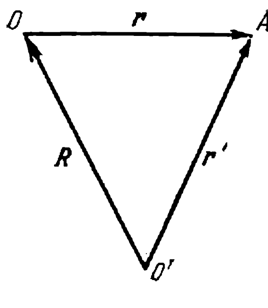


Fig. 129

En raisonnant de la même façon que dans le cas du mouvement plan on peut tirer du théorème d'Euler la conséquence suivante. *Tout mouvement d'un corps solide ayant un point fixe peut être considéré comme une rotation autour d'un axe instantané passant par ce point fixe. Avec le temps cet axe instantané se déplace en général aussi bien dans le corps que dans l'espace.*

3. Examinons maintenant le cas le plus général de mouvement d'un corps solide. Prenons dans le corps un point arbitraire O. Tout mouvement d'un solide peut être décomposé en une translation de vitesse $\boldsymbol{v}_0$ égale à celle du point O et en une rotation autour d'un axe instantané passant par le point O. En désignant par $\boldsymbol{\omega}$ le vecteur vitesse angulaire de la rotation instantanée, nous pouvons écrire pour la vitesse de tout autre point A du solide

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + [\boldsymbol{\omega r}], \tag{47.1}$$

où $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur allant de O en A (fig. 129). Il est évident que la vitesse de translation $\boldsymbol{v}_O$ dépend du choix du point O. Mais *comme la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ ne dépend pas de la position du point O auquel est rapportée la rotation du solide, on peut parler de la vitesse angulaire de rotation d'un solide sans indiquer ce point.* Il reste à démontrer cette assertion.

Choisissons un autre point arbitraire O' du solide et rapportons à ce point la rotation du solide. Soit $\boldsymbol{\omega}'$ la vitesse angulaire de cette rotation. La vitesse $\boldsymbol{v}$ du point A considéré plus haut sera maintenant

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{r}'],$$

où $\boldsymbol{r}'$ est le rayon vecteur allant de O' en A. Puisqu'il s'agit de la vitesse d'un seul et même point, cette quantité doit être égale à celle donnée par (47.1), ce qui donne

$$\boldsymbol{v}_O + [\boldsymbol{\omega r}] = \boldsymbol{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{r}'].$$

Portons dans cette égalité $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}$ désignant le vecteur $\overrightarrow{O'O}$. Remarquons encore que la vitesse du point O peut être trouvée par addition vectorielle de la vitesse du point O' et de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}'$ de rotation autour de ce point, soit

$$\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{R}].$$

Nous obtenons alors

$$\boldsymbol{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{R}] + (\boldsymbol{\omega r}) = \boldsymbol{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R})],$$

soit

$$[\boldsymbol{\omega r}] = [\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{r}].$$

$\boldsymbol{r}$ étant arbitraire, $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$.

4. Soit un corps solide en rotation autour d'un point fixe. Prenons ce point pour origine des coordonnées O. L'énergie cinétique de ce corps est évidemment égale à

$$K = \frac{1}{2} \int v^2\, dm,$$

où l'intégration est étendue à toute la masse du corps. En appliquant la formule $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega r}]$ on peut écrire $v^2 = (\boldsymbol{vv}) = ([\boldsymbol{\omega r}]\, \boldsymbol{v})$ ou après permutation des termes $v^2 = (\boldsymbol{\omega}\, [\boldsymbol{rv}])$. Puisque $\boldsymbol{\omega}$ est le même pour tous les points du corps, on a

$$K = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega} \int [\boldsymbol{rv}]\, dm,$$

ou bien

$$K = \frac{1}{2} (\boldsymbol{L}\omega), \tag{47.2}$$

où $\boldsymbol{L}$ est le moment cinétique du corps par rapport au point O.

Dans le cas général les vecteurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{\omega}$ forment entre eux un certain angle. Pour s'en rendre compte, considérons un seul point matériel M en rotation autour d'un axe fixe ou d'un axe instantané. Plaçons l'origine O sur cet axe. On a alors

$$\boldsymbol{L} = m\, [\boldsymbol{rv}] = m\, [\boldsymbol{r}\, [\boldsymbol{\omega r}]] = m r \boldsymbol{\omega}^2 - m\, (\boldsymbol{r\omega})\boldsymbol{r}.$$

Comme le dernier terme est généralement non nul, les vecteurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{\omega}$ ne sont pas colinéaires. Ils ne le seront que si on avait choisi pour origine O le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe de rotation. Dans ce dernier cas le moment cinétique $\boldsymbol{L}$ par rapport au point O se réduit au moment par rapport à l'axe de rotation. En désignant ce dernier par L_x on écrira $L = L_x = I\omega$, I étant le moment d'inertie du point par rapport à l'axe de rotation. La formule (47.2) devient alors $K = {}^1/_2\, L_x\omega = {}^1/_2\, I\omega^2$. Cette dernière formule reste valable pour le corps solide tout entier, ce corps pouvant être considéré comme un ensemble de points matériels en

rotation autour d'un seul et même axe. Ainsi la formule (47.2) est équivalente à la formule (33.6) qui avait été établie par un procédé différent.

§ 48. Roulement des corps sur un plan incliné

1. On supposera que le corps qui roule (la roulante) est de révolution par rapport à l'axe géométrique C (fig. 130) et que ce mouvement ne s'accompagne pas de glissement. Cela signifie qu'au point de contact A la vitesse du corps est nulle. L'absence de glissement résulte de l'action des forces exercées par le plan incliné sur le corps roulant. Ces forces sont, d'une part, la force de la pression normale au plan incliné F_n et, d'autre part, la force de frottement F_τ tangente à ce plan. En l'absence de glissement cette dernière force est la force de frottement de repos ou la force de frottement d'adhésion.

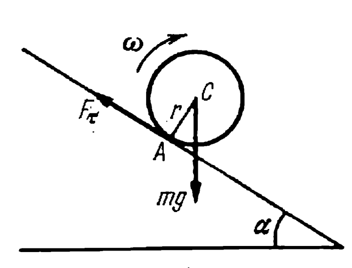


Fig. 130

Le module de la force F_τ peut prendre toute valeur comprise entre 0 et kF_n, k étant le coefficient de frottement (cf. § 17). Lorsque le corps roule, cette force prend la valeur juste nécessaire pour éviter le glissement. Si la force tangentielle nécessaire est plus grande que kF_n, un roulement pur devient impossible et s'accompagne d'un glissement.

Nous allons résoudre le problème du roulement d'un corps par trois procédés différents.

P r o c é d é 1. Mettons en œuvre l'équation des moments par rapport à l'axe instantané de rotation. En l'absence de glissement l'axe instantané passe par le point de contact A. Comme l'axe instantané et l'axe passant par le centre de masse C du corps se meuvent de façon parallèle, l'équation des moments se présente sous sa forme simple

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = M_A, \qquad (48.1)$$

où I_A est le moment d'inertie du corps roulant par rapport à l'axe instantané et M_A le moment des forces extérieures par rapport au même axe. Les forces extérieures sont la force de pesanteur mg et la réaction qu'applique le plan incliné sur le corps qui roule. Cette dernière force ne figure pas dans l'équation des moments parce qu'elle passe par l'axe A et son moment par rapport à cet axe est nul. Ainsi

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = mgr \sin \alpha.$$

Désignons par v la vitesse linéaire du point C. Elle est liée à la vitesse v_A du point A par la relation $v = v_A + \omega r$. En l'absence

de glissement $v_A = 0$ et donc $v = \omega r$. L'accélération linéaire du point C est $a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$. Aussi tire-t-on de l'équation précédente

$$a = \frac{mgr^2}{I_A}\sin\alpha. \tag{48.2}$$

En vertu du théorème de Huygens-Steiner $I_A = I_C + mr^2$, où I_C est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe passant par le centre de masse C. Par conséquent,

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I_C}{mr^2}}. \tag{48.3}$$

L'avantage de ce procédé réside en ce que dans l'équation initiale (48.1) la réaction d'appui inconnue ne figure pas.

P r o c é d é 2. Utilisons l'équation des moments par rapport à l'axe passant par le centre de masse C. Elle aussi est toute simple

$$I_C\frac{d\omega}{dt} = M_C,$$

M_C désignant le moment des forces extérieures par rapport à l'axe C. La force de pesanteur ne figure pas dans cette équation puisqu'elle est portée par l'axe C. Le moment n'est dû qu'à la réaction d'appui dont seule la composante F_τ parallèle au plan incliné intervient dans le calcul (c'est la force de frottement d'adhésion). Son moment est $M_C = rF_\tau$ et par suite

$$I_C\frac{d\omega}{dt} = rF_\tau.$$

Cette équation contient deux inconnues: l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ et la force F_τ. Le théorème sur le mouvement du centre de masse fournit une deuxième équation

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - F_\tau. \tag{48.4}$$

Avec la relation précédente $a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$ on résout les équations obtenues par rapport à a et on retrouve le résultat (48.3). On trouve encore une équation pour la force de frottement d'adhésion

$$F_\tau = \frac{I_C}{I_C+mr^2}\,mg\sin\alpha. \tag{48.5}$$

P r o c é d é 3. Appliquons la loi de la conservation de l'énergie. L'énergie cinétique du corps est $K = {}^1/_2\,I_A\omega^2$. C'est pourquoi ${}^1/_2\,I_A\omega^2 = mgh$, h désignant la hauteur à partir de laquelle le corps initialement au repos descend en roulant. Lorsqu'il aura parcouru sur le plan incliné un chemin x, on a $h = x\sin\alpha$ et par

conséquent

$$\frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{I_A}{2r^2} v^2 = mgx \sin \alpha.$$

En dérivant cette relation par rapport au temps et en remarquant que $\frac{dx}{dt} = v$, on retrouve la formule (48.2).

2. Puisque le corps qui roule est soumis à une force de frottement, on peut se demander pourquoi on peut utiliser dans ce problème la loi de la conservation de l'énergie sous sa forme mécanique. La réponse à cette question est qu'*en l'absence de glissement la force de frottement n'est appliquée qu'aux points du corps qui se trouvent sur l'axe instantané de rotation.* Comme la vitesse instantanée de ces points est nulle, la force de frottement qui leur est appliquée *n'effectue aucun travail* et n'influe pas sur la valeur de l'énergie cinétique totale du corps qui roule. Le rôle de la force de frottement $\boldsymbol{F}_\tau$ se réduit à mettre le corps en rotation et à assurer un roulement sans glissement. En présence des forces de frottement d'adhésion, le travail produit par la force de pesanteur contribue à augmenter l'énergie cinétique des mouvements de translation et de rotation du corps.

3. Le rapport I_C/m figurant dans la formule (48.3) a la dimension du carré d'une longueur. Introduisons la notation

$$\rho^2 = \frac{I_C}{m}$$

et appelons ρ le *rayon d'inertie* du corps. La formule (48.3) peut s'écrire alors

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + (\rho/r)^2}. \qquad (48.6)$$

La quantité r peut être appelée *rayon de roulement* du corps. C'est la distance entre le centre de masse du corps qui roule et l'axe instantané de rotation. Les rayons de roulement d'un cylindre et d'une sphère sont égaux à leurs rayons géométriques.

L'accélération du corps qui roule et la vitesse de son mouvement de translation dépendent du rapport du rayon d'inertie au rayon de roulement. Plus ce rapport est grand, plus le corps roule lentement. Il est particulièrement facile de le démontrer par application de la loi de la conservation de l'énergie. Si le corps descend en roulant d'une hauteur h, toute son énergie potentielle mgh est convertie en énergie cinétique. L'énergie cinétique comporte l'énergie cinétique du mouvement de translation et l'énergie cinétique du mouvement de rotation. Au bas de la pente l'énergie cinétique totale vaut mgh et ne dépend donc que de la hauteur h. Plus la part revenant à la rotation du corps est grande, plus il dévale lentement la pente. Le rapport de l'énergie cinétique de rotation

à l'énergie cinétique de translation est égal à

$$\frac{E_{\text{rot}}}{E_{\text{trans}}}=\frac{I_C\omega^2}{mv^2}=\left(\frac{\rho}{r}\right)^2.$$

L'accélération a prend sa valeur maximale dans le cas d'un glissement pur, en l'absence de frottement.

A l'aide des expressions des moments d'inertie données au § 36 on calcule aisément les rayons d'inertie et l'accélération a pour des corps de différentes configurations.

Cylindre creux (sans bases): $\rho^2=r^2$, $a=\frac{g}{2}\sin\alpha$.

Cylindre massif: $\rho^2=\frac{r^2}{2}$, $a=\frac{2}{3}g\sin\alpha$.

Sphère creuse: $\rho^2=\frac{2}{3}r^2$, $a=\frac{3}{5}g\sin\alpha$.

Sphère massive: $\rho^2=\frac{2}{5}r^2$, $a=\frac{5}{7}g\sin\alpha$.

Les corps creux dévalent les pentes plus lentement que les corps massifs de même forme géométrique. A masse égale les moments d'inertie des corps creux sont plus grands que ceux des corps massifs, c'est pourquoi la part d'énergie cinétique revenant au mouvement de rotation est plus grande pour les corps creux que pour les corps massifs.

Prenons un petit volant emmanché sur un axe et plaçons-le sur deux rails inclinés comme indiqué sur la figure 131. Le rayon de roulement est égal au rayon r de l'axe du volant. La valeur du rapport ρ/r étant grande, le volant roulera très lentement.

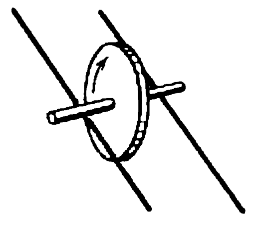


Fig. 131

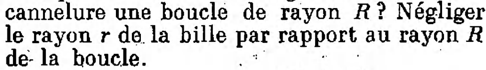
4. Si l'angle d'inclinaison α devient égal à zéro, l'accélération a s'annule, et comme le montre la formule (48.5), la force de frottement F_τ s'annule elle aussi. Il en résulte qu'un corps solide de symétrie axiale, comme le cylindre ou la sphère, doit rouler sur une surface rigide horizontale, en l'absence de glissement, d'un mouvement rectiligne et uniforme, sans être soumis à aucune force de résistance. Ce résultat ne concerne évidemment que des modèles idéalisés des corps. Le corps et le plan sur lequel il roule doivent être parfaitement lisses et rigides. Pour les corps réels le résultat ne se réalise pas ou ne se réalise qu'approximativement, car aussi bien le corps que le plan de roulement se déforment dans ce cas. Sur le plan apparaît un creux et son contact avec le corps est non pas ponctuel mais d'aire finie. Il en résulte que lors du roulement sur un plan horizontal apparaît une force qui ralentit le mouvement. Cette force est la force de *frottement de roulement*. Elle est généralement petite par rapport à la force de frottement de glissement et bien souvent on peut la négliger (cf. § 17).

PROBLÈMES

1. Calculer l'accélération a du centre d'une bille roulant sans glissement dans une cannelure inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Les formes des sections droites des cannelures sont représentées sur la figure 132, *a* et *b*.

Réponse. a) $a = \dfrac{R^2 - h^2}{\rho^2 + (R^2 - h^2)} g \sin\alpha$, où ρ est le rayon d'inertie de la bille et $2h$ la largeur de la cannelure ; b) $a = \dfrac{R^2}{4\rho^2 + R^2} g \sin\alpha$.

2. Quelle doit être la hauteur initiale H à laquelle doit se trouver une petite bille de rayon d'inertie ρ pour qu'elle puisse exécuter sans glissement dans la cannelure une boucle de rayon R ? Négliger le rayon r de la bille par rapport au rayon R de la boucle.



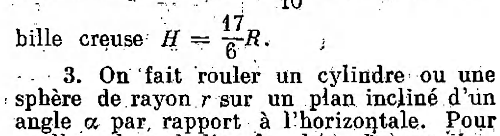


Fig. 132

Réponse. $H = \dfrac{5r^2 + \rho^2}{2r^2} R$. Pour une bille massive $H = \dfrac{27}{10} R$ et pour une bille creuse $H = \dfrac{17}{6} R$.

3. On fait rouler un cylindre ou une sphère de rayon r sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Pour quelle valeur de l'angle α le roulement s'accompagnera de glissement, pour un coefficient de frottement de glissement k entre le corps et le plan ?

Réponse. $\operatorname{tg}\alpha > \dfrac{r^2 + \rho^2}{\rho^2} k$, où ρ est le rayon d'inertie du corps roulant. Pour une sphère massive $\operatorname{tg}\alpha > {}^7/_2 k$, pour un corps creux $\operatorname{tg}\alpha > {}^5/_2 k$. Pour un cylindre massif $\operatorname{tg}\alpha > 3k$ et pour un cylindre creux $\operatorname{tg}\alpha > 2k$.

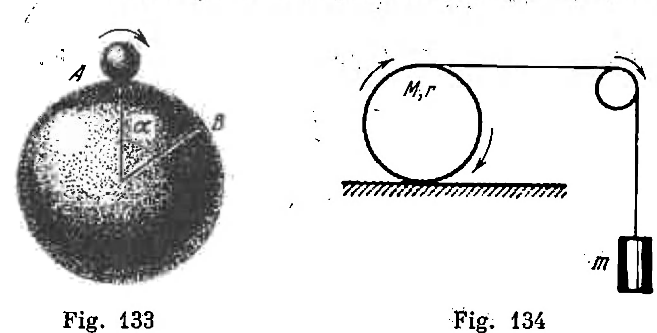


Fig. 133 Fig. 134

4. Une bille de rayon r et de vitesse initiale nulle roule sans glissement sur la surface d'une sphère à partir du pôle A (fig. 133). Déterminer le point où elle quittera la surface de la sphère pour poursuivre sa course en chute libre dans le champ de pesanteur.

Réponse. La position du point B à partir duquel la bille se meut en chute libre sous l'action de la force de la pesanteur est définie par l'angle α dont le cosinus est

$$\cos\alpha = \frac{2r^2}{3r^2 + \rho^2},$$

où ρ est le rayon d'inertie de la bille. Le résultat est indépendant du rayon de la sphère. Pour une bille massive $\cos\alpha = {}^{10}/_{17}$ et pour une bille creuse $\cos\alpha = {}^{6}/_{11}$.

5. Un cylindre de masse M et de rayon r roule sur la surface horizontale d'une table (fig. 134). Un fil enroulé sur le corps du cylindre passe du cylindre à une poulie fixe suivant l'horizontale; à son autre extrémité est attaché un poids de masse m. En négligeant les masses de la poulie et du fil, calculer l'accélération du centre de masse du cylindre.

Réponse. $a = \dfrac{2mr^2}{M(\rho^2 + r^2) + 4mr^2}\,g$, où ρ est le rayon d'inertie du cylindre. Pour un cylindre massif $a = \dfrac{4m}{3M + 8m}\,g$ et pour un cylindre creux $a = \dfrac{m}{M + 2m}\,g$.

6. Un cylindre creux de masse M et de rayon r roule sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. Un chien court sur la surface du cylindre à une allure telle qu'il y occupe toujours la position la plus haute. Calculer l'accélération a du cylindre roulant si la masse du chien est m.

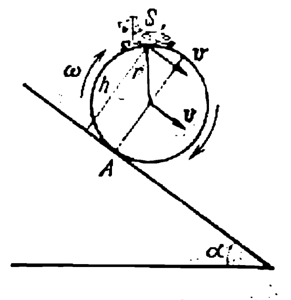


Fig. 135

Solution. La méthode de résolution de ce problème est intéressante. La voie la plus simple est d'utiliser l'équation des moments par rapport à l'axe instantané de rotation A (fig. 135). Tous les mouvements doivent alors être rapportés à un référentiel dans lequel le plan incliné est immobile. Dans ce référentiel le chien courant sur place au point le plus haut S du cylindre se déplace parallèlement au plan incliné à la même vitesse v que celle à laquelle se meut le centre de masse du cylindre. Le moment cinétique L du système est constitué par les moments cinétiques $I\omega$ du cylindre et mvh du chien, où $h = r(1 + \cos\alpha)$ est la longueur de la perpendiculaire abaissée du point S sur le plan incliné. Ainsi

$$L = I\omega + mrv(1 + \cos\alpha),$$

I désignant ici le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe instantané A, i.e. la quantité $2Mr^2$. Comme le glissement est absent $v = \omega r$ et

$$L = [2M + m(1 + \cos\alpha)]\,rv.$$

Comme le centre de masse et l'axe instantané A se meuvent parallèlement l'un à l'autre, la dérivée de L par rapport au temps doit être égale au moment des forces extérieures par rapport à l'axe instantané A, donc à $(M + m)\,gr\sin\alpha$. En égalant ces deux expressions on obtient

$$a = \frac{M + m}{2M + m(1 + \cos\alpha)}\,g\sin\alpha.$$

7. Sur la surface d'un grand cylindre creux reposant sur un plan horizontal un chien de masse m commence à courir vers le point le plus élevé A du cylindre, mais reste toujours à la même distance de ce point (fig. 136), tandis que le cylindre se met à rouler sans glissement sur le plan horizontal. La masse du cylindre est M, l'angle AOm est α. Calculer: a) l'accélération a de l'axe du cylindre; 2) la force de frottement F_{fr} entre le cylindre et le plan de roulement; 3) le temps t pendant lequel le chien peut rester à la distance indiquée du point A sachant que la puissance utile maximale du chien est $P_{\max}$. Quelle sera alors la vitesse maximale $v_{\max}$ de translation du cylindre? (On entend ici par puissance utile la puissance fournie par le chien pour accroître l'énergie cinétique du système.)

Réponse. $a = \frac{mg \sin \alpha}{2M + m(1 + \cos \alpha)}$, $F_{fr} = (M + m)a$,

$$t = \frac{P_{max}}{2M + m} \frac{1}{a^2}, \quad v_{max} = \frac{P_{max}}{(2M + m)a}.$$

8. Calculer l'accélération a qu'acquiert un tonneau cylindrique plein de liquide roulant sans glissement sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (fig. 137). Négliger le frottement entre le liquide et les parois du tonneau.

Solution. Comme il n'y a pas de frottement entre le liquide et les parois du tonneau, la rotation de celui-ci ne se transmet pas au liquide. Par suite le

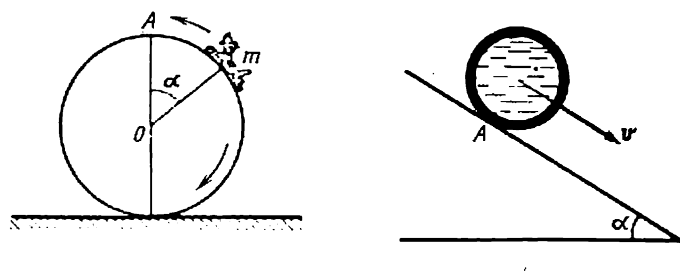


Fig. 136 Fig. 137

liquide tout entier effectue un mouvement de translation à la vitesse v qui est la vitesse du centre de masse. Le moment cinétique du système par rapport à l'axe instantané A est $L = I_A \omega + mRv$, où R est le rayon extérieur du tonneau, I_A son moment d'inertie par rapport à l'axe instantané A et m la masse du liquide. Comme il n'y a pas de glissement $v = \omega R$, de sorte que

$$L = \left(\frac{I_A}{R} + mR \right) v.$$

Le centre de masse du tonneau se meut parallèlement à l'axe instantané, donc

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{I_A}{R} + mR \right) \frac{dv}{dt} = (M + m) Rg \sin \alpha,$$

où M est la masse du tonneau. Il en découle

$$a = \frac{(M + m) R^2}{I_A + mR^2} g \sin \alpha.$$

Dans le cas limite du tonneau vide ($m = 0$), on retrouve la formule (48.2). Dans l'autre cas limite où les parois du tonneau seraient très petites par rapport à son rayon R, $I_A = 2MR^2$,

$$a = \frac{M + m}{2M + m} g \sin \alpha.$$

Nous n'avons pas tenu compte des moments d'inertie du fond et du couvercle du tonneau, admettant qu'ils étaient négligeables.

Il est recommandé de résoudre ce problème en utilisant, d'une part, l'équation des moments par rapport au centre de masse et, d'autre part, l'équation de la conservation de l'énergie.

9. Un disque de Maxwell est attaché à des fils de grande longueur (fig. 138). Les brins de 50 cm de longueur de chaque fil ont été enroulés sur l'axe du disque, après quoi le disque abandonné à lui-même commence à descendre sous l'action de la force de pesanteur. Arrivé à sa position la plus basse, le disque remonte en imprimant aux fils une secousse brusque. Calculer l'accélération du disque et la tension du fil pendant sa descente et sa remontée et évaluer approximativement la tension du fil lors de la secousse. La masse du disque $M = 1$ kg, son

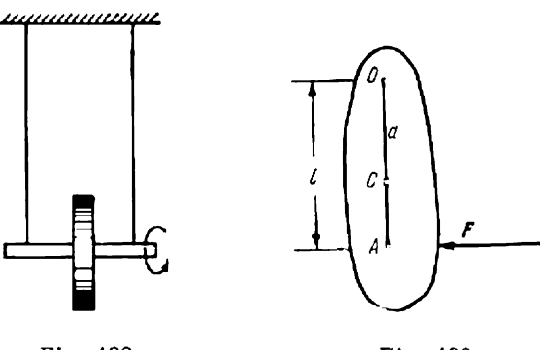


Fig. 138 Fig. 139

rayon $R = 10$ cm, le rayon de l'axe $r = 0{,}5$ cm. Négliger l'allongement du fil pendant la secousse. (Comparer ce problème au problème n° 2 du § 37.)

Réponse. Tant que le mouvement du disque est régulier (en dehors de la durée de la secousse), son accélération est la même à la descente et à la remontée; cette accélération dirigée vers le bas est:

$$a = \frac{2r^2}{R^2 + 2r^2} g.$$

La tension T_0 du fil est la même pendant la descente et la remontée du disque:

$$T_0 = \frac{Mg}{2}\left(1 - \frac{a}{g}\right) \approx 4{,}83\ \text{N}.$$

Pendant la secousse le fil est soumis à une tension supplémentaire ΔT qui vaut approximativement

$$\Delta T \approx \frac{1}{\pi r}\frac{2a}{g} Mg \approx 3{,}14\ \text{N}.$$

La tension totale du fil pendant la secousse est $T = T_0 + \Delta T \approx 8{,}0$ N.

10. A quelle distance l de l'axe d'un pendule balistique doit se trouver le point d'impact d'un projectile arrivant suivant l'horizontale pour que l'axe du pendule ne subisse aucune surcharge pendant le choc?

Solution. Soit F la force horizontale qu'applique le projectile au pendule (fig. 139). Ecrivons l'équation des moments par rapport au point de suspension O:

$$I\frac{d\omega}{dt} = Fl.$$

Puisqu'on impose qu'au moment du choc l'axe du pendule ne subit aucune charge supplémentaire, en vertu du théorème du mouvement du centre de masse on

doit avoir

$$m\frac{dv}{dt}=F,$$

où v est la vitesse du centre de masse, m est la masse du pendule. On négligera la masse du projectile. En divisant membre à membre les équations ci-dessus, il vient

$$l=\frac{I}{m}\frac{d\omega}{dv}.$$

En désignant par a la distance entre le point de suspension et le centre de masse du pendule, $v = \omega a$. On trouve

$$l=\frac{I}{ma}.$$

Cette formule montre que l est la longueur réduite du pendule pesant et le point A coïncide avec son centre d'oscillation. Le point de suspension O correspondant s'appelle le « *centre de choc* ». Un forgeron sait bien où placer ses mains sur le manche de son pesant marteau pour ne pas éprouver au choc un désagréable effet de recul (c'est au centre de choc).

11. Lorsqu'on cherche à couper une branche verticale d'un coup de sabre, en quel endroit le tranchant doit-il rencontrer la branche pour éviter dans le bras une percussion par contre-coup? Considérer la lame du sabre comme une bande homogène de longueur l que l'on tient à la main par le bout.

Réponse. La distance entre la poignée et le point d'impact doit être égale à $2l/3$.

12. Soit un cylindre ou une sphère rigide roulant avec glissement sur un plan rigide horizontal. Montrer que pendant le roulement les vitesses de translation et de rotation du corps sont reliées entre elles par la relation

$$mrv + I\omega = \text{const.} \qquad (48.7)$$

I étant le moment d'inertie par rapport à l'axe géométrique du corps.

Solution. Les équations du mouvement du centre de masse et des moments sont:

$$m\frac{dv}{dt}=\pm F, \qquad I\frac{d\omega}{dt}=\mp M=\mp rF.$$

Le signe supérieur se rapporte au cas où la force de frottement F pointe en avant (le mouvement de translation est alors accéléré et la rotation est ralentie) et le signe inférieur se rapporte au cas où la force F pointe en arrière (mouvement de translation ralenti, mouvement de rotation accéléré). En éliminant F et dt, on trouve dans les deux cas $mr\,dv = -I\,d\omega$, d'où l'égalité (48.7).

13. Selon l'équation (48.7) le roulement d'un corps solide sur un plan horizontal ne peut cesser en l'absence de forces autres que la force de frottement horizontale appliquée au point de contact de la base et de la roulante. Quelle est la cause du désaccord entre théorie et expérience?

Solution. Tous les corps réels sont déformables. Sur le plan de roulement apparaît un creux. Les forces de frottement agissant sur le corps qui roule sont représentées sur la figure 140 par des fléchettes, leur résultante $F = \overrightarrow{AB}$. Il est évident que le moment M des forces de frottement est plus grand que le moment de la force résultante F : $M > rF$ (F et M sont des quantités positives). En divisant membre à membre les équations $m\,dv = \pm F\,dt$ et $I\,d\omega = \mp M\,dt$, puis en multipliant par r le résultat de la division on obtient

$$mr\,dv + I\,d\omega\,(rF/M) = 0.$$

Comme $rF < M$, il en découle $mr\,dv + I\,d\omega < 0$, soit

$$\frac{d}{dt}(mrv + I\omega) < 0. \qquad (48.8)$$

Ainsi dans le cas d'un roulement réel la quantité $mrv + I\omega$ diminue avec le temps jusqu'à s'annuler.

14. On communique à l'instant $t = 0$ une vitesse linéaire v_0 à une boule massive homogène de rayon r reposant sur un plan horizontal. En tenant compte du frottement de glissement et en négligeant le frottement de roulement, calculer la vitesse angulaire de la boule à l'instant où son mouvement deviendra un roulement pur. Calculer la perte par frottement de son énergie cinétique.

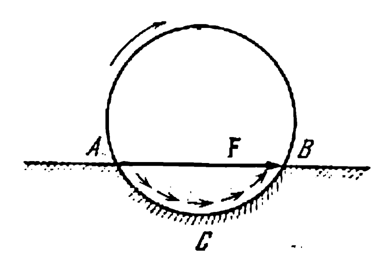


Fig. 140

S o l u t i o n. D'après (48.7)

$$mrv_0 = mrv + I\omega = (mr^2 + I)\,\omega,$$

où v est la vitesse de translation de la boule et ω sa vitesse de rotation une fois que la boule roule sans glissement. On en tire aussitôt la vitesse angulaire ω. La perte d'énergie cinétique est

$$\Delta K = \frac{1}{2}\,\frac{I}{I + mr^2}\,mv_0^2 = \frac{mv_0^2}{7}.$$

15. On pose sur un plan horizontal, sans lui communiquer de mouvement de translation, une boule massive homogène de rayon r tournant autour de son diamètre horizontal à la vitesse angulaire ω_0. En tenant compte du frottement de glissement mais en négligeant le frottement de roulement, calculer la vitesse linéaire v du centre de la boule lorsqu'elle commencera à rouler sans glissement. Déterminer la perte d'énergie cinétique due au frottement.

R é p o n s e. $v = \frac{Ir}{I + mr^2}\,\omega_0 = \frac{2}{7}\,r\omega_0$, $\Delta K = \frac{1}{2}\,\frac{mr^2}{I + mr^2}\cdot I\omega_0^2 = \frac{1}{7}\,mr^2\omega_0^2$.

16. Une bille de billard qui roule sans glissement à la vitesse v sur un plan horizontal vient heurter une bille identique au repos, la ligne des centres des deux billes étant parallèle à la vitesse du mouvement. Déterminer les vitesses des deux billes lorsque leurs mouvements de roulement deviennent libres de glissement. Quelle partie de l'énergie cinétique initiale sera convertie en chaleur? On suppose que lors du choc des billes il n'y a pas de transfert du mouvement de rotation. Négliger les pertes d'énergie par frottement lors du roulement sans glissement.

R é p o n s e. La vitesse de la première bille $v_1 = {}^2/_7 v$, celle de la seconde $v_2 = {}^5/_7 v$. La perte d'énergie cinétique due au frottement représente ${}^{20}/_{49}$ de la valeur initiale de l'énergie cinétique.

17. Deux billes de billard identiques animées de la même vitesse v_0 roulent sans glissement à la rencontre l'une de l'autre jusqu'à entrer en collision élastique. En supposant que le choc est central et que pendant la durée du choc les vitesses angulaires ne varient pas, calculer les vitesses des deux billes après le choc, roulant sans glissement.

S o l u t i o n. Pendant le choc les billes échangent leurs vitesses de translation, leurs vitesses de rotation restant inchangées. Il suffit donc de déterminer le mouvement d'une seule bille. Aussitôt après le choc les vitesses initiales de la bille considérée seront $v_{in} = -v_0$, $\omega_{in} = \omega_0 = v_0/r$. En vertu de (48.7) le mouvement de cette bille après le choc doit satisfaire à l'équation $mvr + I\omega = -mv_0r + I\omega_0$. Dès que le roulement ne s'accompagnera plus de glissement $v = \omega r$ et par suite

$$v = \frac{I - mr^2}{I + mr^2} v_0 = -\frac{3}{7} v_0.$$

18. Une bille de billard roulant sans glissement à la vitesse v_0 rebondit élastiquement après choc contre une paroi fixe. En admettant que lors du choc la vitesse angulaire da la bille ne change pas, calculer sa vitesse v après choc lorsque son mouvement est un roulement pur.

R é p o n s e. $v = \frac{I - mr^2}{I + mr^2} v_0 = \frac{3}{7} v_0$.

19. Comment faut-il frapper une bille avec une queue de billard pour que la force de son frottement sur le tissu de la table la mette en un mouvement: a) accéléré, b) ralenti, c) uniforme? On suppose que le coup est appliqué horizontalement dans un plan vertical passant par le centre de la bille et son point de contact avec le plan du billard.

R é p o n s e. La bille aura un mouvement uniforme si le point de poussée se trouve à une distance égale à 2/5 du rayon au-dessus de son centre. Ce sont des coups dits *normaux*. Si le point de poussée est situé plus haut, la bille prendra un mouvement accéléré et si ce point est situé plus bas que pour un coup normal, la bille aura un mouvement ralenti. Ce sont les coups *hauts* et *bas*. Ces résultats ont été obtenus en supposant que la force de frottement de la bille sur la table est négligeable par rapport à la force appliquée par la queue.

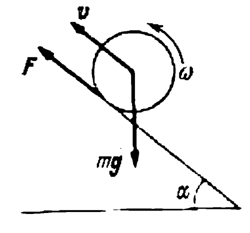


Fig. 141

20. Comment faut-il frapper une bille avec une queue de billard pour qu'après collision avec une bille immobile: a) les deux billes avancent, b) la première bille s'arrête et la seconde avance, c) la seconde bille avance et la première recule? On adoptera les mêmes hypothèses concernant l'application du coup que dans le problème 19.

R é p o n s e. Le cas a) se trouve réalisé pour un coup haut, le cas b) pour un coup normal et le cas c) pour un coup bas.

21. On place au pied d'un plan incliné formant un angle α avec un plan horizontal un cylindre massif, homogène, de rayon r en rotation à la vitesse angulaire ω_0, sans lui communiquer de vitesse linéaire initiale. Le cylindre monte en roulant sur le plan incliné. Déterminer le temps au bout duquel le cylindre atteindra sur le plan incliné la cote maximale.

S o l u t i o n. Soit F la force de frottement appliquée au cylindre à son point de contact avec le plan incliné (fig. 141). C'est cette force qui fait monter le cylindre sur le plan incliné. Au début, tant que le roulement s'accompagne de glissement, la force F est une force de frottement de glissement. Lorsque le mouvement est un roulement pur, la force F est une force de frottement d'adhésion. Cependant, quelle que soit la nature du mouvement, il satisfait, d'une part, à

l'équation du mouvement du centre de masse

$$m\frac{dv}{dt}=F-mg\sin\alpha,$$

et, d'autre part, à l'équation des moments (par rapport à l'axe géométrique du cylindre)

$$I\frac{d\omega}{dt}=-Fr.$$

En éliminant F on obtient

$$mr\frac{dv}{dt}=-I\frac{d\omega}{dt}-mgr\sin\alpha.$$

L'intégration de cette équation compte tenu des conditions initiales ($\omega=\omega_0$ pour $t=0$) a pour résultat

$$mrv=I(\omega_0-\omega)-mgrt\sin\alpha.$$

Cette relation reste valable pendant toute la durée du mouvement, que ce soit un roulement pur ou un roulement avec glissement. A la cote maximale $v=0$ et par suite $\omega=0$. S'il n'en était pas ainsi, le cylindre aurait continué à monter et la cote atteinte n'aurait pas été la cote maximale. Il s'ensuit que le temps de remontée t s'obtient en posant dans l'équation ci-dessus $v=\omega=0$:

$$t=\frac{I\omega_0}{mgr\sin\alpha}=\frac{r\omega_0}{2g\sin\alpha}.$$

Il est remarquable que le temps de remontée t ne dépend pas des coefficients de frottement entre le cylindre et le plan incliné. On aurait obtenu le même résultat même si le coefficient de frottement avait été variable. La solution présuppose cependant que le frottement est suffisamment grand pour assurer la remontée du cylindre sur le plan incliné. Si le frottement était insuffisant, la vitesse de rotation du cylindre deviendrait plus petite. Il est facile de se rendre compte que le temps de ralentissement est donné par la même formule.

Par contre le temps que met le cylindre pour dévaler en roulant le plan incliné, ainsi que la cote maximale à laquelle monte le cylindre, dépendent de la valeur du coefficient de frottement. Cette différence tient à ce que le mouvement de descente est un roulement pur, tandis que la montée comporte une étape initiale avec glissement suivie d'un roulement pur.

22. Considérant que dans le problème précédent le coefficient de frottement de glissement k du cylindre sur le plan incliné a une valeur donnée et constante, déterminer: 1) l'accélération a_1 du cylindre lorsque son roulement s'accompagne de glissement; 2) le temps t_1 au bout duquel s'instaure un roulement pur; 3) la hauteur H_1 à laquelle parvient le cylindre avant que s'établisse un roulement sans glissement; 4) l'accélération a_2 du roulement pur; 5) la hauteur supplémentaire H_2 à laquelle monte le cylindre par roulement pur; 6) la hauteur totale H à laquelle monte le cylindre; 7) le temps $\bar{t}$ que met le cylindre pour dévaler en roulant le plan incliné. On posera que $k>\operatorname{tg}\alpha$.

Réponse. $a_1=g(k\cos\alpha-\sin\alpha)$, dirigé vers le haut;

$$t_1=\frac{I\omega_0 r}{(I+mr^2)a_1+mr^2g\sin\alpha}=\frac{\omega_0 r}{(3k\cos\alpha-\sin\alpha)g};$$

$$H_1=\frac{1}{2}a_1t_1^2\sin\alpha;\quad a_2=\frac{mr^2}{I+mr^2}g\sin\alpha=\frac{2}{3}g\sin\alpha;\quad H_2=\frac{a_1}{a_2}H_1;$$

$$H=H_1+H_2=\frac{k\cos\alpha-\sin\alpha}{4g(3k\cos\alpha-\sin\alpha)}\omega_0^2r^2;$$

$$\bar{t}=\sqrt{\frac{2H}{a_2\sin\alpha}}=\frac{\omega_0r_0}{2g\sin\alpha}\sqrt{\frac{3(k\cos\alpha-\sin\alpha)}{3k\cos\alpha-\sin\alpha}}.$$

23. On pose un cylindre massif et homogène de masse m_1 tournant à la vitesse angulaire ω_0 sur une longue planche de masse m_2 reposant sur un plan horizontal lisse. Le cylindre est posé sur la planche avec une vitesse de translation initiale nulle, la vitesse initiale de la planche étant nulle elle aussi. En négligeant la force de frottement de roulement, mais en tenant compte du frottement de glissement entre le cylindre et la planche, trouver la vitesse angulaire de rotation du cylindre lorsqu'il se met à rouler sans glissement. On suppose la planche d'une longueur suffisante pour que s'établisse un roulement pur avant que le cylindre n'arrive au bout de la planche.

Réponse. $\omega = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2}\,\omega_0$.

24. On a pratiqué dans un cylindre massif et homogène de rayon R une cavité cylindrique de rayon $R/2$ dont l'axe passe par le milieu du rayon du cylin-

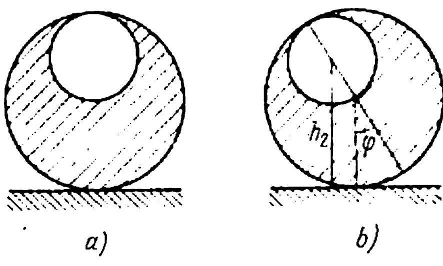


Fig. 142

dre (fig. 142, *a*). Déterminer la période T des petites oscillations qu'effectuera le cylindre quand on le posera sur un plan horizontal en lui laissant toute latitude d'y rouler sans glissement.

Solution. Le problème consiste à établir les expressions de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique du système. Pour ce faire, imaginons que la cavité pratiquée dans le cylindre a été entièrement remplie par la même substance que celle du cylindre. On obtient ainsi un cylindre massif et homogène que l'on appellera cylindre *1*. Le cylindre de rayon deux fois plus petit remplissant la cavité sera appelé cylindre *2*. Désignons les masses de ces cylindres par m_1 et m_2. Les énergies potentielle et cinétique du système seront égales aux différences de ces énergies pour les cylindres *1* et *2*. Lorsqu'on fait tourner le système d'un angle φ par rapport à la position d'équilibre (fig. 142, *b*), le centre de masse du cylindre *1* reste à la même hauteur et son énergie potentielle U_1 ne varie donc pas. L'énergie potentielle du cylindre *2* devient égale à $U_2 = m_2gh_2$, où $h_2 = R + \frac{R}{2}\cos\varphi$ est la hauteur du centre de masse du cylindre *2* au-dessus du plan horizontal sur lequel est disposé le système. L'énergie potentielle totale du système est donc

$$U = U_1 - U_2 = \text{const} - m_2gR\left(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi\right).$$

Le seul terme variable qu'elle renferme est $-{}^1/_2 m_2gR\cos\varphi$, de sorte que par un choix convenable de la constante additive on peut représenter U par une expression telle que

$$U = \text{const} + \frac{1}{2}m_2gR(1 - \cos\varphi) = \text{const} + m_2gR\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

ce qui pour des angles φ petits s'écrit

$$U \approx \text{const} + \frac{1}{4} m_2 g R \varphi^2.$$

L'énergie cinétique du système est $K = {}^1/_2(I_1 - I_2)\,\dot{\varphi}^2$, I_1 et I_2 étant les moments d'inertie des cylindres *1* et *2* par rapport à l'axe instantané. I_1 et I_2 varient avec l'angle φ, mais si les oscillations sont petites on peut négliger leurs variations et prendre les valeurs correspondant à la position d'équilibre. Pour la position d'équilibre on obtient aisément à l'aide du théorème de Huygens-Steiner les valeurs suivantes de I_1 et de I_2:

$$I_1 = \frac{3}{2} m_1 R^2, \qquad I_2 = \frac{19}{8} m_2 R^2.$$

En remarquant encore que $m_1 = 4m_2$, on trouve finalement

$$K = \frac{29}{16} m_2 R^2 \dot{\varphi}^2.$$

Les expressions de U et de K montrent que les petites oscillations du système doivent être harmoniques de période

$$T = \pi \sqrt{\frac{29R}{g}}.$$

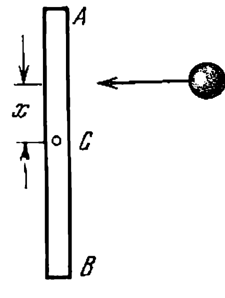


Fig. 143

25. Une grosse boule homogène en plomb, de masse M, repose sur un plan horizontal. On tire une balle de fusil de masse m qui à la vitesse V vient percuter suivant une trajectoire horizontale le centre de la boule de plomb et s'y encastre. Calculer la vitesse v du mouvement rectiligne de la boule lorsqu'elle se mettra à rouler sans glissement. Admettre qu'après choc la boule reste homogène, ce qui revient à négliger la masse de la balle qui s'y est logée. On négligera aussi le frottement de roulement.

Réponse. $v = \frac{5}{7} \frac{m}{M} V$.

26. Une boule de masse $M = 1000$ g reposant sur un plan horizontal est traversée de part en part suivant le diamètre par une balle de fusil tirée suivant l'horizontale avec une vitesse initiale $V_0 = 500$ m/s. Après percussion, la boule glisse d'abord sur le plan, puis roule sans glissement à une vitesse constante $v = 3$ m/s. Calculer la vitesse V de la balle à la sortie de la boule sachant que la masse de la balle est $m = 10$ g. Négliger le frottement de roulement.

Réponse. $V = V_0 - \frac{7}{5} \frac{M}{m} v = 80$ m/s.

27. Une tige homogène de longueur l reposant sur une table horizontale lisse peut s'y déplacer sans frottement (fig. 143). A l'instant initial où la vitesse de la tige est nulle, elle est heurtée par une petite bille se déplaçant dans une direction perpendiculaire à la tige. A quelle distance x du centre C de la tige la bille a-t-elle heurté la tige si directement après le choc les extrémités A et B de la tige ont été mises en mouvement aux vitesses v_A et v_B? (Ces vitesses sont positives ou négatives suivant qu'elles sont dirigées dans le même sens que la vitesse de la bille avant le choc ou en sens contraire.)

Réponse. $x = \frac{l}{6} \frac{v_A - v_B}{v_A + v_B}$. Ce résultat est valable quel que soit le choc.

28. Sur une surface horizontale parfaitement lisse repose une tige de longueur l et de masse M pouvant glisser sans frottement sur cette surface (voir fig. 143). Une bille de masse m se déplaçant perpendiculairement à la tige vient la frapper en un certain point. A quelle distance x du centre de la tige doit se trouver ce point de choc pour que la bille transmette toute son énergie cinétique à la

tige? Le choc est supposé parfaitement élastique. Pour quel rapport des masses M et m ce résultat peut-il être atteint?

Réponse. $x=\frac{l}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{M}{m}-1}$. Pour que ce résultat soit réalisable, il faut que $M \geqslant m$. La condition $x \leqslant l/2$ conduit encore à $M \leqslant 4m$.

29. Sur une table horizontale lisse repose une tige homogène, élastique, de longueur l et de masse M. Une bille élastique de masse m se déplaçant à la vitesse v perpendiculairement à la tige vient frapper son extrémité. Trouver la valeur de l'énergie de déformation du système au moment où elle est maximale. Négliger le frottement entre la tige et la table.

Réponse. $U=\frac{M}{M+4m}\frac{mv^2}{2}$. Dans les cas limites 1) $M=0$ et 2) $M=\infty$ on obtient 1) $U=0$, 2) $U={}^1/_2 mv^2$.

30. Sur une table horizontale lisse repose une tige solide homogène de longueur l et de masse M. Une bille solide de masse m se déplaçant à la vitesse v_0 perpendiculairement à l'axe de la tige vient frapper son extrémité. En supposant que le choc est parfaitement élastique et que les forces de frottement s'exerçant entre la table et les objets qui s'y trouvent sont négligeables, calculer la vitesse angulaire de rotation de la tige après le choc.

Solution. Si F est la force agissant sur la bille pendant le choc, alors

$$m\frac{dv}{dt}=-F,\quad M\frac{dV}{dt}=F,\quad I\frac{d\omega}{dt}=F\frac{l}{2}.$$

En divisant membre à membre, on exclut F et on obtient

$$\frac{m}{I}\frac{dv}{d\omega}=-\frac{2}{l},\quad \frac{M}{I}\frac{dV}{d\omega}=\frac{2}{l}.$$

En intégrant dans les limites comprises entre la valeur initiale de la vitesse angulaire $\omega=0$ et sa valeur finale, on trouve

$$v-v_0=-\frac{2}{l}\frac{I}{m}\omega,\quad V=\frac{2}{l}\frac{I}{M}\omega,$$

où v, V, ω représentent les valeurs des vitesses correspondantes après le choc. On détermine la vitesse angulaire ω à partir de l'équation exprimant la conservation de l'énergie. Si on y porte les valeurs de v et V, la vitesse ω se trouve définie par l'équation quadratique

$$\left[1+\frac{4I}{l^2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right]\omega^2-4\frac{v_0}{l}\omega=0.$$

Une des racines de cette équation ($\omega=0$) est la vitesse angulaire de la tige avant le choc, et l'autre sa valeur après le choc. Conformément au problème posé, c'est cette deuxième racine qui nous intéresse. Compte tenu de la relation $I=\frac{1}{12}Ml^2$, cette racine est

$$\omega=\frac{12mv_0}{(4m+M)l}.$$

§ 49. Les gyroscopes. Mouvement du gyroscope libre

1. Par son étymologie le mot gyroscope signifie dispositif servant à déceler la rotation. Au sens large du terme un *gyroscope* est un corps solide en rotation rapide dont l'axe de rotation peut modifier sa direction dans l'espace. Un gyroscope, surtout lorsqu'il est sou-

mis à des forces extérieures, peut exécuter des mouvements remarquables qui, à première vue, paraissent aussi inattendus qu'inexplicables. L'observation de ces mouvements est souvent passionnante. Une toupie en rotation rapide n'est pas seulement un jouet amusant, mais peut constituer un excellent dispositif de démonstration pour l'étude des lois de la mécanique. Tous les effets déterminés par une rotaton rapide du gyroscope sont dits *effets gyroscopiques*. Ces effets ont trouvé de nombreuses applications industrielles (cf. § 51).

Les effets gyroscopiques se manifestent également dans les atomes grâce à l'existence de moments cinétiques déterminés par des mouvements orbitaux à l'intérieur des atomes ou par des rotations propres (spins) des électrons et des noyaux atomiques. Il est évident que ces effets doivent être étudiés, comme tous les autres phénomènes à l'échelle atomique, dans le cadre de la mécanique quantique. Néanmoins on trouve une grande ressemblance entre les propriétés gyroscopiques des systèmes atomiques et macroscopiques. Aussi la théorie du gyroscope présente-t-elle de l'intérêt pour l'étude de la physique atomique.

Ce sont les *gyroscopes symétriques* qui présentent le plus d'intérêt pour la science et la technique. On dit qu'un gyroscope est *symétrique* s'il présente une symétrie de révolution par rapport à un certain axe appelé *axe géométrique* ou *axe de révolution*. La théorie du gyroscope symétrique est tout à la fois plus simple et plus importante que celle du gyroscope asymétrique, aussi dans ce qui suit nous ne considérerons que les gyroscopes symétriques. En général un point de l'axe de révolution du gyroscope est fixe. Ce point fixe est appelé *point d'appui* ou *de suspension du gyroscope*. Dans un sens plus large on entend par *point de suspension du gyroscope* un point O de l'axe de révolution auquel on rapporte la rotation du gyroscope. En général, le mouvement du gyroscope se compose du mouvement du point de suspension O et d'une rotation autour de l'axe instantané passant par ce point. La *toupie* est un exemple de gyroscope à point d'appui mobile. Dans la théorie du gyroscope, le cas le plus important est celui où le point de suspension est *fixe*. On peut ramener le cas général du point de suspension mobile au cas particulier du point de suspension fixe.

2. Pour rendre l'axe de révolution du gyroscope mobile dans l'espace on dispose généralement le gyroscope dans un *cardan de suspension* (fig. 144). Le volant du gyroscope est fixé sur son axe de révolution $A'A$ qui peut tourner avec un frottement aussi faible que possible dans des paliers fixés aux deux extrémités d'un diamètre de la *bague intérieure*. La bague intérieure peut elle-même tourner autour d'un axe $B'B$ perpendiculaire à l'axe $A'A$; l'axe $B'B$ est soutenu par des coussinets fixés aux extrémités d'un diamètre de la *bague extérieure*. Cette dernière peut tourner autour d'un

troisième axe $D'D$ soutenu par les paliers fixés au support. Le point d'intersection des trois axes est le *centre du cardan de suspension*. Un gyroscope à cardan de suspension possède trois degrés de liberté et peut exécuter toutes sortes de rotation autour du centre de suspension. Dans tout ce qui suit nous négligerons l'énergie cinétique et les moments cinétiques des bagues, estimant qu'ils sont infiniment petits comparés aux grandeurs correspondantes du volant

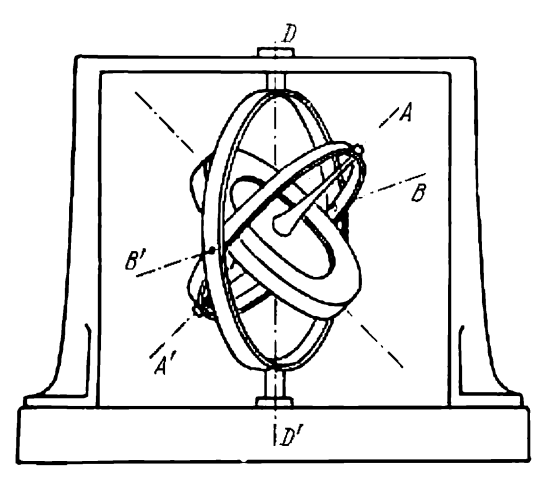


Fig. 144

du gyroscope. Dans le cas où le centre du cardan de suspension ou le point d'appui coïncident avec le centre de masse du gyroscope, on dira que l'on a affaire à un gyroscope *équilibré*.

3. En vertu du théorème d'Euler (§ 47) le mouvement d'un gyroscope à point de suspension fixe (point O) peut être représenté comme une rotation autour de l'axe instantané passant par le point O. Désignons par $\boldsymbol{\omega}$ le vecteur vitesse angulaire instantanée de rotation du gyroscope et par $\boldsymbol{L}$ son moment cinétique rapporté au point O. Cherchons la relation entre ces vecteurs pour un gyroscope symétrique. Si la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ est dirigée suivant l'axe de révolution du gyroscope ou suivant une direction perpendiculaire à cet axe, les vecteurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{\omega}$ seront mutuellement parallèles. Pour s'en rendre compte on fera le raisonnement suivant. Subdivisons en pensée le corps du gyroscope en paires de points matériels identiques, symétriques deux à deux par rapport à l'axe de révolution (fig. 145 et 146). Le moment cinétique d'une telle paire de points matériels rapporté au point O est $dL = dm\,[r_1v_1] + dm\,[r_2v_2]$, où dm est la masse de chacun des points matériels. Lorsque le gyroscope est en rotation autour de son axe de révolution (fig. 145), les vitesses v_1 et v_2 ont mêmes module et direction mais des sens

contraires. On a alors $dL = dm\,[v_2\,(r_2 - r_1)]$. Les vecteurs v_2 et $(r_2 - r_1)$ sont orthogonaux à l'axe de rotation du gyroscope et par suite le vecteur dL et le moment cinétique L du gyroscope tout entier seront portés par l'axe de rotation. Le module de L

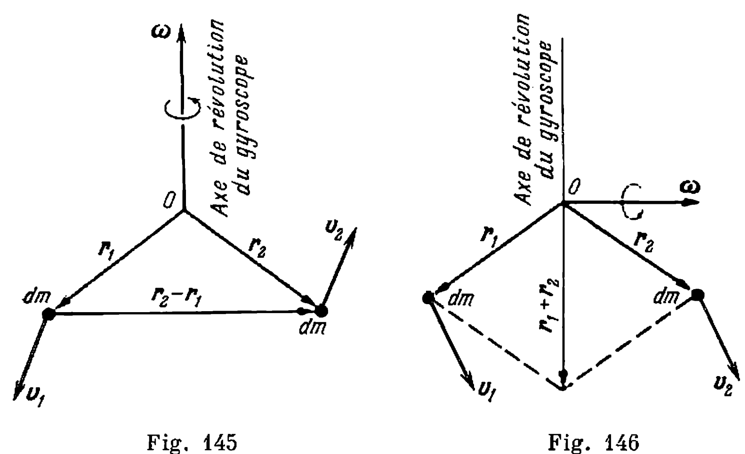


Fig. 145 Fig. 146

étant le même que celui du moment cinétique rapporté à l'axe de rotation, $L = I_{\parallel}\omega$, où $I_{\parallel}$ est le moment d'inertie du gyroscope par rapport à son axe de révolution. Dans le cas où le gyroscope tourne autour de l'axe perpendiculaire à son axe de révolution (fig. 146), on a $v_1 = v_2$ et par suite $dL = dm\,[v_1\,(r_1 + r_2)]$. On en conclut que dL et L sont encore portés par l'axe de rotation avec $L = I_{\perp}\omega$, $I_{\perp}$ étant le moment d'inertie du gyroscope par rapport à l'axe perpendiculaire à son axe de révolution.

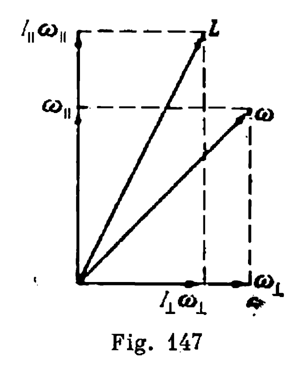


Fig. 147

Supposons maintenant que la direction de l'axe instantané forme un angle arbitraire avec l'axe de révolution. Décomposons le vecteur ω en deux composantes : l'une $\omega_{\parallel}$ dirigée suivant l'axe de révolution du gyroscope et l'autre $\omega_{\perp}$ perpendiculaire à la première (fig. 147). D'après la définition générale du moment cinétique (cf. § 30) il s'exprime par une fonction linéaire des vitesses linéaires des points matériels résultant d'une subdivision imaginaire du corps du gyroscope. Ces vitesses sont elles aussi des fonctions linéaires du vecteur vitesse angulaire ω qui a même valeur pour tous les points du gyroscope. Il en résulte que *le vecteur* L *est une fonction linéaire de* ω, ce qui permet d'écrire $L = L(\omega) = L(\omega_{\parallel} + \omega_{\perp})$ et comme la relation est linéaire $L = L(\omega_{\parallel}) + L(\omega_{\perp})$. En remarquant

que la fonction $L(\omega_{\parallel})$ serait égale au moment cinétique du gyroscope si celui-ci n'était en rotation à la vitesse angulaire $\omega_{\parallel}$ qu'autour de son axe de révolution, on doit avoir $L(\omega_{\parallel}) = I_{\parallel}\omega_{\parallel}$. De même $L(\omega_{\perp}) = I_{\perp}\omega_{\perp}$. On obtient ainsi

$$L = I_{\parallel}\omega_{\parallel} + I_{\perp}\omega_{\perp}. \tag{49.1}$$

A l'aide de cette formule on peut construire le vecteur $\boldsymbol{L}$ connaissant le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ (fig. 147). Cette construction montre que les vecteurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{\omega}$ sont coplanaires à l'axe de révolution du gyroscope. Cependant dans le cas général les directions des vecteurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{\omega}$ sont différentes.

En utilisant la formule (47.2) on déduit de (49.1) les deux expressions suivantes pour l'énergie cinétique d'un gyroscope en rotation

$$K = \frac{1}{2}(I_{\parallel}\omega_{\parallel}^2 + I_{\perp}\omega_{\perp}^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{L_{\parallel}^2}{I_{\parallel}} + \frac{L_{\perp}^2}{I_{\perp}}\right). \tag{49.2}$$

On voit que *l'énergie cinétique d'un gyroscope symétrique est égale à la somme des énergies cinétiques de deux mouvements de rotation, l'un autour de l'axe de révolution et l'autre autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de révolution.*

En pratique un gyroscope est toujours mis en rotation rapide autour de son axe de révolution. En comparaison de cette rotation rapide, tout mouvement de rotation autour de l'axe perpendiculaire, qui peut apparaître pour diverses causes, est une rotation *lente*. Il s'ensuit que la différence entre les directions des vecteurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{\omega}$ est alors très petite, et qu'elles coïncident pratiquement toutes deux avec la direction de l'axe de révolution du gyroscope.

Par convention, le sens positif de l'axe de révolution du gyroscope coïncide avec le sens du vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ (en fait ce vecteur forme avec l'axe de révolution un angle aigu). Si, prenant pour origine le point de suspension O, on porte sur l'axe de révolution un segment de droite OS de longueur unitaire orienté dans le sens positif de cet axe, l'extrémité S de ce segment de droite est désignée sous le nom de *sommet du gyroscope*. Le mouvement du gyroscope est complètement déterminé si on connaît le mouvement du sommet du gyroscope et sa vitesse angulaire de rotation autour de l'axe de révolution. Le principal objectif de la théorie du gyroscope consiste à déterminer le mouvement du sommet du gyroscope et la vitesse angulaire de rotation autour de son axe de révolution.

4. Toute la théorie du gyroscope se fonde sur l'équation des moments

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}, \tag{49.3}$$

les moments $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{M}$ étant rapportés au point de suspension fixe O du gyroscope. Si le moment $\boldsymbol{M}$ des forces extérieures est nul, le gyroscope est dit *libre*. Pour un gyroscope libre $\dot{\boldsymbol{L}} = 0$ et par suite

$$\boldsymbol{L} \equiv I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp} = \text{const.} \tag{49.4}$$

Cette équation exprime la conservation du moment cinétique du gyroscope. On doit lui adjoindre l'équation exprimant la conservation de l'énergie

$$K \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(I_{\parallel}\omega_{\parallel}^2 + I_{\perp}\omega_{\perp}^2) = \text{const}, \tag{49.5}$$

qui est également une conséquence de (49.3). Elevons (49.4) au carré

$$I_{\parallel}^2\omega_{\parallel}^2 + I_{\perp}^2\omega_{\perp}^2 = \text{const.}$$

Il résulte de ces deux dernières équations que *dans le mouvement d'un gyroscope libre les modules des vecteurs* $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$ *et* $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ *restent constants*; *restent également constantes les deux composantes du moment cinétique*: $L_{\parallel} = I_{\parallel}\omega_{\parallel}$ *et* $L_{\perp} = I_{\perp}\omega_{\perp}$. L'équation (49.5) montre ainsi que *l'angle entre les vecteurs* $\boldsymbol{L}$ *et* $\boldsymbol{\omega}$ *est constant*; $L_{\parallel}$ *et* $L_{\perp}$ *étant constants*, *l'angle entre le vecteur* $\boldsymbol{L}$ *et l'axe de révolution du gyroscope doit être constant*. A tout instant l'axe de révolution du gyroscope effectue une rotation autour de l'axe instantané avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$. Nous avons vu que les vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{L}$ sont coplanaires à l'axe de révolution du gyroscope et comme la direction de $\boldsymbol{L}$ est invariable dans l'espace, l'axe instantané et l'axe de révolution doivent tourner autour de cette direction invariable à la même vitesse angulaire. Nous arrivons ainsi à la description suivante du mouvement d'un gyroscope libre.

A tout instant le mouvement d'un gyroscope libre est une rotation autour de l'axe instantané passant par le point de suspension fixe. Les positions dans le corps du gyroscope de l'axe instantané et du vecteur $\boldsymbol{L}$ *varient avec le temps en décrivant des cônes autour de l'axe de révolution à la même vitesse angulaire* ω_1 *qui est généralement différente de* $\boldsymbol{\omega}$. *Autour de la direction du vecteur* $\boldsymbol{L}$ *invariable dans l'espace tournent à la même vitesse angulaire* ω_1 *mais en sens opposé l'axe de révolution du gyroscope et l'axe instantané*. Ce mouvement s'appelle *précession régulière libre du gyroscope*. En notant que la précession est régulière, on entend qu'aucune irrégularité n'apparaît dans les rotations coniques de l'axe de révolution et de l'axe instantané.

5. Si un gyroscope de grand moment d'inertie est mis en rotation rapide, il présentera un grand moment cinétique. Selon (49.3) l'accroissement du moment cinétique est donné par l'intégrale

$$\Delta\boldsymbol{L} = \int \boldsymbol{M}dt. \tag{49.6}$$

Si une force extérieure n'agit sur le gyroscope que pendant un temps court, la valeur de l'intégrale (49.6) et donc celle de l'accroissement du moment cinétique seront petites. Cela signifie que si un gyroscope libre est soumis pendant un temps court même à une force importante, son mouvement n'en sera que peu affecté.

Tout se passe comme si le gyroscope oppose une résistance à tout effort tendant à modifier la grandeur et la direction de son moment cinétique. C'est ce qui détermine la remarquable stabilité du mouvement d'un gyroscope dès que sa rotation est devenue rapide.



Fig. 148

Prenons un gyroscope massif de forme conique (fig. 148) tel que l'on puisse visser, sur son axe de révolution, une tige dont l'extrémité effilée servira de point de suspension. La tige doit être introduite dans le corps conique du gyroscope à une profondeur telle que le point de suspension coïncide avec le centre de masse du gyroscope ; le gyroscope est alors équilibré. Quelle que soit l'inclinaison de son axe de révolution, il se trouvera dans un état d'équilibre indifférent. Tant qu'il n'est pas en rotation, le moindre choc suffit pour le rejeter loin de sa position d'équilibre. Mettons-le maintenant en rotation rapide autour de son axe de révolution. Si on frappe fortement sur sa tige avec un bâton, la direction de la tige ne changera presque pas, mais commencera à exécuter une précession régulière libre qui est un mouvement de rotation sur la surface d'un cône de faible ouverture. L'axe de ce cône sera la direction que prendra le moment cinétique du gyroscope après avoir reçu un coup de bâton.

Voici une autre illustration de la stabilité de mouvement d'un gyroscope en rotation rapide. Prenons un gyroscope constitué par un volant métallique massif placé à l'intérieur d'une sphère métallique creuse constituée par deux hémisphères démontables. Les extrémités de l'axe du volant sont placées dans des coussinets fixés dans la sphère creuse, de sorte que le volant peut tourner autour d'un diamètre de la sphère. On enroule sur l'axe du volant un fil dont l'extrémité libre sort par un trou pratiqué dans la sphère creuse. En tirant sur le fil on imprime au volant une rotation rapide. Si on s'applique maintenant à faire descendre cette sphère le long d'un plan incliné, on constatera qu'elle oppose une résistance notable. La

sphère ne devient « obéissante » que si l'axe du volant est horizontal et perpendiculaire à la direction de roulement le long du plan incliné. Dans cette position, la sphère peut dévaler la pente sans que se modifie la direction de l'axe du volant, donc sans que varie la direction du vecteur moment cinétique $\boldsymbol{L}$. Dans toute autre position, le roulement de la sphère le long du plan incliné ne devient possible qu'après modification de la direction de l'axe du volant et donc du vecteur $\boldsymbol{L}$. Or le gyroscope «ne veut pas le faire ». Sous l'action de la pesanteur la sphère gyroscopique acquiert un mouvement de rotation lent et dévale la pente « de côté » cherchant à maintenir inchangée l'orientation spatiale de l'axe du volant.

Si on place cette sphère avec un volant tournant sur la pointe d'une aiguille, elle ne tombera pas, même si elle est en position inclinée (fig. 149) ; sous l'action de la pesanteur, elle se met à tourner lentement autour de l'axe vertical. Ce mouvement de rotation porte le nom de *précession stimulée* ; nous l'étudierons au paragraphe suivant.



Fig. 149

6. Voyons maintenant ce que deviendra l'équation fondamentale (49.3) si le point de suspension est mobile. La réponse à cette question nous est fournie par l'équation (37.2). Représentons la vitesse de chaque point du gyroscope en mouvement par $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{\text{rot}}$, où $\boldsymbol{v}_O$ est la vitesse du point de suspension O et $\boldsymbol{v}_{\text{rot}} = [\boldsymbol{\omega r}]$ la vitesse additionnelle due à la rotation autour du point O. Le moment cinétique par rapport au point de suspension est alors

$$\boldsymbol{L} = \int dm\,[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}_O] + \boldsymbol{L}_{\text{rot}},$$

où $\boldsymbol{L}_{\text{rot}}$ est le moment cinétique dû à la rotation seule. En introduisant le rayon vecteur $\boldsymbol{r}_C$ du centre de masse, on a

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{\text{rot}} + m\,[\boldsymbol{r}_C\boldsymbol{v}_O]. \tag{49.7}$$

En dérivant cette équation et en portant le résultat dans (37.2) on obtient

$$\dot{\boldsymbol{L}}_{\text{rot}} = \boldsymbol{M} - m\,[\boldsymbol{r}_C\dot{\boldsymbol{v}}_O]. \tag{49.8}$$

Cette formule montre que l'on peut se dispenser de prendre en considération le mouvement du point de suspension, à condition d'ajouter au moment des forces actives $\boldsymbol{M}$ le moment d'une « force fictive », ou « force d'inertie » $\boldsymbol{F}_{\text{in}} = -m\dot{\boldsymbol{v}}_O$, appliquée au centre de masse

du gyroscope. Cette conclusion devient encore plus évidente si on rapporte le mouvement à un référentiel dans lequel le point de suspension du gyroscope est immobile (cf. ch. IX).

§ 50. Action des forces sur le gyroscope. Théorie approchée

1. Le mouvement le plus intéressant du gyroscope est la *précession stimulée* qui apparaît dès qu'on le soumet à l'action de forces extérieures. Considérons, par exemple, le schéma de principe du gyroscope représenté sur la figure 150. Il est constitué de deux

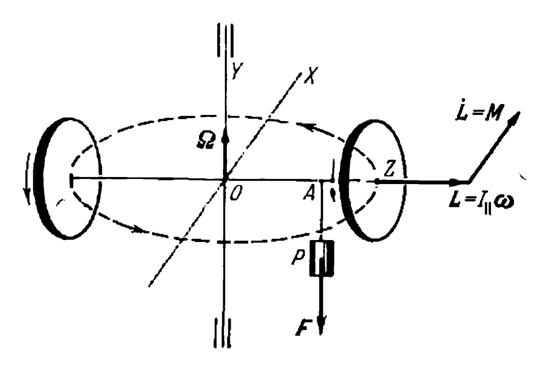


Fig. 150

volants identiques librement emmanchés sur un axe commun. Le gyroscope est conçu de telle sorte qu'il peut tourner librement non seulement autour de son axe de révolution OZ, mais aussi autour des axes vertical OY et horizontal OX. On dit alors qu'il possède *trois degrés de liberté*. Appliquons en un point A de l'axe de révolution une force constante $\boldsymbol{F}$; ce pourrait être, par exemple, un petit corps pesant P attaché en ce point. Tant que les volants sont immobiles, on observe l'effet normal: sous l'action du poids le volant de droite s'abaisse et le volant de gauche se relève par rapport à l'horizontale.

Mais le mouvement devient tout autre si les volants ont été préalablement mis en rotation rapide, de même sens pour les deux volants *). Dans ce cas l'axe de révolution du gyroscope ne penche plus du côté où est suspendu le poids P, mais commence à exécuter une rotation lente à vitesse constante autour de l'axe vertical OY.

*) Dans les expériences en salle de cours le volant du gyroscope est mis en rotation rapide en le mettant en contact avec la jante de la poulie d'un moteur électrique. Il existe des gyroscopes où le rôle du volant est assumé par des moteurs électriques à champ magnétique tournant que l'on alimente en courant triphasé.

Cette rotation est une *précession stimulée* qui s'interprète le plus simplement par la *théorie approchée du gyroscope.* On cherche toujours à mettre le gyroscope en rotation rapide autour de son axe de révolution. Mais pour diverses raisons il acquiert aussi une rotation autour d'un axe orthogonal. Les effets spécifiquement gyroscopiques se manifestent lorsque cette rotation est lente par comparaison avec la rotation autour de l'axe de révolution, mais dans la théorie approchée on néglige cette rotation lente. Cela revient à négliger dans la formule (49.4) le deuxième terme, ce qui revient à écrire

$$\boldsymbol{L} \approx I_{\|}\boldsymbol{\omega}_{\|} \approx I_{\|}\boldsymbol{\omega}. \tag{50.1}$$

Dans cette approximation les vecteurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{\omega}$ ont même direction et sont orientés suivant l'axe de révolution du gyroscope. Les particularités du mouvement de l'axe de révolution se reflètent dans les variations de la direction du vecteur $\boldsymbol{L}$ qui sont décrites par (49.3). Si on assimile $\boldsymbol{L}$ à un rayon vecteur, la dérivée $\dot{\boldsymbol{L}}$ peut être assimilée à la vitesse du mouvement de l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{L}$. Supposons que le point d'application de la force extérieure $\boldsymbol{F}$ se trouve sur l'axe de révolution du gyroscope. Le moment de cette force est $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{aF}]$, où $\boldsymbol{a}$ est le rayon vecteur mené du point de suspension du gyroscope au point d'application de la force $\boldsymbol{F}$. D'après l'équation (49.3) le vecteur « vitesse » $\dot{\boldsymbol{L}}$ doit être orthogonal à l'axe de révolution Z du gyroscope. Le moment de la force $\boldsymbol{M}$ peut modifier la direction du vecteur $\boldsymbol{L}$ mais non son module. Il en résulte que si la force extérieure $\boldsymbol{F}$ est constante, aussi bien le vecteur $\boldsymbol{L}$ que l'axe de révolution du gyroscope doivent exécuter une rotation régulière autour de l'axe OY. Cette rotation est la précession stimulée. Le vecteur vitesse angulaire de précession $\boldsymbol{\Omega}$ est dirigé dans le cas considéré suivant l'axe OY.

Si on fait tourner un volant dans un sens et l'autre en sens contraire (cf. fig. 150) mais avec la même vitesse angulaire, il n'y aura pas de précession. En effet, $\boldsymbol{L}$ est alors nul et, sous l'action du poids $\boldsymbol{P}$, le gyroscope bascule autour de l'axe horizontal OX, tout comme dans le cas où les volants ne tournent pas.

2. Calculons le module du vecteur $\boldsymbol{\Omega}$. Le vecteur $\boldsymbol{L}$ ne varie que par suite de sa rotation à la vitesse angulaire de précession $\boldsymbol{\Omega}$. La vitesse linéaire du déplacement de son extrémité (c'est la dérivée $\dot{\boldsymbol{L}}$) est $\dot{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{\Omega L}]$. On tire alors de (49.3)

$$[\boldsymbol{\Omega L}] = \boldsymbol{M}. \tag{50.2}$$

Cette équation permet de calculer la vitesse angulaire de précession $\boldsymbol{\Omega}$. Comme dans l'exemple considéré le vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ est perpendiculaire à l'axe de révolution

$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{I_{\|}\omega}. \tag{50.3}$$

Il est tout aussi facile de déterminer $\boldsymbol{\Omega}$ dans le cas plus général où l'axe de révolution du gyroscope est incliné par rapport à l'axe autour duquel s'effectue la précession. Il suffit de porter dans (50.2) l'expression $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{aF}] = a\,[\boldsymbol{sF}]$, où $\boldsymbol{s}$ est un vecteur unitaire porté par l'axe de révolution du gyroscope. Comme dans la théorie approchée on confond la direction de $\boldsymbol{L}$ avec l'axe de révolution, on a $\boldsymbol{L} = L\boldsymbol{s}$. L'équation (50.2) se met alors sous la forme

$$L\,[\boldsymbol{\Omega s}] = a\,[\boldsymbol{sF}],$$

d'où

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{a}{L}\boldsymbol{F} = -\frac{a}{I_{\parallel}\omega_{\parallel}}\boldsymbol{F}. \qquad (50.4)$$

Ces considérations ne sont valables que si $\Omega \ll \omega$, donc pour une rotation rapide du gyroscope. *La rotation du gyroscope est considérée comme rapide si la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe de révo-*

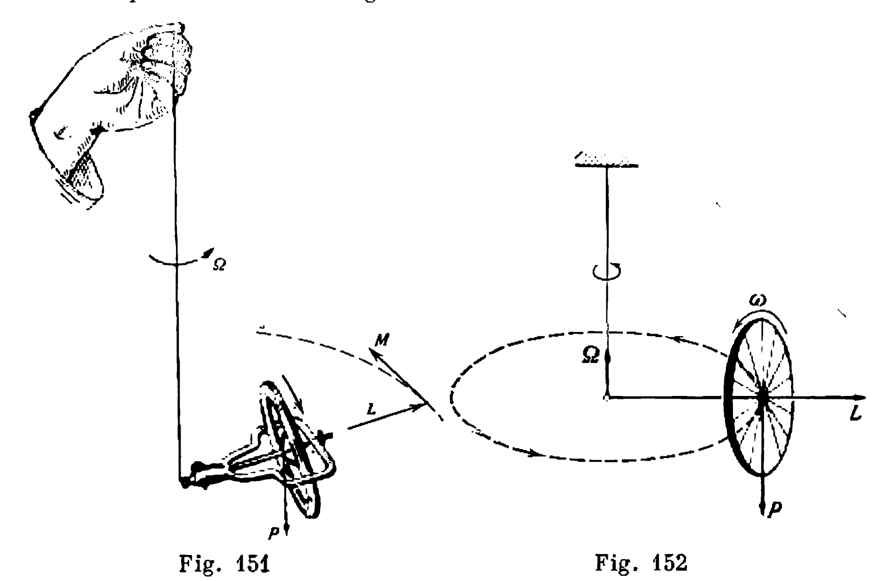


Fig. 151 Fig. 152

lution $\omega_{\parallel}$ *est très grande par rapport à la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe orthogonal* $\omega_{\perp}$. Elle doit être aussi très grande par rapport à la vitesse angulaire de précession Ω. Pour les gyroscopes rapides utilisés en technique, la quantité Ω est des millions de fois plus petite que ω.

3. Pour faire une démonstration de la précession stimulée il n'est pas nécessaire que le gyroscope comporte deux volants; on peut fort bien utiliser un gyroscope à un seul volant. La figure 151 représente un gyroscope à volant unique suspendu au bout d'un fil. Le moment de rotation $\boldsymbol{M}$ est alors créé par le poids propre $\boldsymbol{P}$ du

volant et c'est lui qui provoque la précession autour de l'axe vertical. Cette même expérience est schématisée sur la figure 152 à une plus grande échelle. Une roue de vélo massive, munie d'un axe long et mise en rotation rapide, y figure le volant. Cette roue est suspendue par l'extrémité libre de son axe à une corde longue. Si on dispose l'axe de la roue dans une position sensiblement horizontale, on voit la roue précessionner autour de l'axe vertical sous l'action de son propre poids. Cette expérience est fort spectaculaire, car on est surpris de voir la roue décrire une trajectoire circulaire au lieu de s'abaisser sous l'action de son propre poids.

4. Remarquons que pour observer la précession sous l'action du poids propre du gyroscope on peut se passer de fil de suspension. On peut prendre un gyroscope symétrique à point de suspension fixe situé sur l'axe de révolution. Le point de suspension peut se trouver au-dessous du centre de masse du gyroscope (c'est le cas de la toupie) ou au-dessus. Dans ce dernier cas le gyroscope porte le nom de *pendule gyroscopique*. Dans les deux cas la vitesse angulaire de précession $\mathbf{\Omega}$ est donnée par la formule (50.4) où on pose $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$. La période de précession $T = 2\pi/\Omega$ est donnée par

$$T = 2\pi \frac{I_{\parallel}\omega}{amg}. \tag{50.5}$$

S'il s'agit d'un pendule gyroscopique, on peut faire correspondre à sa *période T* une *longueur réduite l*:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{50.6}$$

Elle est égale à

$$l = \frac{I_{\parallel}^2\omega^2}{m^2a^2g}. \tag{50.7}$$

Pour de grandes vitesses de rotation ω et de petites valeurs de a, la longueur réduite du pendule peut être très grande et sa période peut atteindre quelques dizaines de minutes. La direction de l'axe de révolution du pendule gyroscopique n'est que très faiblement affectée par l'application de forces de faible durée. Les pendules gyroscopiques sont utilisés à bord des avions et des navires en qualité d'horizon artificiel (cf. § 52) et de verticale artificielle.

Exemple. Le gyroscope d'un certain type d'horizon artificiel pour avion possède les caractéristiques techniques suivantes: $m = 5 \cdot 10^3$ g, $I_{\parallel} = 8 \cdot 10^4$ g·cm², $a = 0{,}25$ cm. Sa vitesse de rotation est de 20 000 tours/mn et la vitesse angulaire est donc $\omega = 2094$ rad/s. En portant ces données dans (50.6) et (50.7) nous trouverons $l = 180$ km, $T = 860$ s $= 14$ mn 20 s. La vitesse angulaire de la précession stimulée est d'environ $1{,}7 \cdot 10^6$ fois plus petite que la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe de révolution du gyroscope.

5. A première vue, le comportement d'un gyroscope exécutant un mouvement de précession stimulée semble mettre en défaut la loi de conservation de

l'énergie. En l'absence du poids P, l'axe de révolution du gyroscope restait immobile (cf. fig. 150). Mais dès qu'on lui attache le poids P le gyroscope commence à précessionner. A ce mouvement correspond une énergie cinétique supplémentaire. Quelle est l'origine de cette énergie supplémentaire? La seule force susceptible de communiquer au gyroscope de l'énergie cinétique est le poids P. Or cette force est dirigée vers le bas et est orthogonale à la direction de la précession; elle ne produit donc aucun travail. La réponse à cette question, ainsi qu'à d'autres encore, est donnée par la *théorie exacte du gyroscope*, que nous exposerons au § 52. Ici nous nous limitons à ces considérations préalables, essentiellement qualitatives.

6. Etudions le mécanisme d'excitation d'une précession régulière. Soit un gyroscope tournant à une vitesse angulaire $\omega_{\parallel}$ autour de son axe de révolution qui exécute une rotation supplémentaire uniforme à une vitesse angulaire Ω

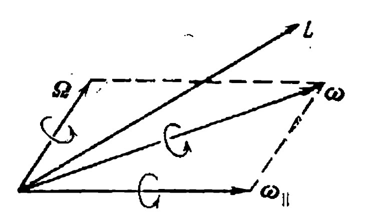


Fig. 153

autour d'un axe fixe incliné d'un angle quelconque par rapport à l'axe de révolution (fig. 153). Quelles conditions doivent être satisfaites pour que ce mouvement devienne possible? A la rotation propre autour de l'axe de révolution du gyroscope à une vitesse angulaire ω vient s'ajouter une rotation supplémentaire autour du même axe à une vitesse angulaire $\Omega_{\parallel}$. De plus le gyroscope exécute une rotation autour de l'axe orthogonal à une vitesse angulaire $\omega_{\perp} = \Omega_{\perp}$. Le moment cinétique du gyroscope est donc $L_{\parallel} = I_{\parallel}(\omega_{\parallel} + \Omega_{\parallel}) + I_{\perp}\Omega_{\perp}$. Calculons sa dérivée par rapport au temps. Etant donné que les trois vecteurs $\omega_{\parallel}$, $\Omega_{\parallel}$ et $\Omega_{\perp}$ exécutent une rotation uniforme à une vitesse angulaire Ω, le vecteur L doit tourner à cette même vitesse. Par suite, sa dérivée par rapport au temps est $\dot{L} = [\Omega L]$. Mais l'équation des moments impose que $\dot{L} = [\Omega_{\text{préc}} L]$, où $\Omega_{\text{préc}}$ est la vitesse angulaire de la précession régulière déterminée par l'action du moment des forces extérieures $M = [aF]$. Cette vitesse angulaire est déterminée par l'équation (50.2). Il s'ensuit que le mouvement considéré du gyroscope est possible, c'est-à-dire compatible avec les équations de la mécanique, si $\Omega = \Omega_{\text{préc}}$. Ces considérations, parfaitement exactes, montrent que *la précession régulière stimulée par la force extérieure constante F est un des mouvements bien définis que peut exécuter un gyroscope*. Mais un tel mouvement ne peut s'établir qu'avec des conditions initiales bien déterminées. A l'instant initial on doit évidemment communiquer au sommet du gyroscope une vitesse initiale $v_0 = [\Omega s]$, c'est-à-dire mettre en rotation uniforme l'axe de révolution du gyroscope avec une vitesse angulaire Ω. L'énergie requise pour ce faire est fournie par une poussée extérieure et il n'y a aucune contradiction avec la loi de conservation de l'énergie. Lorsque l'action de la poussée extérieure aura cessé, le mouvement de précession du gyroscope sera maintenu par la force extérieure F. Ainsi *la force extérieure ne provoque pas la précession régulière mais ne fait que l'entretenir*.

Le comportement du gyroscope exécutant une précession régulière stimulée est dans un certain sens analogue au comportement d'une bille attachée à un

fil et effectuant une rotation uniforme sur une trajectoire circulaire. La tension du fil attire la bille vers le centre du cercle, mais la bille se meut tout le temps perpendiculairement au fil. La tension du fil ne crée pas mais entretient le mouvement circulaire uniforme. Pour mettre la bille en mouvement, il faut lui communiquer une poussée latérale. La force de tension ne modifie que la direction de la vitesse, sans affecter son module. En usant de cette analogie, le déplacement de l'axe de révolution du gyroscope lors d'une précession stimulée régulière semblera peut-être moins étrange qu'au premier abord.

7. Les considérations ci-dessus n'ont pas apporté de réponse à la question de la conservation de l'énergie. Lorsque nous suspendons un poids sur l'axe du gyroscope (cf. fig. 150) aucune poussée n'est communiquée au gyroscope, mais il commence aussitôt à précessionner. La réponse à la question posée se fonde sur le fait que dans le cas considéré la précession *n'est pas régulière*. Au mouvement de précession du sommet du gyroscope se superposent de petites rotations et des vibrations, qui portent le nom de *nutations*. Par superposition des nutations au mouvement de précession, le sommet du gyroscope décrit des trajectoires se composant de festons de hauteur très petite et ayant des formes différentes : *en boucle*, *cycloïdales*, *sinusoïdales* (cf. fig. 169, *a*, *b*, *c*). Nous reviendrons sur cette question plus en détail au § 52. La forme de la trajectoire que décrit le sommet dépend de la vitesse initiale communiquée à l'axe de révolution du gyroscope. Il est facile de faire la démonstration de nutations importantes. Attachons une petite masse pesante à l'une des extrémités de l'axe d'un gyroscope exécutant une rotation modérée (cf. fig. 150). Si on abandonne sans secousse cette masse pesante à elle-même, le sommet décrira une trajectoire à festons cycloïdaux (cf. fig. 169, *b*). Mais si on imprime au gyroscope une poussée latérale dans le sens opposé à celui de la précession produite par la masse pesante, on verra apparaître sur la trajectoire des boucles (cf. fig. 169, *a*). Si la poussée que l'on imprime au gyroscope est dans le sens de la précession, la trajectoire présentera des festons sinusoïdaux (cf. fig. 169, *c*). Dans ce dernier cas, si la poussée est assez énergique, la trajectoire peut devenir circulaire et la précession régulière.

Lorsque nous abandonnons à lui-même le poids que nous avons attaché à l'axe du gyroscope, il commence à s'abaisser sous l'action de la pesanteur. Simultanément l'extrémité du vecteur moment cinétique L acquiert une composante de vitesse latérale conformément à l'équation $\dot{L} = M$. Le vecteur L cesse donc d'être parallèle à l'axe de révolution du gyroscope ; en conséquence la trajectoire du sommet s'incurve et des nutations apparaissent. Le travail produit par la force de pesanteur lorsque la masse pesante s'abaisse sert à augmenter l'énergie cinétique du mouvement de précession-nutation. Arrivée à sa position la plus basse, la masse pesante commence à s'élever et l'énergie cinétique du mouvement de précession-nutation se convertit en énergie potentielle de la masse pesante en position relevée. Ainsi se produit une succession de conversions d'énergie potentielle en énergie cinétique et vice versa. Il n'y a donc aucun écart à la loi de la conservation de l'énergie.

Si la nutation est très petite, la précession est dite *quasi régulière*. Dans les gyroscopes techniques à grandes vitesses de rotation, la précession quasi régulière ne se distingue pratiquement pas d'une précession régulière. Les nutations s'y présentent sous forme de vibrations de très petite amplitude et de grande fréquence de l'axe de révolution et n'exercent aucune influence sur l'étude du mouvement de précession fondamentale (voir exemple 8 au § 52). D'ailleurs les petites nutations s'amortissent rapidement par frottement et la précession quasi régulière cède la place à la précession régulière.

8. L'existence de mouvements de nutation est la cause d'un autre comportement du gyroscope, qui peut sembler paradoxal. D'après (49.3) le moment cinétique L du gyroscope ne varie que sous l'action de forces extérieures. Dès que cesse l'action des forces extérieures, cesse aussitôt la variation du vecteur L et donc la précession du gyroscope. L'axe de révolution du gyroscope devient

fixe. Cette *absence d'inertie* de l'axe de révolution ne contredit-elle pas la loi d'inertie ? Une telle contradiction existerait bien si l'absence d'inertie concernait le mouvement de l'axe de révolution lui-même. Mais en réalité l'absence d'inertie concerne non pas l'axe de révolution, mais le vecteur L. C'est la théorie approchée du gyroscope, qui ne tient pas compte des nutations, qui nous amène à conclure à l'absence d'inertie de l'axe de révolution. Mais dès que l'on fait intervenir les nutations les contradictions avec la loi d'inertie sont levées.

9. D'après ce qui a été dit au point 6 *la précession régulière stimulée doit durer indéfiniment si le moment M des forces extérieures qui l'entretiennent reste constant.* Par exemple, sous l'action du poids P, le gyroscope de la figure 150 aurait dû rester en précession autour de l'axe vertical Y pendant un temps indéfiniment long, le poids P restant tout le temps à la même hauteur. En fait, le poids P descend lentement et continuellement. La cause en est l'action des *forces de frottement* et d'autres *forces de freinage* qui, ensemble, créent un *moment de rotation de freinage* M_1 dirigé suivant la verticale descendante, donc dans le sens négatif de l'axe Y (cf. fig. 150). Ainsi le moment total des forces extérieures appliquées au gyroscope est $M + M_1$. D'après l'équation fondamentale (49.3) la dérivée $\dot{L}$, c'est-à-dire la vitesse linéaire de rotation de l'extrémité du vecteur L, est dirigée suivant le moment résultant $M + M_1$. Cette vitesse possède une composante verticale suivant M_1. C'est pour cela que l'extrémité du vecteur L et le poids P s'abaissent. On peut dire que *le moment du freinage M_1 fait apparaître une précession supplémentaire autour de l'axe horizontal X, qui détermine l'abaissement du poids P.*

Il est facile de confirmer par l'expérience la validité de cette interprétation. Imprimons au gyroscope en précession de petites poussées dans le sens contraire à celui de la précession déterminée par le poids P. Celui-ci commencera à s'abaisser. Si les poussées se font dans le même sens que la précession, le poids se relève. Dans le premier cas nous faisons apparaître un moment de rotation M_1 dirigé suivant la verticale descendante et dans le second suivant la verticale ascendante. Ce moment crée une rotation de précession autour de l'axe horizontal X en abaissant ou relevant le poids P. Ainsi, *si on essaie de rendre la précession plus rapide, le gyroscope réagit en relevant le poids suspendu et si on essaie de la ralentir, on voit aussitôt le poids s'abaisser.*

10. Il est instructif d'interpréter cette règle dans le cadre du *principe de Le Chatelier* (1850-1936) qui est un principe général de Physique. Selon ce principe, que Le Chatelier avait établi à la suite de l'étude de certains cas particuliers, *un système soumis à une action extérieure réagit de telle sorte que l'action exercée s'en trouve affaiblie.* Lorsque nous attachons à l'axe de révolution du gyroscope une petite masse pesante, il réagit contre cette intervention par un mouvement de précession. Du point de vue du principe de Le Chatelier cette précession constitue la réaction du gyroscope qui

affaiblit l'effet de l'action extérieure en empêchant le poids de s'abaisser. Il est évident que si on renforce artificiellement la réaction du gyroscope en augmentant la vitesse da la précession, la masse pesante *doit se relever*. Inversement, une diminution artificielle de la vitesse de précession du gyroscope équivaut à une *réduction de sa réaction contre l'action exercée par la masse pesante* qui *devra* donc *s'abaisser*. Cette approche peut rendre service dans l'étude des dispositifs gyroscopiques de stabilisation lorsqu'il importe de trouver rapidement ce qu'il faut faire pour améliorer l'effet stabilisateur du gyroscope.

11. Il est maintenant facile d'expliquer le comportement d'un gyroscope *à deux degrés de liberté*. Pour qu'un gyroscope libre soit stable et pour que, soumis à l'action de forces extérieures, il puisse exécuter une précession stimulée comme indiqué plus haut, il faut qu'il possède *trois degrés de liberté*, c'est-à-dire qu'il soit apte à tourner librement autour de trois axes passant par le point de suspension O. Un de ces axes est l'axe de révolution du gyroscope dont la rotation autour de cet axe est la condition *sine qua non* de son fonctionnement. Réalisons une fixation du gyroscope de façon à rendre impossible sa rotation autour de l'un des deux autres axes. Dans ce cas le gyroscope ne dispose plus que de deux degrés de liberté. Soit un gyroscope équilibré dont la rotation autour de l'axe vertical OY est bloquée (cf. fig. 150). Si on lui attache une masse pesante il commencera à tourner autour de l'axe horizontal OX, tout comme un quelconque corps solide, la masse pesante P s'abaissant dans le sens de la force de pesanteur F. Ce changement radical du comportement du gyroscope s'explique par la même règle de précession. La force F crée un moment M qui doit chercher à provoquer un mouvement de précession autour de l'axe vertical OY, mais comme cet axe est bloqué, la précession ne peut se produire et le seul effet produit sera l'apparition d'une déformation de torsion dans l'axe vertical. Les paliers appliqueront alors à cet axe déformé un moment rotatoire dirigé le long de la verticale descendante. C'est ce moment qui fera apparaître la précession du gyroscope autour de l'axe horizontal OX. Comme rien ne s'oppose à ce mouvement de rotation, le gyroscope précessionnera et on verra le poids P s'abaisser. On pourrait dire que l'axe à l'état de torsion freine la précession qui aurait dû se produire sous l'action du poids P et que c'est ce freinage qui détermine l'abaissement du poids.

Si, en l'absence de masse pesante attachée au gyroscope, on donne une poussée dirigée vers le haut ou vers le bas à l'une des extrémités de l'axe de révolution du gyroscope, celui-ci continuera à tourner par inertie autour de l'axe horizontal OX dans le sens de la poussée. Dans ce cas aussi, durant la poussée, le gyroscope cherchera à précessionner autour de l'axe vertical OY qui, étant bloqué, sera soumis à une torsion ; sous l'action du couple de torsion

le sommet du gyroscope devra se relever ou s'abaisser, ce qui revient à une précession autour de l'axe horizontal OX dans le sens de la poussée qui l'avait mis en branle. Tant que durera cette précession l'axe vertical sera soumis à une contrainte de torsion.

On étudiera de la même façon le comportement du gyroscope dont l'axe horizontal OX serait bloqué.

12. Généralement le centre de masse d'une toupie se trouve au-dessus de son point de suspension. Pour que la toupie ne se couche pas sur le côté, il faut lui communiquer une grande vitesse de rotation autour de son axe de révolution. Si la vitesse de rotation est petite, la position verticale de l'axe de révolution

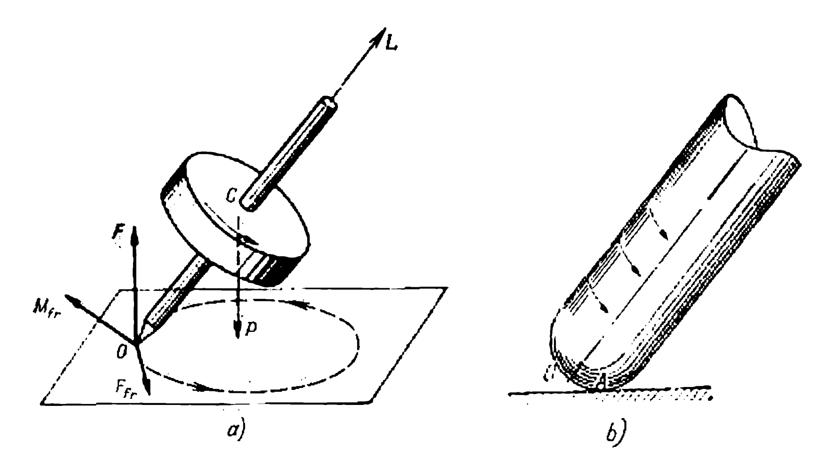


Fig. 154

devient instable et la toupie tombe. Si on met en rotation une toupie se trouvant dans une position inclinée, son centre de masse se relève et la toupie prend une position verticale. Ce sont les forces de frottement appliquées au point de suspension qui produisent cet effet.

Voyons d'abord quel serait le mouvement de la toupie s'il n'y avait pas de forces de frottement. Supposons que le plan d'appui de la toupie est horizontal et parfaitement lisse. La toupie est soumise à l'action de deux forces: son propre poids $\boldsymbol{P}$ et la force de pression normale $\boldsymbol{F}$ issue du plan d'appui (fig. 154, *a*). Le moment de ces forces est perpendiculaire au plan de la feuille et pointe en arrière de celle-ci. Ce moment détermine la précession de la toupie autour de l'axe vertical. Pour l'étude de cette précession nous utiliserons l'équation des moments par rapport au centre de masse C. Cette équation se présente sous sa forme usuelle (49.3). Si la précession est régulière, le centre de masse est immobile et par suite $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{P} = 0$ en vertu du théorème de mouvement du centre de masse. Le moment de la force de pression normale $\boldsymbol{F}$ déplace le sommet de la toupie en arrière du plan de la feuille. La toupie précessionnera dans le même sens que celui de sa rotation autour de l'axe de révolution. Comme le centre de masse est immobile, c'est le point de suspension O qui décrira une trajectoire circulaire, la parcourant dans le sens indiqué par les flèches sur la figure 154, *a*.

Tenons maintenant compte des forces de frottement de glissement qui se manifestent lorsque la pointe de la toupie décrit cette trajectoire circulaire. Il est essentiel que la résultante F_{fr} de ces forces de frottement est dirigée dans le sens du déplacement de la pointe de la toupie. Ce résultat tient à ce que la pointe est arrondie, comme représenté à plus grande échelle sur la figure 154, *b*. Si, après avoir mis la toupie en rotation autour de son axe de révolution, on la pose sur le plan d'appui, un glissement se manifeste au point de contact A. Il est évident que la force de frottement de glissement appliquée à la pointe de la toupie est orientée à l'encontre de son sens de rotation, donc dans le sens de son déplacement de précession. On doit remarquer que cette particularité de la force de frottement ne dépend pas des positions relatives du centre de masse et du point d'appui de la toupie. La force de frottement de glissement F_{fr} agit toujours dans le sens du mouvement de précession déterminé par le poids de la toupie et la pression du plan d'appui et cherche à rendre cette précession plus rapide. Conformément à la règle générale, le résultat ne peut être qu'un relèvement du centre de masse de la toupie. Si le centre de masse se trouve plus haut que le point d'appui, ce relèvement du centre de masse placera l'axe de révolution de la toupie près de la verticale.

On peut évidemment envisager la question de plus près. Supposons de nouveau que le centre de masse se trouve au-dessus du point d'appui de la toupie. Le moment des forces de frottement F_{fr} a une composante suivant la verticale ascendante. Ce moment cherche à imprimer un mouvement de précession au vecteur L, ce qui aurait pour résultat de relever le sommet de la toupie. Le centre de masse C étant immobile, le relèvement du sommet devrait s'accompagner d'un abaissement du point d'appui O. Comme la pointe reposant sur le plan d'appui ne peut s'abaisser, la tendance à son abaissement se manifestera par un accroissement de la force de pression normale F. Cette dernière devient alors supérieure au poids P. La résultante non nulle de ces forces est dirigée vers le haut, ce qui a pour effet de relever le centre de masse C, donc de redresser l'axe de la toupie.

La force de frottement F_{fr} a également d'autres effets. Non seulement elle ralentit la rotation de l'axe de la toupie, mais elle met en mouvement son centre de masse et la toupie commence à se déplacer sur le plan d'appui. S'il n'y avait aucune autre force de freinage, la résistance de l'air par exemple, ce mouvement s'accélérerait sans cesse. (C'est une nouvelle confirmation de ce que la force F_{fr} est orientée dans le sens du mouvement de la toupie.) Le glissement doit alors diminuer jusqu'à ce que le mouvement de la toupie devienne un roulement pur. A cet instant, la rotation de la toupie autour de son axe se ralentit à tel point qu'elle devient instable et tombe sous l'action de la pesanteur.

13. On peut expliquer le relèvement de l'axe de la toupie en se fondant sur l'équation des moments par rapport à son point d'appui O. On doit tenir compte de ce que le point d'appui est en mouvement accéléré et donc utiliser l'équation des moments sous sa forme (49.8). Bref, il faut tenir compte des « forces d'inertie » (cf. §§ 63 et 64) qui apparaissent du fait du mouvement accéléré du point d'appui. Dans le cas considéré, c'est la force d'inertie liée à l'accélération tangentielle qui importe. Cette « force » est appliquée au centre de masse C et son sens est contraire à celui de l'accélération tangentielle (sur la fig. 154, *a*, elle pointe derrière la feuille). Son moment par rapport au point d'appui O a une composante suivant la verticale ascendante. Ce moment fait apparaître la précession qui relève le sommet de la toupie.

14. On étudie de la même façon le cas où le centre de masse se trouve au-dessous du point d'appui. Les forces de frottement de glissement qui apparaissent au point d'appui relèvent alors également le centre de masse, mais le sommet de la toupie s'abaisse simultanément. Une toupie mise en rotation en position inclinée s'incline donc encore davantage.

15. Un exemple curieux est la *toupie chinoise* représentée sur la figure 155. A cause de l'action des forces de frottement, le centre de masse de la toupie se

relève constamment, tandis que son axe de révolution s'incline de plus en plus jusqu'au *basculement* de la toupie. L'axe de révolution se rapproche de plus en plus de la verticale à moins que la toupie ne perde sa stabilité par ralentissement de sa rotation axiale.

16. Pour faire tourner l'axe de révolution d'un gyroscope, on doit lui appliquer des forces dont le moment M vérifie l'équation (50.2), où Ω représente la vitesse angulaire de la rotation stimulée. De telles forces apparaissent, par exemple, par pression des coussinets sur l'axe de révolution du gyroscope. L'axe de révolution du gyroscope exerce sur les coussinets des forces de contre-pression égales mais de sens contraire. Ces forces de contre-pression et les couples correspondants sont dits *gyroscopiques**). Il est facile de se rendre compte de l'existence

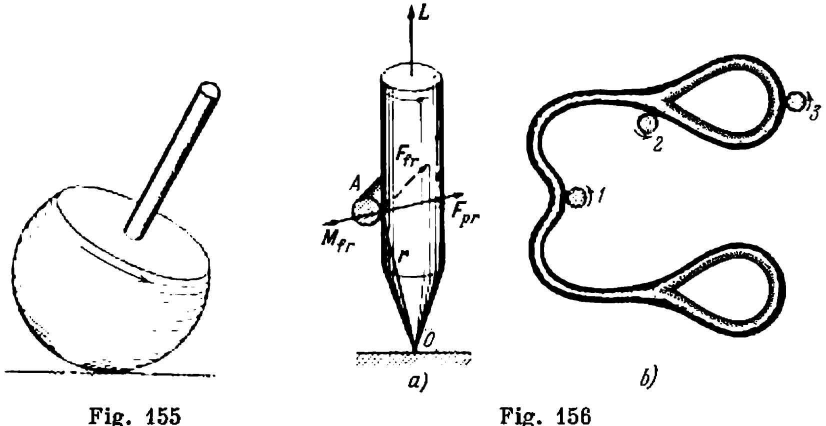


Fig. 155 Fig. 156

tence des forces gyroscopiques; il suffit pour cela de prendre en mains l'axe d'une roue de vélo en rotation et d'essayer de faire tourner l'axe. La roue tendra à s'échapper des mains pour fuir dans une direction perpendiculaire. Si on fait tourner l'axe rapidement, il faut faire un effort considérable pour garder l'axe en main.

Dans l'expérience avec le tabouret de Joukovsky (§ 34, pt. 7) le démonstrateur qui fait tourner l'axe d'une roue de vélo en rotation est soumis à des forces gyroscopiques dont le moment est dirigé suivant la verticale. Ce sont ces forces qui mettent le tabouret en rotation en modifiant sa vitesse angulaire. Les forces gyroscopiques agissent sur les coussinets de l'arbre de la turbine de propulsion d'un navire ou de l'hélice d'un avion lors des variations rapides de la direction. Ces forces déterminent alors des mouvements de lacet. Cet effet ne se remarque que sur les petits navires ou les petits avions.

17. Approchons de l'axe du gyroscope représenté sur la figure 148 une tige horizontale. (L'axe de révolution du gyroscope est représenté sur la figure 156, *a*. La section droite de la tige par le plan de la figure est représentée par un cercle hachuré. On suppose que la tige est perpendiculaire au plan de la figure.) Au contact de l'axe et de la tige apparaît une force de frottement de glissement F_{fr} parallèle à l'axe de la tige et donc perpendiculaire au plan de la figure où elle est représentée par une flèche en pointillé. Le moment de cette force par rapport au point d'appui $M_{fr} = [rF_{fr}]$ se trouve dans le plan de la figure perpendiculairement à la tige et au rayon vecteur r. Ce moment aura tendance à imposer à l'axe du gyroscope un mouvement de précession de même sens, mouvement qu'il

*) Le terme «forces gyroscopiques» a ici un autre sens qu'au § 24.

ne pourra cependant pas exécuter à cause de la tige. Cette tendance à la précession ne se manifestera que par un « collage » de l'axe sur la tige. En conséquence il apparaît une force de pression F_{pr} de la tige sur l'axe du gyroscope. Cette force se manifestera tout d'abord par un accroissement de la force de frottement F_{fr}. D'autre part, elle provoquera une précession de l'axe de révolution du gyroscope qui se déplacera le long de la tige dans le sens de la force F_{fr}, puisque c'est le sens du moment de la force de pression $M_{pr}=[rF_{pr}]$. L'accroissement de la force de frottement F_{fr} entraîne l'accroissement de la force de pression F_{pr} et l'accélération du déplacement de l'axe du gyroscope le long de la tige. Cette accélération ne cessera que lorsque le mouvement de glissement de l'axe de révolution se transformera en un roulement pur. (Dans l'expérience décrite, le temps peut manquer par suite de la variation de l'inclinaison de l'axe de révolution accompagnant son déplacement le long de la tige.) A partir de ce moment la force F_{fr} devient pratiquement nulle, la force F_{pr} devient constante et le mouvement de précession le long de la tige deviendra uniforme.

On peut remplacer la tige par un contour fermé ou ouvert en fil de fer de n'importe quelle configuration. Pour les expériences de démonstration on peut utiliser le contour représenté sur la figure 156, *b*. On fixe le contour en position horizontale à l'aide d'un support à proximité de l'axe de révolution du gyroscope. Si on met en contact l'extrémité supérieure de l'axe du gyroscope avec le contour, on verra l'axe parcourir le contour en passant successivement de la position *1* en position *2*, puis en position *3*, etc. Pendant ces déplacements l'axe du gyroscope s'applique fortement contre le contour. C'est une expérience fort spectaculaire. Cet effet porte le nom de *mouvement sur périmètre*.

PROBLÈMES

1. Le héros d'un roman de Jules Verne proposait de faire tourner l'axe terrestre en tirant un lourd obus. Evaluer la vitesse v minimale d'un obus de masse $m = 1000$ t, tiré à partir du pôle, pour faire tourner l'axe instantané de rotation de la Terre d'un angle $\alpha = 1°$. La masse de la Terre est $M = 6 \cdot 10^{21}$ t. La longueur d'un degré du méridien terrestre est $l = 111$ km. Considérer la Terre comme une sphère homogène (voir problèmes 23 et 24 du § 37).

S o l u t i o n. L'angle α sera maximal lorsque la vitesse v de l'obus sera orthogonale à l'axe terrestre. L'obus emporte un moment cinétique $L = \frac{m\,[rv]}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ qui est orthogonal à la vitesse v. La Terre acquiert le même moment changé de signe, ce qui provoquera une déviation du vecteur vitesse angulaire de rotation de la Terre $\boldsymbol{\omega}$ d'un angle $\alpha = L/I\omega$. En portant dans cette relation $I = {}^2/_5 Mr^2$ et en remarquant que la différence $c - v$ est très petite, on obtient

$$\frac{c-v}{c} \approx \frac{25m^2c^2}{8M^2l^2\omega^2} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-22}.$$

2. Une toupie symétrique, dont l'axe de révolution fait un angle α avec la verticale (voir fig. 154), exécute une précession régulière sous l'action de la force de pesanteur. Le point d'appui O de la toupie étant fixe, calculer l'angle β que fait avec la verticale la force qu'applique la toupie au plan d'appui.

R é p o n s e. $\operatorname{tg}\beta = \frac{a^3m^2g\sin\alpha}{I_\parallel^2\omega^2}$.

3. Un pendule gyroscopique utilisé comme horizon artificiel présente les caractéristiques indiquées à la subdivision 4 de ce paragraphe. Tant que le mouvement de l'avion était uniforme, l'axe de révolution du pendule était vertical. Ensuite, pendant $\tau = 10$ s, l'avion volait avec une accélération horizontale $\dot{v}_0 = 1$ m/s². Calculer l'angle d'écart α par rapport à la verticale de l'axe de révolution du gyroscope pendant le mouvement accéléré.

Réponse. $\alpha \approx \frac{ma\dot{v}_0\tau}{I_{\parallel}\omega} \approx 0{,}43° \approx 25'$.

4. Une boule massive, homogène et lisse, placée sur une table horizontale est en rotation rapide autour de son diamètre vertical à la vitesse angulaire ω_0 (fig. 157). Une deuxième boule, identique à la première, vient la heurter. Le choc étant parfaitement élastique, il n'y a pas de transmission de la rotation sous l'action du choc. La première boule commence à se déplacer en glissant sur la table. On supposera que le coefficient de frottement de glissement k ne dépend pas de la vitesse. Calculer l'angle α entre l'axe instantané de rotation de la première boule et la verticale à tout instant t où le glissement n'a pas encore cessé.

Calculer aussi la valeur de cet angle lorsque le mouvement de la boule devient un roulement pur. Négliger le frottement de pivotement et de roulement.

Solution. Après le choc le centre de la boule tournante se mettra en mouvement à la vitesse initiale v_0. D'après le théorème du mouvement du centre

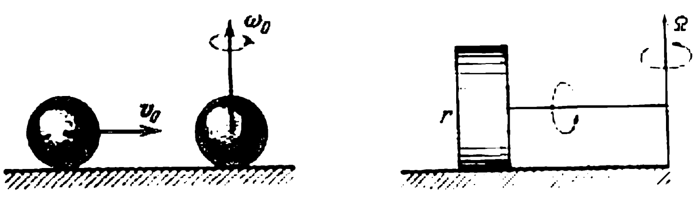


Fig. 157 Fig. 158

de masse, sa vitesse à l'instant t sera $v = v_0 - kgt$. Soit $\boldsymbol{\omega}$ la valeur instantanée du vecteur vitesse angulaire. Le moment de la force de frottement par rapport au centre de la boule sera égal à $kmgr\boldsymbol{i}$, où $\boldsymbol{i}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la figure et pointant d'avant en arrière.

De l'équation des moments $I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = kmgr\boldsymbol{i}$, on tire $^2/_5 r\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = kg\boldsymbol{i}$, d'où on trouve $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + 5\,kgt\boldsymbol{i}/(2r)$. L'axe instantané de rotation se trouve toujours dans un plan normal au plan de la feuille. L'angle α est déterminé par l'équation $\operatorname{tg}\alpha = 5\,kgt/(2r\omega_0)$. Déterminons l'instant où apparaît le roulement pur. La vitesse de translation de la boule ne dépend que de la composante horizontale du vecteur $\boldsymbol{\omega}$. L'instant où s'instaure le roulement pur se déduit de la condition $^5/_2 kgt = v_0 - kgt$. A partir de cet instant l'angle α devient constant et ne varie plus: $\operatorname{tg}\alpha = {}^5/_7 v_0/r\omega_0$. Si $v_0 = \omega_0 r$, on a $\operatorname{tg}\alpha = {}^5/_7$, $\alpha = 35°32'$. La rotation de la boule autour d'un diamètre donné étant instable, la solution obtenue détermine l'inclinaison de l'axe de rotation relativement à l'*espace extérieur* et non à l'intérieur de la boule.

5. Le gyroscope représenté sur la figure 148 exécute un mouvement sur périmètre le long d'une bague métallique circulaire de rayon R et dont le plan est horizontal. Le rayon r de la tige du gyroscope est petit comparé à R ($r \ll R$). L'axe du gyroscope fait un angle α avec la verticale. (Dans le cas considéré cet axe décrit un cône de révolution dont le sommet se trouve au point de suspension O.) Calculer la force de pression F_{pr} qu'exerce la tige du gyroscope sur la bague métallique.

Solution. En régime stationnaire le mouvement sur périmètre de l'axe de révolution du gyroscope est de roulement pur. Comme $r \ll R$, la vitesse angulaire de précession est définie par $\Omega R = \omega r$. Partant de là on arrive aisément à

$$F_{pr} = \frac{I_{\parallel}\omega^2 r}{R^2}\sin^2\alpha.$$

Soient $\omega = 100$ tours/s $= 628$ rad/s, $I_{||} = 2 \cdot 10^4$ g·cm², $r = 0{,}5$ cm, $R = 8$ cm, $\alpha = 20°$. Alors $F_{pr} \approx 70$ N.

6. Les effets gyroscopiques sont mis à profit dans les broyeurs à disques. Un rouleau cylindrique massif pouvant tourner autour de son axe géométrique (meule tournante) est mis en rotation autour d'un axe vertical (à la vitesse angulaire Ω) et roule sur une plaque horizontale (fig. 158). Une telle rotation peut être assimilée à la précession stimulée du gyroscope qu'est la meule tournante. Lors de la précession stimulée, la force de pression qu'exerce la meule sur la plaque sur laquelle elle roule se trouve accrue. C'est cette force qui broye les matériaux répandus sur la plaque. Calculer la force de pression totale qu'exerce la meule sur la plaque.

Réponse. $F_{pr} = P + \frac{I_{||}\Omega^2}{r} = P + \frac{1}{2} m\Omega^2 r$, où P est le poids de la meule, m sa masse et r son rayon. Soit $r = 50$ cm. Pour une vitesse de travail égale à 1 tour/s, soit $\Omega = 2\pi$ rad/s, on trouve $^1/_2 m\Omega^2 r \approx mg = P$. Par suite $F_{fr} \approx \approx 2P$. On notera que le moment cinétique total L n'est pas dirigé le long de l'axe de révolution de la meule, car il existe encore un moment dû à la rotation autour de l'axe vertical. Or ce dernier moment restant invariable lors de la rotation de la meule, on peut ne pas en tenir compte dans le calcul.

7. Un disque de rayon r en rotation autour de son propre axe à la vitesse angulaire ω roule sans glissement en position inclinée sur un plan horizontal; il décrit un cercle complet dans le temps T. Calculer T et le rayon R du cercle sachant que $R \gg r$ et que l'angle formé par le plan du disque et le plan horizontal est α.

Réponse. $T = \frac{3\pi\omega r}{g} \operatorname{tg} \alpha$, $R = \frac{3}{2} \frac{\omega^2 r^2}{g} \operatorname{tg} \alpha$.

§ 51. Les applications des gyroscopes

1. Les gyroscopes trouvent dans les sciences et les techniques des applications aussi nombreuses que variées. Un cours de Physique générale ne permet que de les esquisser, aussi nous contenterons-nous de donner les principes de fonctionnement de certains *dispositifs gyroscopiques* sans chercher à décrire leur construction et leurs caractéristiques techniques. Nous supposerons que tous les dispositifs ainsi que leurs conditions de fonctionnement sont *idéaux*. On admettra donc qu'il n'y a ni forces de frottement ni aucune autre force nocive, que les moments d'inertie et les moments cinétiques des bagues des cardans sont infiniment petits et on fera d'autres suppositions de ce genre, bien qu'en réalité tous ces facteurs exercent une influence notable et parfois même décisive sur le comportement des gyroscopes réels. Mais nous nous fixons pour unique tâche de mettre en évidence les idées et les principes de base des dispositifs gyroscopiques.

2. Commençons par l'étude du gyroscope *équilibré* (*astatique*) à trois degrés de liberté. Considérons un tel gyroscope en rotation rapide autour de son axe de révolution. On supposera que la direction de cet axe n'est affectée ni par la force de pesanteur, ni par la rotation de la Terre, ni par aucun mouvement accéléré de son point de suspension. En l'absence de forces pouvant créer des moments de rotation par rapport au point de suspension, l'axe de révolution d'un gyroscope équilibré devrait conserver une direction immuable par rapport aux étoiles. Si on oriente l'axe de révolution du gyroscope sur une étoile donnée, il devrait tourner par rapport à la Terre pour pouvoir suivre le mouvement de l'étoile sur la sphère céleste. Un tel gyroscope serait capable de détecter la rotation diurne de la Terre, c'est ce que démontra qualitativement le physicien français Léon Foucault (1819-1868). La réalisation de telles expériences est fort ardue, car il est impossible de supprimer complètement le frottement sur les paliers du cardan ainsi que les autres forces parasites créant des moments de rotation par rapport au centre de la suspension du gyroscope.

3. La propriété que possède le gyroscope équilibré de maintenir invariable la direction de l'axe de révolution est mise à profit dans le contrôle automatique du mouvement de torpilles autoguidées, d'avions, de navires, de fusées, etc. Le moment cinétique du gyroscope $L = I_{\parallel}\omega$ doit être suffisamment grand pour que l'influence des forces de frottement et d'autres forces nocives ne se fasse pas trop sentir. L'axe de révolution du gyroscope fixe la direction de marche de l'engin et à chaque déviation du cap fixé (résultant par exemple du déferlement des vagues ou du vent) la direction spatiale de l'axe de révolution du gyroscope se conserve. Cela signifie que l'axe de révolution avec le châssis du cardan de suspension tourne par rapport à l'engin mobile. La rotation du châssis du cardan de suspension met en marche, à l'aide de moyens appropriés, les moteurs de commande du *gouvernail* qui remet l'engin sur le cap. Dans le cas d'une torpille qui se déplace dans le seul plan horizontal (à la surface de la mer) il suffit d'un seul gyroscope dont l'axe de révolution est orienté dans le sens du mouvement. Pour un avion il faut disposer de deux gyroscopes: l'un, à l'axe vertical, définit le plan horizontal dans lequel doit se trouver l'avion, le second, dont l'axe est dirigé suivant l'axe horizontal de l'avion, fixe le cap à suivre. Tous les avions modernes longs courriers sont équipés de *gyropilotes* se substituant aux pilotes.

4. Une application importante du gyroscope non équilibré à trois degrés de liberté est la réalisation de l'horizon et de la verticale artificiels. Ces dispositifs sont nécessaires à la navigation lorsque la ligne d'horizon n'est pas visible. En tout point du globe on peut déterminer la verticale du lieu à l'aide d'un pendule, utilisé comme fil à plomb. Mais on ne peut l'utiliser à bord d'un avion ou d'un navire du fait des accélérations inévitables qui apparaissent lors des changements de vitesse, de cap, ou qui sont dues aux roulis, etc. On utilise alors, au lieu du pendule usuel, le *pendule gyroscopique* (*horizon artificiel*) de grande longueur réduite (cf. § 50, pt. 4). En l'absence d'accélérations l'axe d'un pendule gyroscopique se met à la verticale. Si l'engin subit une accélération, il apparaît une précession qui incline l'axe du gyroscope par rapport à la verticale. Cependant, si la période T de la précession est très grande et la durée de l'accélération petite par rapport à T, la précession étant très lente n'aura pas le temps de faire dévier notablement l'axe du gyroscope de sa position verticale (voir problème 3 au § 50). C'est ce qui se produit, par exemple, dans les virages, puisque la durée du virage est toujours petite par rapport à T. Le gyropendule n'est pratiquement pas affecté par le roulis du navire. En effet la période du roulis est toujours petite par rapport à T et, ce qui importe surtout, est que l'accélération change périodiquement de sens plusieurs fois au cours du temps T. Le roulis ne provoque que de petites oscillations de l'axe du pendule gyroscopique autour de sa position verticale. Ce sont les variations lentes de la vitesse qui affectent le plus la direction de l'axe du pendule gyroscopique, provoquant des écarts notables de son axe.

5. L'application la plus importante du gyroscope est le *gyrocompas*, largement utilisé à bord des navires. Le compas magnétique ordinaire est sujet à diverses perturbations du champ magnétique terrestre (orages magnétiques). Ses indications sont faussées par la présence de grandes masses de fer et par les actions électrodynamiques des installations électrotechniques. Dans ces conditions, l'utilisation de compas magnétiques à bord des navires est rendue pratiquement impossible. Les gyrocompas ne présentent pas ces inconvénients.

L'idée du gyrocompas fut avancée par Foucault dès 1852. Il suggéra d'utiliser pour cela un gyroscope à *deux degrés de liberté* et à cardan de suspension. Pour mieux saisir l'idée de base des compas gyroscopiques ainsi que de certains autres dispositifs gyroscopiques, il est tout indiqué de traiter un problème plus général, celui du comportement d'un gyroscope fixé sur un support tournant.

6. Fixons la bague extérieure d'un cardan de suspension (cf. fig. 144). Ne disposant plus de ses trois degrés de liberté, le gyroscope est moins stable. Comme nous l'avons montré au paragraphe précédent, le bloquage de la bague extérieure rend impossible la précession autour de l'axe vertical. Le degré de liberté ainsi supprimé peut être dans une certaine mesure rétabli si on attache la bague

extérieure du cardan à un support tournant librement autour d'un axe vertical. En procédant ainsi on ne fait qu'augmenter le moment d'inertie de la bague extérieure. Attachons une masse pesante à l'axe du gyroscope ; elle provoquera sa précession autour de l'axe vertical. Cette rotation est transmise au support de fixation de la bague extérieure. Comme le support possède un moment d'inertie propre, sa vitesse angulaire de rotation Ω sera plus petite que la vitesse angulaire Ω_0 à laquelle précessionnerait le gyroscope s'il était libre. L'existence du support freine la précession due à la masse pesante qui de ce fait doit s'abaisser (voir § 50, pts. 9 et 10). Si en agissant sur le support on augmente sa vitesse de rotation jusqu'à ce qu'elle devienne égale à Ω_0, la précession ne s'accompagnera plus d'un déplacement de la masse pesante qui restera à la même hauteur. Si la vitesse de rotation du support devient plus grande que Ω_0, la masse pesante se relèvera jusqu'à ce que l'extrémité positive de l'axe de révolution pointe vers le haut. Pour une vitesse de rotation $\Omega < \Omega_0$ ou si on inverse le sens de rotation du support, l'axe de révolution se mettra aussi à la verticale, son extrémité positive pointant vers le bas. Ce comportement du gyroscope s'explique par le fait que le gyroscope avec son support est obligé de tourner autour de l'axe vertical à une vitesse angulaire ω différente de la vitesse de précession Ω_0 qu'il aurait eu sous l'action de la seule masse pesante. C'est ce qui détermine la déformation de torsion de l'axe vertical $D'D$ (voir fig. 144). La déformation de torsion crée un moment de rotation M parallèle à l'axe $D'D$ et qui détermine la précession autour de l'axe horizontal $B'B$; c'est cette précession qui fait que l'axe du gyroscope se met à la verticale, ascendante ou descendante suivant la vitesse et le sens de rotation du support. Cette orientation de l'axe de révolution du gyroscope s'observera aussi dans le cas limite où il n'y a pas de masse pesante et lorsque $\Omega_0 = 0$. On conçoit aisément que dans ce cas *l'axe de révolution du gyroscope se place parallèlement à l'axe de rotation du support, les deux rotations étant de même sens* (règle de Foucault). On dit que ces axes sont *parallèles et de même sens.*

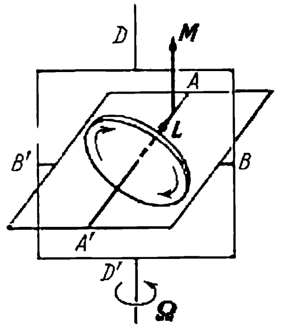


Fig. 159

Il est facile de démontrer ces résultats par l'expérience. On utilise un petit gyroscope à cardan de suspension. Pour rendre plus clair le dessin de la figure 159, nous avons remplacé les bagues circulaires par des chassis rectangulaires. Après avoir mis le gyroscope en rotation autour de son axe de révolution, faisons tourner à la main le châssis extérieur autour de l'axe vertical. L'axe du gyroscope prendra une position verticale telle que la rotation du châssis et celle du gyroscope autour de son axe de révolution soient de même sens. Si on fait tourner le châssis en sens contraire, le gyroscope « bascule »: son axe de révolution tourne de 180° autour de l'axe horizontal $A'A$. Ainsi les deux rotations s'effectueront de nouveau dans le même sens. Le basculement du gyroscope se produira chaque fois que nous inverserons le sens de rotation du châssis extérieur. Pendant le basculement du gyroscope le démonstrateur ressent une action notable des forces gyroscopiques qui tendent à le faire tourner autour d'un axe horizontal perpendiculaire au plan du châssis extérieur.

Dans une autre expérience on dispose un gyroscope équilibré à deux degrés de liberté sur un disque horizontal qui peut tourner autour de son axe vertical (fig. 160). Lorsqu'on fait tourner le disque, l'axe du gyroscope prend une position verticale, et si on inverse le sens de rotation du disque, l'axe du gyroscope culbute.

7. Examinons l'idée du compas gyroscopique avancée par Foucault. La bague extérieure du cardan de suspension du gyroscope peut tourner librement autour de l'axe vertical $D'D$ (cf. fig. 159), tandis que la bague intérieure est fixée

dement fixée à la bague extérieure dans une position orthogonale. Dans ces conditions l'axe de révolution $A'A$ du gyroscope est contraint de rester dans un plan horizontal coïncidant avec le plan de la bague intérieure et peut tourner

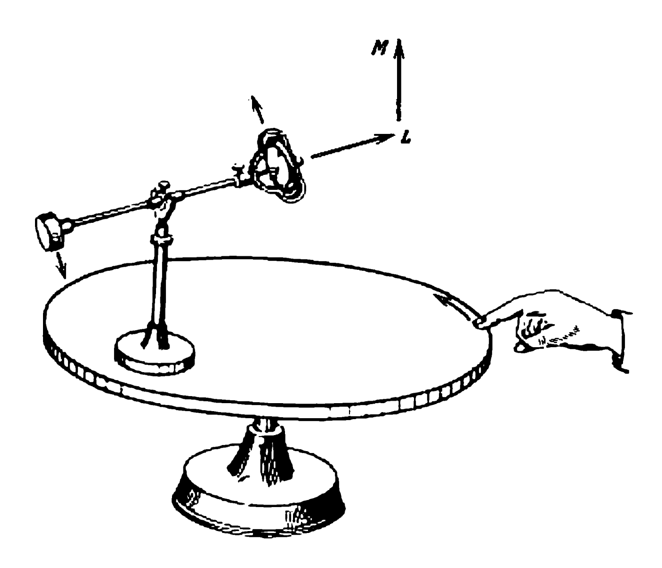


Fig. 160

librement dans ce plan autour de l'axe vertical $D'D$. On dispose le gyroscope sur un support horizontal qui participe évidemment à la rotation diurne de la Terre. Soit Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe. Décomposons le vecteur Ω en une composante verticale Ω_v et une composante horizontale Ω_h. La composante verticale n'exerce aucune influence sur le gyroscope puisqu'il peut tourner librement autour de l'axe vertical. Il est donc inutile de prendre en considération la composante verticale Ω_v. La composante horizontale Ω_h est contenue dans le plan méridien et est donc orientée suivant la *ligne de midi*. Ainsi ce n'est que la rotation de la Terre autour de la ligne de midi du lieu qui peut influencer le comportement du gyroscope. Posons que le plan de la figure 161 coïncide avec le plan horizontal. Décomposons le vecteur Ω_h en une composante Ω_1 portée par l'axe de révolution du gyroscope et une composante Ω_2 qui lui est orthogonale. La première composante n'exerce aucune influence sur le gyroscope puisque rien ne s'oppose à sa rotation libre autour de son axe de révolution. Ne subsiste donc que la composante Ω_2 qui varie avec la rotation de la Terre. Le gyroscope ne peut tourner autour de l'axe Ω_2 puisque son axe de révolution est contraint de rester dans le plan horizontal (c'est le plan de la figure 161) ; mais il peut tourner librement autour de son axe de révolution et autour d'un axe vertical (qui est orthogonal au plan de la figure).

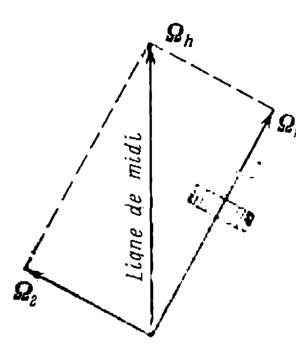


Fig. 161

Nous sommes ainsi ramenés au cas que nous avons étudié à la subdivision 6 de ce paragraphe où le rôle de la verticale est dévolu à la direction du vecteur Ω_2. Par suite l'axe de révolution du gyroscope doit tourner dans le plan de la figure dans le sens qui le conduit le plus directement vers la ligne de midi afin de coïncider en direction et en sens avec l'axe portant Ω_2. Mais du fait de cette rotation, la longueur du vecteur Ω_2 diminue et celle du vecteur Ω_1 augmente. Lorsque l'axe de révolution du gyroscope devient parallèle à la ligne de midi, Ω_2 s'annule. Dans cette position l'axe de révolution ne subit plus l'influence de la rotation de la Terre. Conformément à la règle de Foucault, la rotation propre du gyroscope et la rotation de la Terre autour de la ligne de midi doivent alors être de même sens.

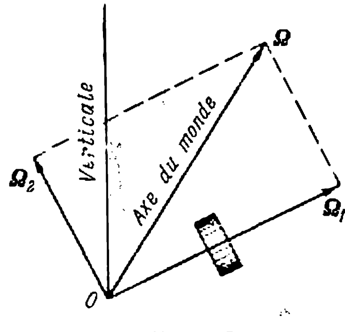


Fig. 162

Le principe de fonctionnement du compas gyroscopique de Foucault peut être expliqué autrement. La rotation de la Terre tend à faire tourner l'axe de révolution du gyroscope autour de la droite portant le vecteur Ω_2. Mais comme cette rotation est impossible puisqu'elle impliquerait que l'axe du gyroscope quitte le plan de la figure où il est astreint à rester, elle ne se manifeste qu'en provoquant des déformations donnant lieu à l'apparition d'un moment de rotation M parallèle au vecteur Ω_2. Ce moment de rotation est ressenti par le gyroscope qui commence à précessionner autour de la verticale; la précession fait tourner l'axe du gyroscope vers la ligne de midi jusqu'à ce qu'ils coïncident en direction et en sens.

8. Foucault indiqua également qu'un gyroscope à deux degrés de liberté peut être utilisé comme *inclinomètre*, dispositif servant à déterminer la latitude géographique d'un lieu. Fixons la bague extérieure du cardan du gyroscope dans une position telle que son plan coïncide avec celui du méridien terrestre. Le gyroscope ne disposera que de deux degrés de liberté et pourra tourner autour de son axe de révolution et autour de l'axe horizontal $B'B$ orthogonal au plan méridien (cette rotation entraînera la bague intérieure). Si nous supposons que le plan de la figure 162 coïncide avec le plan du méridien terrestre, l'axe de révolution du gyroscope ne pourra tourner que dans le plan de la figure autour de l'axe horizontal $B'B$ orthogonal à ce plan et ne pourra donc s'en écarter. Décomposons la vitesse angulaire Ω de la rotation axiale de la Terre en une composante Ω_1 portée par l'axe de révolution du gyroscope et une composante Ω_2 orthogonale à la première composante. La première composante n'exerce aucune influence et on ne tient compte que de la rotation autour de la droite support du vecteur Ω_2. Nous nous trouvons exactement dans la même situation que dans l'étude du gyrocompas de Foucault; en répétant les mêmes raisonnements, nous arriverons à la conclusion que dans le cas présent l'axe de révolution du gyroscope tournera pour se rapprocher de l'axe de la rotation propre de la Terre (*axe du monde*). Du fait de cette rotation la longueur du vecteur Ω_2 diminue et lorsque l'axe du gyroscope sera parallèle à l'axe du monde et de même sens, le vecteur Ω_2 deviendra nul et aucune rotation ultérieure de l'axe de révolution due à la rotation de la Terre sur elle-même ne pourra plus se produire. Ainsi l'axe du gyroscope se place parallèlement à l'axe du monde et dans le même sens. L'angle entre cette direction et le plan horizontal est la latitude géographique du lieu de l'expérience.

9. Ni le compas gyroscopique ni l'inclinomètre de Foucault ne furent utilisés dans la pratique. Ils ne servent qu'à donner une solution théorique des problèmes concernés. En effet, du fait de la faible vitesse de rotation de la Terre autour de son axe, les forces créées par cette rotation et appliquées au gyroscope sont extrêmement faibles et n'arrivent pas (ou arrivent à peine) à surmonter la

résistance de frottement dans les paliers de ces appareils. D'autre part, les dispositifs décrits ne pourraient en principe être utilisés que sur des supports fixes (par rapport à la Terre). Ils sont inutilisables à bord des navires et des avions, car leur marche ou leur vol fait apparaître des vitesses angulaires de rotation et des accélérations beaucoup plus importantes que les grandeurs correspondantes lors de la rotation diurne de la Terre.

Le problème de l'élaboration d'un compas gyroscopique ne devint pratiquement réalisable que lorsqu'on commença à utiliser des gyroscopes *à trois degrés de liberté*. Le gyroscope doit en effet être *astatique*, mais un gyroscope astatique à trois degrés de liberté est insensible à la rotation de la Terre. Pour surmonter cette difficulté, il suffit d'accoupler le gyroscope à un dispositif subissant l'influence de la rotation de la Terre et pouvant à son tour agir sur le gyroscope. Illustrons ce principe en prenant pour exemple un gyroscope aujourd'hui pé-

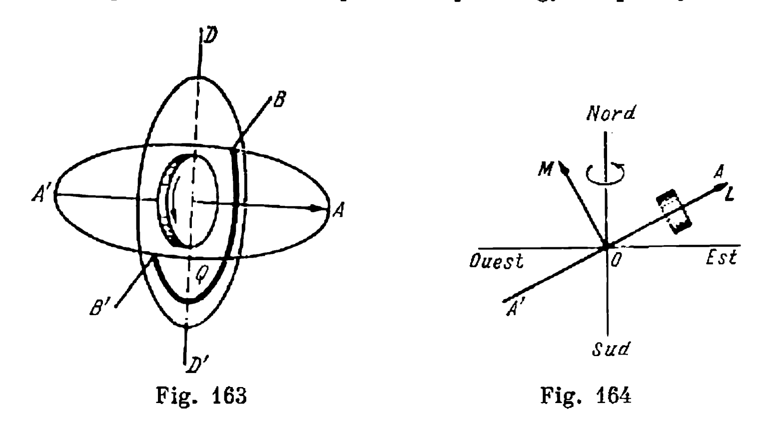


Fig. 163 Fig. 164

rimé, élaboré en 1911 par l'Américain Sperry et qui s'avéra être un dispositif de navigation parfaitement utilisable. Le dispositif auxiliaire qu'il utilisa était un *pendule* fixé à la bague intérieure du cardan du gyroscope. Le pendule utilisé était constitué par une barre courbe Q dont le plan était orthogonal au plan de la bague intérieure et donc parallèle au plan du volant du gyroscope (fig. 163). Le principe de fonctionnement du dispositif est extrêmement simple. Supposons que l'axe $D'D$ de la bague extérieure soit vertical et que le plan de la bague intérieure contenant l'axe de révolution $A'A$ du gyroscope soit horizontal. Dans cette position aucun moment de force ne peut influencer le gyroscope. Si on pointe l'axe de révolution $A'A$ du gyroscope sur une étoile, il suivra son mouvement. Supposons que l'axe $A'A$ soit écarté de la ligne de midi, vers l'est par exemple (fig. 164). Si l'étoile sur laquelle pointe l'axe monte, l'extrémité positive A de l'axe de révolution du gyroscope suivra le mouvement de l'étoile en se relevant et provoquera la rotation autour de l'axe $B'B$ de la barre courbe Q du pendule. Le moment M de la force de pesanteur de la bague par rapport au point O cherchera à abaisser le point A, ce qui déclenchera la précession du gyroscope autour de l'axe vertical $D'D$; par suite de la précession, l'axe de révolution du gyroscope tournera vers la ligne de midi afin de se placer en position parallèle et dans le même sens. Si l'extrémité positive A de l'axe de révolution avait été écartée à l'ouest de la ligne de midi, le système se serait comporté exactement de la même manière.

10. Pour conclure nous allons exposer le principe du monorail. Un wagon roulant sur un seul rail se trouve dans un état instable. Pour stabiliser son mouvement on peut utiliser un gyroscope massif à trois degrés de liberté, monté à l'intérieur du wagon, comme indiqué sur la figure 165, *a*. Les parois du wagon

jouent le rôle de la bague extérieure du cardan de suspension. Supposons que le wagon se penche à droite. La force de pesanteur cherchera à le faire culbuter. Cette force crée un moment de rotation orienté vers l'arrière du plan de la figure et parallèlement à l'axe longitudinal du wagon. Par l'intermédiaire des paliers, ce moment est transmis au gyroscope qui commence à précessionner; ce mouvement fait pencher le châssis intérieur (fig. 165, *b*). Si on arrive par un moyen quelconque à accélérer la précession, on accroîtra par là le moment de

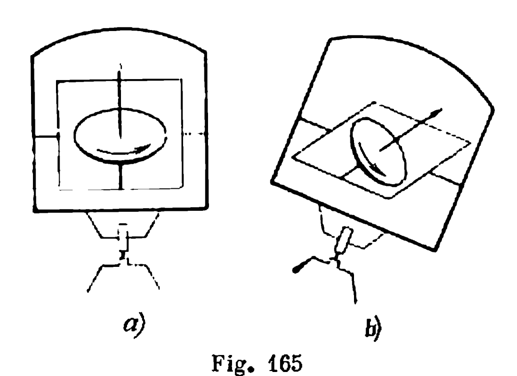


Fig. 165

rotation des forces de résistance générées par le gyroscope (voir § 50, points 9 et 10). Le centre de gravité du wagon commencera à se relever et le wagon reprendra sa position verticale. Cette accélération stimulée de la précession du châssis doit s'effectuer automatiquement. C'est l'élaboration de cette automation qui constitue la principale difficulté de la mise en pratique du monorail.

§ 52. Fondements de la théorie exacte du gyroscope symétrique

1. La théorie exacte du gyroscope symétrique tient compte des différences d'orientation de l'axe instantané de rotation, de l'axe de révolution et du moment cinétique du gyroscope par rapport à son point de suspension. Cette théorie est vérifiée pour toutes les valeurs du rapport des vitesses angulaires $\omega_{\parallel}$ et $\omega_{\perp}$ des rotations qu'exécute le gyroscope autour de son axe de révolution et autour de l'axe qui lui est orthogonal. On notera cependant que les effets gyroscopiques les plus importants déterminant les applications techniques et scientifiques des gyroscopes ne se manifestent que lorsque $\omega_{\parallel} \gg \omega_{\perp}$.

Menons par le point O le long du sens positif de l'axe de révolution le vecteur unitaire $\boldsymbol{s}$ (fig. 166). L'extrémité de ce secteur est le *sommet du gyroscope*. La dérivée $\dot{\boldsymbol{s}}$, ayant la signification de la vitesse linéaire du mouvement du sommet du gyroscope, peut être représentée sous la forme : $\dot{\boldsymbol{s}} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{s}] = [\boldsymbol{\omega}_{\perp}\boldsymbol{s}]$. Les trois vecteurs $\dot{\boldsymbol{s}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ et $\boldsymbol{s}$ forment un trièdre trirectangle de sens direct (fig. 167). On voit que $\boldsymbol{\omega}_{\perp} = [\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{s}}]$. Il en résulte que

$$\boldsymbol{L} = I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp} = I_{\parallel}\omega_{\parallel}\boldsymbol{s} + I_{\perp}[\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{s}}]. \quad (52.1)$$

En portant cette expression dans (49.3) on obtient

$$I_{\parallel}\dot{\omega}_{\parallel}\boldsymbol{s} + I_{\parallel}\omega_{\parallel}\dot{\boldsymbol{s}} + I_{\perp}[\boldsymbol{s}\ddot{\boldsymbol{s}}] = \boldsymbol{M}. \quad (52.2)$$

C'est l'équation fondamentale de la théorie exacte du gyroscope symétrique. Pour plus de commodité, on la subdivise en deux équations dont l'une s'obtient en multipliant scalairement (52.2) par s. Compte tenu de ce que $(s\dot{s}) = 0$, cette multiplication scalaire donne

$$I_{\parallel}\dot{\omega}_{\parallel} = M_{\parallel}, \tag{52.3}$$

où $M_{\parallel} \equiv (Ms)$ est la projection du vecteur M sur l'axe de révolution du gyroscope. On tire la deuxième équation également de (52.2) en la multipliant vectoriellement par s. Compte tenu de l'identité $[s[s\ddot{s}]] = -s^2\ddot{s} + (s\ddot{s})\,s = -\ddot{s} + (s\ddot{s})\,s$, on trouve

$$I_{\parallel}\omega_{\parallel}[s\dot{s}] - I_{\perp}\ddot{s} + I_{\perp}(s\ddot{s})\,s = [sM].$$

En dérivant la relation $(s\dot{s}) = 0$, on obtient $(s\ddot{s}) + \dot{s}^2 = 0$, ce qui permet de mettre la dernière équation sous la forme

$$I_{\perp}\ddot{s} = [Ms] + I_{\parallel}\omega_{\parallel}[s\dot{s}] - I_{\perp}\dot{s}^2 s. \tag{52.4}$$

2. L'équation (52.3) caractérise la variation dans le temps de la vitesse angulaire de rotation $\omega_{\parallel}$ du gyroscope autour de son axe de révolution. C'est

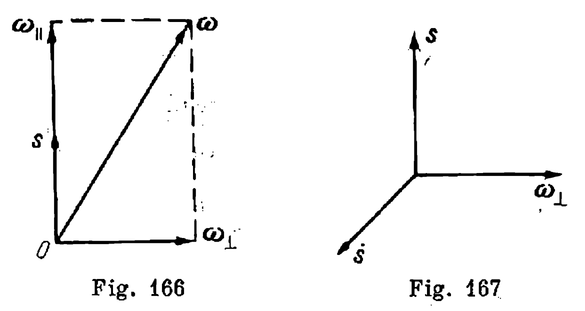


Fig. 166 Fig. 167

la même équation que celle décrivant la rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe.

L'équation (52.4) définit l'accélération $\ddot{s}$ du mouvement du sommet du gyroscope. Ecrivons-la sous la forme

$$I_{\perp}\ddot{s} = f, \tag{52.5}$$

où

$$f = [Ms] + I_{\parallel}\omega_{\parallel}[s\dot{s}] - I_{\perp}\dot{s}^2 s. \tag{52.6}$$

De par sa forme, l'équation (52.5) coïncide avec l'équation de Newton où le rôle de la masse revient à la grandeur $I_{\perp}$ et celui de la force au vecteur f. Le sommet du gyroscope se meut à la surface d'une sphère immobile de rayon unité $s^2 = 1$. Son accélération a pour composantes l'accélération $(\ddot{s})_{\perp}$ tangentielle à la sphère et l'accélération radiale (ou centripète) $(\ddot{s})_{\parallel} = -\frac{\dot{s}^2}{s}s = -\dot{s}^2 s$, soit $\ddot{s} = (\ddot{s})_{\perp} - \dot{s}^2 s$. En portant cette expression dans (52.5) nous constatons

que l'accélération centripète s'élimine et l'équation s'écrit:

$$I_\perp (\ddot{s})_\perp = [Ms] + I_{||}\omega_{||}[s\dot{s}]. \qquad (52.7)$$

Il s'ensuit que l'équation (52.5) ou l'équation équivalente (52.7) définissent non pas l'accélération totale $\ddot{s}$ du sommet du gyroscope, mais seulement sa composante $(\ddot{s})_\perp$ tangentielle à la surface de la sphère unitaire $s^2 = 1$. Cela suffit cependant pour calculer le mouvement du sommet du gyroscope à partir des données initiales (par exemple, connaissant la position et la vitesse initiales du sommet du gyroscope). En effet le mouvement du sommet du gyroscope est analogue au mouvement d'un point matériel non libre, mais astreint à se déplacer sur une surface donnée.

Nous appellerons parfois *point figuratif* le point matériel imaginaire de masse $I_\perp$ placé au sommet du gyroscope. Le second membre de l'équation (52.7) doit être considéré comme une certaine « force » sous l'action de laquelle le point figuratif acquiert une accélération. Le premier terme de cette « force » est lié à l'action des forces réelles résultant de l'interaction du gyroscope avec les corps qui l'entourent. Nous l'appellerons *force réelle*:

$$f_{\text{réelle}} = [Ms]. \qquad (52.8)$$

Le deuxième terme $I_{||}\omega_{||}[s\dot{s}]$ n'a aucun lien avec les interactions des corps. C'est une « force fictive » qui apparaît lorsque le gyroscope tourne autour de son axe de révolution. On l'appelle *force de déviation*

$$f_{\text{dév}} = I_{||}\omega_{||}[s\dot{s}]. \qquad (52.9)$$

Cette force ne diffère de zéro que lorsque le point figuratif est en mouvement. Elle est orthogonale à l'axe de révolution du gyroscope et à la vitesse du point figuratif. Cette force tend à faire dévier le sommet du gyroscope de sa trajectoire et c'est son existence qui détermine tous les effets gyroscopiques caractéristiques.

Nous pouvons donc écrire l'équation de mouvement du gyroscope symétrique comme suit

$$I_\perp (\ddot{s})_\perp = f_{\text{réelle}} + f_{\text{dév}}. \qquad (52.10)$$

3. La théorie approchée n'étudie que le mouvement du gyroscope où on peut négliger dans (52.10) l'accélération $(\ddot{s})_\perp$. Dans ce cas $f_{\text{réelle}} + f_{\text{dév}} = 0$, soit

$$I_{||}\omega_{||}[s\dot{s}] + [Ms] = 0.$$

Comme aucun des vecteurs s et M n'a de composantes le long de l'axe de révolution, on doit avoir

$$I_{||}\omega_{||}\dot{s} = M.$$

C'est l'équation fondamentale de la théorie approchée du gyroscope.

4. On peut appliquer formellement au mouvement du point figuratif, décrit par (52.10), tous les théorèmes de la mécanique du point, par exemple l'équation de la conservation de l'énergie. On tiendra compte que la force de déviation, qui est orthogonale à la vitesse $\dot{s}$, ne produit aucun travail. Seule la force réelle $f_{\text{réelle}}$ produit du travail.

5. Il est évident que l'équation exacte de mouvement du gyroscope symétrique permet de décrire le mouvement d'un gyroscope libre. Mais comme les résultats ainsi obtenus ont déjà été décrits au § 49, il nous suffit d'étudier

dans le cadre de la théorie exacte la précession stimulée et les nutations du gyroscope symétrique.

Supposons que la force active F est constante et qu'elle est appliquée à l'un des points de l'axe de révolution du gyroscope (fig. 168). Désignons par $\boldsymbol{a}$ le rayon vecteur de ce point mené par le point de suspension. Si le point de suspension O ne coïncide pas avec le centre de masse du gyroscope, c'est le poids

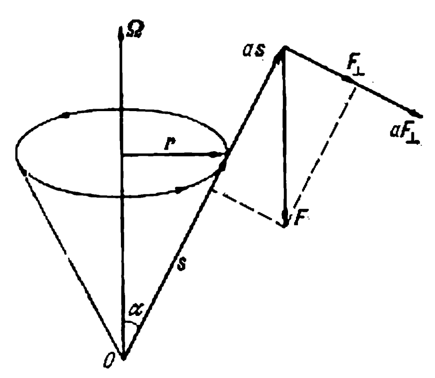


Fig. 168

propre du gyroscope qui fait fonction de force F. Le moment de cette force est $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{aF}] = [\boldsymbol{aF}_\perp]$, où $\boldsymbol{F}_\perp$ est la composante de la force $\boldsymbol{F}$ orthogonale à l'axe de révolution. Par conséquent $\boldsymbol{f}_{\text{réelle}} = [\boldsymbol{Ms}] = [[\boldsymbol{aF}_\perp]\boldsymbol{s}] = \boldsymbol{aF}_\perp$ puisque les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{s}$ sont colinéaires. L'équation (52.10) s'écrit maintenant

$$I_\perp (\ddot{\boldsymbol{s}})_\perp = \boldsymbol{aF}_\perp + I_\parallel \omega_\parallel [\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{s}}]. \tag{52.11}$$

On doit se demander maintenant s'il est possible de communiquer au sommet du gyroscope une vitesse initiale telle qu'il exécute une précession régulière, c'est-à-dire qu'il soit en rotation uniforme autour d'un axe parallèle à la force appliquée F et passant par le point de suspension O. Désignons par $\boldsymbol{\Omega}$ la vitesse angulaire de cette rotation. Pour concrétiser nous poserons que la force active $\boldsymbol{F}$ est le poids propre du gyroscope: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$. Nous choisirons pour sens positif du vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ celui de la verticale ascendante qui est le sens opposé à celui de la force F (cf. fig. 168). Il est facile de trouver une réponse à la question posée à partir de l'équation (52.11). Projetons (52.11) sur le support du vecteur $\boldsymbol{F}_\perp$. Dans le cas d'une précession régulière le sommet du gyroscope se meut à la vitesse $\dot{\boldsymbol{s}} = [\boldsymbol{\Omega s}]$ et avec l'accélération $\ddot{\boldsymbol{s}} = -\Omega^2 \boldsymbol{r}$, où $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur mené de l'axe de révolution au sommet du gyroscope ($r = s \sin\alpha = \sin\alpha$, α étant l'angle entre la verticale et l'axe de révolution du gyroscope). Après avoir calculé la composante de l'accélération $\ddot{\boldsymbol{s}}$ normale à l'axe de révolution et effectué la projection dont il a été question, on obtient après division par $\sin\alpha$:

$$I_\perp \Omega^2 \cos\alpha - I_\parallel \omega_\parallel \Omega + aF = 0, \tag{52.12}$$

d'où

$$\Omega = \frac{I_\parallel \omega_\parallel \pm \sqrt{I_\parallel^2 \omega_\parallel^2 - 4aFI_\perp \cos\alpha}}{2I_\perp \cos\alpha}. \tag{52.13}$$

Dans le cas où le centre de masse du gyroscope est situé au-dessus du point de suspension, l'angle α est aigu (cf. fig. 168). Si la rotation propre du gyroscope n'est pas suffisamment rapide, il peut arriver que la quantité sous le radical de (52.13) soit négative. La précession régulière est alors impossible et la position du gyroscope instable. D'une manière générale, pour que le gyroscope soit stable il faut que soit vérifiée la condition

$$I_{\parallel}^2\omega_{\parallel}^2-4aFI_{\perp}\cos\alpha>0. \qquad (52.14)$$

Cette condition est toujours vérifiée si le centre de masse du gyroscope se trouve au-dessous du point de suspension. Mais s'il se trouve au-dessus du point de suspension, il faut que la vitesse de rotation du gyroscope soit grande.

Supposons satisfaite la condition (52.14). L'équation du second degré (52.12) possède alors deux racines réelles. Le gyroscope peut donc avoir deux précessions régulières: l'une *lente* (correspondant à la plus petite racine en valeur absolue) et l'autre *rapide*.

6. Supposons satisfaite la condition $I_{\parallel}^2\omega_{\parallel}^2 \gg |4aFI_{\perp}\cos\alpha|$. La racine carrée de (52.13) est alors approximativement égale à

$$I_{\parallel}\omega_{\parallel}\left(1-\frac{4aFI_{\perp}\cos\alpha}{I_{\parallel}^2\omega_{\parallel}^2}\right)^{1/2}\approx I_{\parallel}\omega_{\parallel}-\frac{2aFI_{\perp}\cos\alpha}{I_{\parallel}\omega_{\parallel}}.$$

On obtient finalement

$$\Omega_{\text{lent}}\approx\frac{aF}{I_{\parallel}\omega_{\parallel}}, \qquad (52.15)$$

$$\Omega_{\text{rapide}}\approx\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}\cos\alpha}\,\omega_{\parallel}. \qquad (52.16)$$

La formule (52.15) coïncide avec la formule (50.4) de la théorie approchée du gyroscope. Il en résulte que la précession régulière de la théorie approchée est la *précession lente.* Ainsi que le montre la formule (52.16) la vitesse angulaire de la précession rapide est du même ordre de grandeur que $\omega_{\parallel}$. La condition essentielle d'applicabilité de la théorie approchée $\omega_{\perp}\ll\omega_{\parallel}$ n'est pas respectée ici, ce qui confirme que la précession rapide ne peut être traitée par la théorie approchée. La précession régulière du gyroscope libre dont il a été question au § 49 est un cas particulier de la précession rapide pour lequel $F=0$.

7. Afin d'éviter au lecteur de conclure que la précession rapide est un effet imaginaire, considérons l'exemple simple d'un pendule conique, pour lequel $\omega_{\parallel}=0$ et il ne peut donc être question d'effets gyroscopiques. Il est évident que dans ce cas le centre de masse doit se trouver au-dessous du point de suspension. Il est par suite tout indiqué de remplacer l'angle α par l'angle complémentaire $\beta=\pi-\alpha$ que forme l'axe du pendule avec la verticale descendante. La formule (52.13) se ramène à

$$\Omega=\pm\sqrt{\frac{aF}{I\cos\beta}},$$

qui est la formule connue de la pulsation du pendule conique.

8. La précession régulière, qu'elle soit lente ou rapide, est un cas très particulier du mouvement du sommet du gyroscope, qui ne se manifeste que pour des conditions initiales bien déterminées. Pour en étudier le cas général, nous poserons dans (52.7) $\dot{s}=v_p+v_n$. Nous définirons le vecteur v_p par la condition $[Ms]+I_{\parallel}\omega_{\parallel}[sv_p]=0$. On aura alors $I_{\perp}(\ddot{s})_{\perp}=I_{\parallel}\omega_{\parallel}[sv_n]$. La quantité v_p est la vitesse qu'aurait le sommet du gyroscope s'il effectuait

une précession régulière lente. (La deuxième composante de la vitesse v_n caractérise la nutation.) A condition de négliger l'accélération d'une telle précession, on peut poser $\ddot{s} = \dot{v}_n$ et écrire

$$I_\perp \dot{v}_n = I_{||}\omega_{||}[sv_n]. \qquad (52.17)$$

Nous avons omis l'indice $\perp$ auprès de v_n, puisque la composante de l'accélération suivant l'axe de révolution du gyroscope ne nous intéresse pas pour l'instant. En considérant le second membre de (52.17) comme une quantité

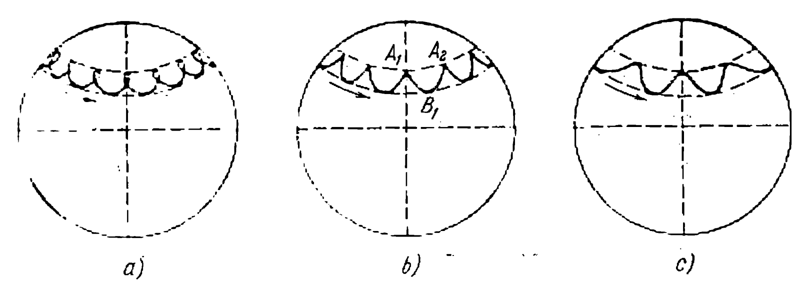


Fig. 169

analogue à une force, cette force sera normale à la vitesse v_n et ne produira donc aucun travail. En conséquence le module de la vitesse v_n doit être invariable et l'équation (52.17) décrit un mouvement circulaire uniforme. En désignant par r le rayon de ce cercle et par Ω_n la vitesse angulaire de rotation, on a $v_n = \Omega_n r$, $|\dot{v}_n| = \Omega_n^2 r$. Comme s et v_n sont rectangulaires, on tire de (52.17):

$$I_\perp \Omega_n^2 r = I_{||}\omega_{||}\Omega_n r,$$

d'où

$$\Omega_n = \frac{I_{||}}{I_\perp}\omega_{||}. \qquad (52.18)$$

Ainsi au mouvement de précession lent du sommet du gyroscope vient se superposer un mouvement circulaire uniforme de pulsation Ω_n définie par (52.18). Le rayon de la trajectoire circulaire est $r = \frac{v_n}{\Omega_n} = \frac{v_n}{\omega_{||}}\frac{I_\perp}{I_{||}}$. Par suite de cette superposition de deux mouvements, le sommet du gyroscope peut décrire une trajectoire cycloïdale (fig. 169, *b*), à boucles (fig. 169, *a*) ou être du type sinusoïdal (fig. 169, *c*). Le cas qui se réalise dépend des conditions initiales, c'est-à-dire de la position et de la vitesse du sommet du gyroscope à l'instant initial. C'est la superposition du mouvement circulaire à la précession lente qui détermine l'effet de *nutation* dont il a été question au § 50. Le rayon r du mouvement circulaire est l'amplitude des oscillations de nutation. Si $r = 0$, il n'y a pas de nutations et le sommet exécute une précession régulière.

Exemple. Pour l'horizon artificiel décrit au § 50, $I_\perp = {}^3/_5 I_{||}$. Le nombre de nutations par tour de précession est

$$N = \frac{\Omega_n}{\Omega_p} = \frac{I_{||}}{I_\perp}\frac{\omega_{||}}{\Omega_p} = 4{,}77\cdot 10^5.$$

Si la vitesse initiale du sommet du gyroscope est nulle, on a $v_p + v_n = 0$ et par suite $r = v_p/\Omega_n$. Or $v_p = R\Omega_p$, R étant le rayon de la précession. On a alors

$$\frac{r}{R}=\frac{\Omega_p}{\Omega_n}=\frac{1}{N}=\frac{1}{4{,}77\cdot 10^5}.$$

Cet exemple montre combien sont petites les nutations dans les gyroscopes techniques à grandes vitesses de rotation.

9. En conclusion voyons l'interprétation qualitative de l'allure de la trajectoire du sommet du gyroscope comportant des nutations. Partons de l'équation de mouvement du sommet (52.11). Supposons que sur la figure 169 l'extrémité positive de l'axe de révolution pointe vers le lecteur. Posons qu'à l'instant initial le sommet est immobile dans la position A_1 (cf. fig. 169, *b*). Par suite la vitesse $\dot{\boldsymbol{s}}$ et la force de déviation $I_{\parallel}\omega_{\parallel}[\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{s}}]$ sont nulles. Sous l'action de la pesanteur, le sommet acquiert une vitesse pointant vers le bas. Simultanément apparaît une force de déviation latérale qui infléchit à gauche la trajectoire du sommet (à gauche si, les pieds posés sur le plan de la figure, on progresse dans le sens du mouvement du sommet). En position B_1 la vitesse du sommet devient horizontale et la force de déviation verticale. Comme le molule de cette force est supérieur à celui du poids, le sommet du gyroscope commence à se relever. En position supérieure A_2 la vitesse du sommet devient nulle. Ce résultat découle tout naturellement des équations énergétiques auxquelles se conforme, tout formellement d'ailleurs, le mouvement du sommet. Après cela le mouvement se reproduit sans cesse. On obtient ainsi une trajectoire de type cycloïdal. La trajectoire à boucles (fig. 169, *a*) apparaît si à l'instant initial on communique au sommet une vitesse de sens opposé à celui de la précession. Si le sommet possède une vitesse initiale de même sens que la précession on obtient une trajectoire de type sinusoïdal (fig. 169, *c*). Dans ce dernier cas on peut choisir une vitesse telle que la précession soit régulière sans nutations.

§ 53. Tenseur et ellipsoïde d'inertie

1. Calculons le moment d'inertie I d'un corps solide par rapport à un axe arbitraire OA (fig. 170). Sans porter atteinte à la généralité, on peut supposer que l'axe passe par l'origine des coordonnées O. Nous désignerons les coordonnées soit par x, y, z, soit par x_1, x_2, x_3. Ainsi $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$. Décomposons le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ d'un élément de masse dm du corps solide en ses composantes suivant l'axe OA et suivant une direction orthogonale : $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\parallel} + \boldsymbol{r}_{\perp}$. Par définition, le moment d'inertie est

Fig. 170

$$I=\int \boldsymbol{r}_{\perp}^2\,dm=\int (r^2-r_{\parallel}^2)\,dm.$$

En désignant par $\boldsymbol{s}$ le vecteur unitaire porté par l'axe OA, on a $r_{\parallel} = (\boldsymbol{rs}) = xs_x + ys_y + zs_z$. D'autre part, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Compte tenu de ces relations ainsi que de la relation $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$, on obtient

$$I=I_{xx}s_x^2+I_{yy}s_y^2+I_{zz}s_z^2+2I_{xy}s_xs_y+2I_{yz}s_ys_z+2I_{zx}s_zs_x, \qquad (53.1)$$

où I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, $I_{xy} \equiv I_{yx}$, $I_{yz} \equiv I_{zy}$, $I_{zx} \equiv I_{xz}$ sont des constantes définies par les expressions

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2)\, dm, \quad I_{xy} \equiv I_{yx} = -\int xy\, dm, \\ I_{yy} &= \int (z^2 + x^2)\, dm, \quad I_{yz} \equiv I_{zy} = -\int yz\, dm, \\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2)\, dm, \quad I_{zx} \equiv I_{xz} = -\int zx\, dm. \end{aligned} \tag{53.2}$$

Nous désignerons ces constantes par les symboles I_{11}, I_{22}, . . ., I_{13}. Les quantités I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} ont évidemment la signification des moments d'inertie du corps par rapport aux axes de coordonnées X, Y, Z. L'ensemble de neuf quantités

$$\begin{matrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{matrix} \tag{53.3}$$

porte le nom de *tenseur d'inertie du corps par rapport au point O* et les quantités elles-mêmes celui de *composantes de ce tenseur* *). *Le tenseur d'inertie est symétrique*, c'est-à-dire $I_{ij} = I_{ji}$. Pour le définir il suffit donc d'indiquer *six* de ses composantes. La formule (53.1) peut s'écrire sous une forme plus compacte et symétrique:

$$I = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} I_{ij} s_i s_j. \tag{53.4}$$

Connaissant les six composantes du tenseur d'inertie dans un système de coordonnées, on peut calculer d'après les formules (53.1) ou (53.4) le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe arbitraire passant par l'origine des coordonnées O. Le moment d'inertie par rapport à tout autre axe ne passant pas par l'origine des coordonnées se laisse calculer par application du théorème de Huygens-Steiner.

2. La formule (53.4) admet une interprétation géométrique évidente. Faisons passer par l'origine des coordonnées O un faisceau de droites divergentes et portons sur chacune de ces droites des segments de longueur $r = 1/\sqrt{I}$. Le lieu géométrique des extrémités de ces segments de droite est une certaine surface. Cherchons l'équation de cette surface. Conformément à la construction adoptée le rayon vecteur d'un point de cette surface est défini par l'expression $\mathbf{r} = \mathbf{s}/\sqrt{I}$ et les coordonnées de ce point $-x_i = s_i/\sqrt{I}$. En éliminant à l'aide de ces relations les quantités s_i figurant dans (53.4) nous obtenons l'équation de la surface cherchée

$$\sum\sum I_{ij} x_i x_j = 1. \tag{53.5}$$

Cette surface du second ordre est évidemment un ellipsoïde, puisque le moment d'inertie I et par suite la longueur du rayon vecteur $\mathbf{r}$ ont des valeurs finies, quelle que soit la direction de l'axe $\mathbf{s}$. C'est l'*ellipsoïde d'inertie* du corps par rapport au point O qui est le centre du corps. Si on déplace l'origine des coordonnées O par rapport au corps, l'ellipsoïde d'inertie doit changer. Si on fait coïncider l'origine O avec le centre de masse du corps, l'ellipsoïde correspondant porte le nom d'*ellipsoïde central d'inertie*.

---

*) On appelle tenseur un ensemble ordonné de neuf quantités défini par rapport à un système de coordonnées; lors de la rotation des axes de coordonnées ces quantités se transforment comme le font les produits des composantes de deux vecteurs.

3. Comme tout tenseur, le tenseur d'inertie dépend du choix de l'origine des coordonnées et des directions des axes de coordonnées. Si on change de système de coordonnées, on fait varier les valeurs des composantes du tenseur d'inertie du corps. Néanmoins quel que soit le système de coordonnées, on arrive toujours à déterminer les six composantes du tenseur d'inertie à l'aide des formules (53.2), par exemple. On peut notamment orienter les axes de coordonnées suivant les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie. Dans ce système de coordonnées, les termes de (53.5) où figurent les produits des coordonnées s'éliminent et l'équation s'écrit

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \tag{53.6}$$

ou encore

$$\sum I_i x_i^2 = 1. \tag{53.7}$$

Le tenseur d'inertie se ramène à la forme *diagonale*

$$\begin{matrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{matrix} \tag{53.8}$$

Les éléments diagonaux du tenseur sont notés avec un seul indice, le deuxième indice étant dans ce cas inutile.

Ainsi *pour tout corps solide on peut définir à partir d'une origine des coordonnées O arbitraire trois axes orthogonaux confondus avec les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps par rapport à l'origine O pour lesquels les éléments non diagonaux du tenseur d'inertie s'annulent.* Ces axes portent le nom d'*axes principaux du tenseur d'inertie.* Il est évident que ces axes sont rigidement liés au corps, de même d'ailleurs qu'y est lié l'ellipsoïde d'inertie. Connaissant la position de l'ellipsoïde d'inertie, on connaît aussitôt la position du corps. Par suite le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe se ramène au problème de la rotation de son ellipsoïde d'inertie autour de ce même point. Ce fait fut mis à profit par Poinsot (1777-1859) pour donner une interprétation géométrique évidente de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Cette interprétation est exposée dans le paragraphe suivant. Les axes principaux de l'ellipsoïde central d'inertie sont dits *axes principaux du corps lui-même.*

Les orientations des axes principaux d'un corps peuvent souvent être déterminées par des considérations de symétrie. Ainsi les axes principaux d'un parallélépipède droit homogène sont parallèles à ses arêtes. Si le corps présente une symétrie de révolution autour d'un axe, son ellipsoïde d'inertie aura la même symétrie. C'est le cas notamment du cylindre. Les moments d'inertie d'un corps cylindrique par rapport à tous les axes orthogonaux à l'axe de symétrie sont égaux. L'axe de symétrie est l'un des axes principaux. Toute droite orthogonale à cet axe sera elle aussi axe principal du corps. Il existe donc un nombre infini de triades d'axes principaux orthogonaux ayant pour axe commun l'axe de symétrie du corps. Pour une sphère, les ellipsoïdes d'inertie rapportés à n'importe quel axe passant par le centre sont identiques et tout axe sera axe principal du corps.

Dans l'étude de la dynamique des mouvements de rotation du corps solide, ce n'est pas la symétrie du corps lui-même qui importe, mais la symétrie de son ellipsoïde d'inertie. Tous les corps ayant les mêmes ellipsoïdes d'inertie sont *dynamiquement équivalents.* Il n'est pas nécessaire que le corps présente une symétrie de révolution pour que son ellipsoïde d'inertie la présente. Considérons, par exemple, un parallélépipède homogène à base carrée et plaçons l'origine des coordonnées O en un point quelconque de son axe géométrique. On démontre aisément que son ellipsoïde d'inertie sera de révolution et que l'axe de symétrie coïncide avec l'axe géométrique du parallélépipède. Du point de vue de la

dynamique le mouvement d'un tel parallélépipède est décrit par les mêmes équations que le mouvement d'un cylindre homogène. Si le parallélépipède dégénère en un cube, et que l'origine des coordonnées soit placée en son centre, l'ellipsoïde d'inertie dégénère en une sphère. Sous l'optique de la dynamique un cube homogène se comporte comme une sphère homogène.

4. Considérons maintenant le cas où le corps solide est animé d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe, par exemple autour d'un axe monté sur des paliers fixes. Les paliers exercent des forces sur le corps. Supposons que ce soient les seules forces extérieures appliquées au corps. La résultante de ces forces F s'obtient en appliquant le théorème du mouvement du centre de masse. Cette résultante est

$$F = -m\omega^2 r_C,$$

où r_C est le rayon vecteur du centre de masse, mené jusqu'à l'axe suivant la normale. Le moment des forces extérieures par rapport à l'origine des coordonnées est

$$M = -\int [r\omega^2 r_\perp]\, dm = \omega^2 \int [r_\perp r_\parallel]\, dm.$$

Faisons coïncider l'axe de rotation avec l'axe X, on a alors $r_\parallel = xi$, $r_\perp = yj + zk$. Comme $[ij] = k$, $[ik] = -j$, on a

$$M = \omega^2 j \int zx\, dm - \omega^2 k \int xy\, dm$$

ou

$$M = \omega^2 (I_{xy}k - I_{zx}j).$$

Supprimons les paliers et cherchons à savoir dans quelles conditions le mouvement du corps ne se modifie pas, i.e. reste une rotation autour du même axe X. Il faut pour cela que $F = M = 0$. Il s'ensuit que l'axe de rotation doit passer par le centre de masse du corps et que $I_{zx} = I_{xy} = 0$. Cette dernière condition signifie que l'axe de rotation doit être un des axes principaux du corps. Ces conditions sont également suffisantes puisqu'étant satisfaites la suppression des paliers ne modifie ni l'équation de mouvement du centre de masse, ni l'équation des moments par rapport au centre de masse. Si les conditions initiales sont données, ces équations décrivent univoquement le mouvement du solide.

5. Ainsi *il existe dans tout corps solide trois axes rectangulaires coïncidant avec les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie central du corps, autour desquels le corps peut tourner sans intervention de forces extérieures.* Ces axes sont appelés *axes de rotation libres* ou encore *axes permanents de rotation*. Cette dernière dénomination est utilisée pour marquer qu'en l'absence de toute perturbation la rotation par inertie d'un corps solide peut durer un temps infini. On ne saurait cependant présumer de la stabilité de cette rotation vis-à-vis de petites perturbations inévitables dans les conditions réelles. Si en présence de petites perturbations le mouvement du corps ne se modifie pas notablement en ce sens que l'axe instantané de rotation, bien que se déplaçant dans le corps et dans l'espace, se situe constamment à proximité d'un axe libre correspondant, la rotation du corps autour de cet axe sera *stable*. Mais si une perturbation aussi faible soit-elle modifie notablement le mouvement du corps, en ce sens qu'elle déplace l'axe instantané loin de sa position primitive de rotation, on dira que la rotation du corps est *instable*. On démontre dans le paragraphe suivant que *la rotation autour d'un axe correspondant à un moment d'inertie maximal ou minimal est stable, tandis que la rotation autour d'un axe correspondant à une valeur intermédiaire du moment d'inertie est instable.* Pour illustrer cette proposition on peut prendre une boîte de carton rectangulaire dont les trois arêtes sont de longueurs différentes. L'axe de plus grand moment d'inertie

sera naturellement parallèle à l'arête la plus courte et l'axe de plus petit moment d'inertie sera parallèle à l'arête la plus longue; une valeur intermédiaire du moment d'inertie correspond à l'arête de la longueur moyenne. On jette la boîte en l'air en la faisant tourner rapidement autour de l'un de ces axes. Pendant le vol l'axe de rotation se conserve s'il correspond à la plus grande ou à la plus petite valeur du moment d'inertie. Si la rotation s'effectue autour d'un axe de moment d'inertie intermédiaire, l'axe instantané de rotation se déplace constamment pendant la durée du vol de la boîte et le mouvement est des plus irréguliers.

6. Supposons maintenant que le corps solide soit en rotation autour d'un axe fixe ou d'un axe instantané OA avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ constante ou variée. Calculons son moment cinétique $\boldsymbol{L}$ par rapport à l'origine des coordonnées O, ainsi que son énergie cinétique K. Par définition

$$\boldsymbol{L} = \int [\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]\, dm.$$

Substituons $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]$ et utilisons la relation $[\boldsymbol{r}\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]] = r^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$. Nous obtenons alors

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\omega}\int r^2\, dm - \int (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\, dm.$$

En projections sur les axes de coordonnées cette relation s'écrit

$$\begin{aligned} L_x &= L_{xx}\omega_x + L_{xy}\omega_y + L_{xz}\omega_z, \\ L_y &= L_{yx}\omega_x + L_{yy}\omega_y + L_{yz}\omega_z, \\ L_z &= L_{zx}\omega_x + L_{zy}\omega_y + L_{zz}\omega_z, \end{aligned} \tag{53.9}$$

ou sous une forme condensée

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{53.10}$$

Ainsi *les composantes du vecteur moment cinétique sont des fonctions linéaires homogènes des composantes du vecteur vitesse angulaire.* Dans le système d'axes principaux les formules (53.9) se simplifient et deviennent

$$L_x = I_x\omega_x, \quad L_y = I_y\omega_y, \quad L_z = I_z\omega_z. \tag{53.11}$$

Ces formules montrent clairement que dans le cas général les orientations des vecteurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{\omega}$ ne coïncident pas. L'énergie cinétique du solide en rotation est donnée par la formule (47.2). Elle est égale à

$$K = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\sum\sum I_{ij}\omega_i\omega_j. \tag{53.12}$$

§ 54. Rotation par inertie d'un corps solide autour d'un point fixe

1. Poinsot a donné une interprétation simple et évidente de la rotation par inertie d'un corps solide autour d'un point de suspension fixe O. On attache au corps solide son ellipsoïde d'inertie centré au point de suspension O. Le mouvement réel du corps est remplacé par le mouvement de cet ellipsoïde (voir paragraphe 53, point 3). L'interprétation de Poinsot se fonde sur trois théorèmes que nous allons démontrer. Pour être plus concis, nous appellerons *pôle* le point d'intersection P de l'axe instantané avec la surface de l'ellipsoïde d'inertie.

Théorème 1. *Le rayon vecteur reliant le point de suspension O au pôle P est proportionnel à la vitesse angulaire instantanée de rotation du corps.*

Pour point de départ de la démonstration nous prendrons l'équation de l'énergie $\sum\sum I_{ij}\omega_i\omega_j = 2K = \text{const}$. Choisissons sur l'axe instantané un point Q de rayon vecteur $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2K}}$. De l'équation de l'énergie il découle alors que les coordonnées du point Q doivent vérifier l'équation $\sum\sum I_{ij}x_ix_j = 1$. Cela signifie que le point Q se trouve sur la surface de l'ellipsoïde d'inertie, et comme ce point a été choisi sur l'axe instantané, il est confondu avec le pôle P. Par suite le rayon vecteur du pôle P est lié au vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ par la relation $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{2K}\,\boldsymbol{r}$, ce qui démontre le théorème.

Théorème 2. *Le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au point où se trouve le pôle P est orthogonal au vecteur moment cinétique $\boldsymbol{L}$ du corps par rapport au point de suspension O.*

Pour la démonstration on peut utiliser l'équation de l'ellipsoïde d'inertie rapporté à n'importe quel système de coordonnées. Il est cependant commode d'utiliser l'équation rapportée au système d'axes principaux de l'ellipsoïde: $I_xx^2 + I_yy^2 + I_zz^2 = 1$. Désignons le premier membre de cette équation par $F(x, y, z)$; l'équation s'écrira donc $F(x, y, z) = 1$. Nous avons montré au § 29 (point 3) que le vecteur

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k} \equiv \text{grad } F$$

est porté par la normale à la surface de l'ellipsoïde. Cela veut dire que le vecteur $\boldsymbol{N}$ est orthogonal au plan tangent défini dans l'énoncé du théorème. Ce vecteur est égal à

$$\boldsymbol{N} = 2(I_xx\boldsymbol{i} + I_yy\boldsymbol{j} + I_zz\boldsymbol{k}).$$

D'après le premier théorème on peut l'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{N} = \mu(I_x\omega_x\boldsymbol{i} + I_y\omega_y\boldsymbol{j} + I_z\omega_z\boldsymbol{k}),$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{N} = \mu\boldsymbol{L},$$

μ étant un scalaire. Cette relation démontre le théorème.

Comme il n'y a pas de moments de forces extérieures par rapport au point de suspension O, le vecteur $\boldsymbol{L}$ ne change pas avec le temps. Par suite l'orientation du plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie est invariable dans le temps.

Théorème 3. *La longueur de la perpendiculaire abaissée du point de suspension O sur le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au point P (pôle) reste invariable dans le temps.*

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons la forme suivante de l'équation de l'énergie $(\boldsymbol{L\omega}) = 2K = \text{const}$ ou $L\omega_L = 2K = \text{const}$, où ω_L est la projection du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ sur la direction invariable du vecteur $\boldsymbol{L}$. Comme les quantités L et K sont constantes, la projection ω_L est elle aussi constante. Or nous avons démontré ci-dessus (théorème 1) que cette projection est liée à la longueur r_L de la normale par la relation $\omega_L = \sqrt{2K}r_L$. La longueur r_L est donc constante, ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte de ce théorème que *le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au point où se trouve le pôle est invariable tant par son orientation que par sa position dans l'espace*. Ce plan est dit *plan fixe*.

2. L'interprétation de Poinsot est maintenant presque évidente. En attachant au corps mobile son ellipsoïde d'inertie centré au point de suspension O, menons à un instant quelconque par le pôle P le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie. Selon les théorèmes 2 et 3 ce plan sera fixe dans le temps. Au pôle P il ne peut y avoir de glissement entre l'ellipsoïde d'inertie et le plan tangent puisque par ce point passe l'axe instantané de rotation du corps. Si on fait

rouler sans glissement l'ellipsoïde d'inertie du corps sur le plan fixe avec une vitesse angulaire proportionnelle au rayon vecteur du point de contact (c'est le pôle), conformément au théorème 1 on reproduit (à une cadence accélérée ou ralentie) la rotation du corps solide lié à l'ellipsoïde d'inertie.

3. Le pôle P se trouve simultanément sur l'ellipsoïde d'inertie et sur le plan fixe. Supposons, pour fixer les idées, que le plan fixe est, par exemple, noirci par de la suie. Le roulement de l'ellipsoïde d'inertie laissera des traces aussi bien sur la surface de l'ellipsoïde que sur le plan fixe, ces traces marquant les positions successives occupées par le pôle. La courbe que décrit le pôle sur la surface de l'ellipsoïde d'inertie porte le nom de *polhodie*. La courbe plane que décrit le même pôle sur le plan fixe est appelée *herpolhodie*. Si l'ellipsoïde d'inertie a un point de contact avec le plan fixe, au bout d'un certain temps ce même point de l'ellipsoïde sera en contact avec le même plan fixe, mais en un point différent de ce plan. Autrement dit le pôle sur la surface de l'ellipsoïde d'inertie retrouve sa position initiale. Par suite *la polhodie est une courbe fermée*, tandis qu'en général l'herpolhodie ne l'est pas.

En reliant les points de la polhodie et les points de l'herpolhodie au point de suspension O, nous obtiendrons deux surfaces coniques. La surface qui est rigidement liée au corps en rotation est le *cône de polhodie*. L'autre surface qui est immobile dans l'espace est le *cône d'herpolhodie*. Ces deux surfaces sont en contact le long d'une droite qui coïncide avec l'axe instantané de rotation. C'est pour cela qu'elles ne glissent pas l'une sur l'autre. *Le mouvement du corps peut être considéré comme un roulement sans glissement du cône de polhodie sur le cône fixe de l'herpolhodie avec une vitesse angulaire proportionnelle au rayon vecteur reliant le point de suspension au pôle.* Cette formulation due elle aussi à Poinsot ne se distingue de la précédente que par les termes utilisés.

4. Considérons un corps solide libre en rotation autour d'un axe principal de l'ellipsoïde central d'inertie. Dans l'interprétation de Poinsot l'ellipsoïde d'inertie s'appuie alors par l'un de ses sommets sur le plan fixe perpendiculaire à l'axe principal considéré. La polhodie et l'herpolhodie dégénèrent en des points confondus avec le pôle P. Il s'ensuit que la rotation autour d'un axe principal de l'ellipsoïde central d'inertie peut durer indéfiniment. Ce résultat coïncide avec l'assertion donnée ci-dessus selon laquelle les axes principaux de l'ellipsoïde central d'inertie sont des axes de rotation libres.

5. La seconde interprétation de Poinsot permet également de préciser autour de quels axes libres la rotation est stable et autour de quels autres elle est instable. Ce problème se ramène à dresser l'équation du cône de polhodie par rapport au système de coordonnées lié au corps. Prenons le système d'axes principaux. Soient X l'axe du plus grand moment d'inertie et Z l'axe du plus petit moment d'inertie, ce qui revient à poser

$$I_x > I_y > I_z. \tag{54.1}$$

A tout instant le mouvement du corps est une rotation autour d'un axe instantané. Pendant la rotation l'énergie cinétique se conserve:

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = 2K = \text{const.} \tag{54.2}$$

Le moment cinétique se conserve lui aussi

$$\boldsymbol{L} = I_x\omega_x\boldsymbol{i} + I_y\omega_y\boldsymbol{j} + I_z\omega_z\boldsymbol{k}.$$

En élevant au carré

$$I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = L^2 = \text{const.} \tag{54.3}$$

En multipliant l'équation (54.2) par $h^2 \equiv L^2/(2K)$ et en la retranchant de (54.3) on obtient l'équation homogène

$$I_x(I_x - h^2)\,\omega_x^2 + I_y(I_y - h^2)\,\omega_y^2 + I_z(I_z - h^2)\,\omega_z^2 = 0 \tag{54.4}$$

que doivent vérifier les composantes du vecteur vitesse angulaire ω. L'équation de l'axe instantané peut s'écrire $r = \rho\omega$, où ρ est un paramètre variable pouvant prendre toute valeur arbitraire. On en tire ω_x, ω_y, ω_z ; en les substituant dans l'équation (54.4) on trouvera que les coordonnées des points de l'axe instantané doivent vérifier l'équation homogène du second ordre

$$I\ (I_x - h^2)\ x^2 + I_y\ (I_y - h^2)\ y^2 + I_z\ (I_z - h^2)\ z^2 = 0. \qquad (54.5)$$

Or cela signifie que l'axe instantané de rotation se trouve sur la surface (54.5) qui est une surface conique du deuxième ordre. Ce cône est précisément le cône de polhodie puisque par définition il est le lieu des positions successives de l'axe instantané dans le corps.

6. La forme du cône de polhodie (54.5) dépend de la valeur du paramètre $h^2 = L^2/(2K)$. Il est évident que tous les coefficients de l'équation (54.5) ne peuvent être de même signe car autrement l'équation ne serait pas vérifiée par des valeurs réelles de x, y, z. Il s'ensuit que $I_x - h^2 > 0$. En effet, si $I_x - h^2$ était plus petit que zéro, d'après (54.1) les quantités $Iy - h^2$ et $I_z - h^2$ seraient à plus forte raison inférieures à zéro et les trois coefficients de (54.5) seraient tous négatifs. Or c'est impossible. Nous voyons ainsi qu'il ne peut exister que deux cas différents :

cas 1 : $(I_y - h^2) > 0, \quad (I_z - h^2) < 0$;

cas 2 : $(I_y - h^2) < 0, \quad (I_z - h^2) < 0$.

Dans le premier cas l'équation (54.5) est de la forme $Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$, où A, B, C sont des constantes positives telles que $A > B > C$. La section du cône de polhodie par le plan $z = a =$ const est une ellipse $Ax^2 + By^2 = Ca^2$; il en résulte que le cône de polhodie renferme l'axe Z du plus petit moment d'inertie. La section du cône par les plans $x =$ const et $y =$ const est de forme hyperbolique.

Dans le second cas l'équation du cône de polhodie est de la forme $Ax^2 - By^2 - Cz^2 = 0$, les constantes A, B, C étant toutes positives. La section du cône par le plan $x =$ const est une ellipse. Les sections par les plans $y =$ const et $z =$ const donnent des hyperboles.

Ainsi suivant la valeur du paramètre h, *le cône de polhodie renferme soit l'axe du plus grand moment d'inertie, soit l'axe du plus petit moment d'inertie. Il ne renferme jamais l'axe correspondant à une valeur intermédiaire du moment d'inertie.*

7. Il est maintenant facile de décider de la stabilité de la rotation autour des axes libres. Si le corps tourne par inertie autour d'un axe libre, ce mouvement sera déformé par une perturbation éventuelle. Une fois la perturbation supprimée, l'axe instantané commence à décrire dans le corps un cône de polhodie. Si la rotation s'effectuait autour d'un axe de plus petit ou de plus grand moment d'inertie, et que la perturbation soit faible, une fois cette perturbation supprimée l'axe instantané décrira un cône de polhodie de faible ouverture autour de l'axe de rotation. En décrivant ce cône l'axe instantané sera toujours à proximité de l'axe libre autour duquel le corps avait été mis en rotation. La rotation autour de cet axe est donc stable. Par contre si le corps a été initialement mis en rotation autour d'un axe de moment d'inertie moyen, à la suite d'une perturbation apparaît un cône de polhodie de grande ouverture à l'intérieur duquel se trouve l'axe de plus grand ou de plus petit moment d'inertie. En décrivant ce cône l'axe instantané s'éloigne beaucoup de sa direction initiale, par suite cette rotation est instable.

8. Dans le cas où les moments d'inertie rapportés aux axes principaux, X et Y par exemple, sont égaux entre eux ($I_x = I_y$) l'ellipsoïde d'inertie et le cône de polhodie seront de révolution autour de l'axe Z. Le cône de polhodie aura pour équation $A\ (x^2 + y^2) - Cz^2 = 0$, A et C étant des constantes positives. La section de ce cône par un plan orthogonal à l'axe Z est un cercle, tandis

que les sections par des plans parallèles à cet axe seront des hyperboles. Le cône de polhodie entoure donc l'axe Z. La rotation autour de cet axe sera stable, tandis que la rotation autour d'un axe orthogonal à Z sera instable. En effet si le corps tournait autour de l'axe X, par exemple, et avait été soumis à une perturbation passagère, l'axe instantané décrira un cône de polhodie autour de l'axe Z. Si la perturbation est petite, l'angle d'ouverture du cône est grand et ses génératrices forment avec l'axe de symétrie Z des angles proches de 90°. En parcourant un tel cône l'axe instantané de rotation s'éloignera beaucoup de sa position initiale dans le corps, mais sera tout le temps presque perpendiculaire à l'axe Z. Toute droite orthogonale à l'axe et passant par le centre de masse du corps peut servir d'axe de rotation permanent.

Si les moments d'inertie I_x, I_y, I_z sont égaux, les coefficients de l'équation (54.5) sont identiquement nuls. Cela signifie que tout axe passant par le centre de masse du corps peut se comporter comme un axe de rotation libre.

CHAPITRE VIII

LA GRAVITATION

§ 55. Lois de Kepler et loi de la gravitation universelle

1. A la suite d'un dépouillement méticuleux des observations faites pendant de nombreuses années par l'astronome danois Ticho Brahe (1546-1601), Kepler (1571-1630) a établi trois lois empiriques régissant les mouvements des planètes. Ces lois s'énoncent comme suit :

1) *chaque planète décrit autour du Soleil une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers* ;

2) *les aires balayées par le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète sont proportionnelles aux temps employés à les décrire* ;

3) *les carrés des temps de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.*

Les deux premières lois furent publiées par Kepler en 1609 et la troisième en 1619. Les *lois de Kepler* conduisirent tout naturellement Newton à la découverte de la *loi de la gravitation universelle.*

Il résulte de la première loi de Kepler que la trajectoire d'une planète est une courbe plane. Compte tenu de ce résultat et conformément au § 31, il résulte de la deuxième loi de Kepler que la force qui engendre le mouvement des planètes sur des orbites fermées est orientée vers le Soleil. Calculons comment varie cette force avec la distance jusqu'au Soleil et avec la masse de la planète. Pour simplifier les calculs nous supposerons d'abord que la planète se déplace non sur une ellipse mais sur un cercle au centre duquel se trouve le Soleil. Pour les planètes du système solaire cette approximation n'est pas trop grossière, car les ellipses que décrivent les planètes sont peu différentes des cercles. Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon r, l'accélération de la planète est

$$\boldsymbol{a}_r = -\omega^2 \boldsymbol{r} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\boldsymbol{r}.$$

Pour une planète décrivant une orbite circulaire, la troisième loi de Kepler se traduit par

$$T_1^2 : T_2^2 : T_3^2 : \ldots = r_1^3 : r_2^3 : r_3^3 : \ldots,$$

soit

$$\frac{r^3}{T^2} = \mathcal{K},$$

où $\mathcal{K}$ est une constante pour toutes les planètes du système solaire. Elle porte le nom de *constante de Kepler*. En fonction des paramètres de l'orbite elliptique la constante de Kepler s'exprime par la formule

$$\mathcal{K} = \frac{a^3}{T^2}, \tag{55.1}$$

où a est la longueur du demi-grand axe de l'orbite.

En exprimant T en fonction de $\mathcal{K}$ et de r, on obtient pour l'accélération de la planète animée d'un mouvement circulaire

$$a_r = -\frac{4\pi^2\mathcal{K}}{r^2}. \tag{55.2}$$

La force agissant sur la planète est égale à

$$F = -\frac{4\pi^2\mathcal{K}m}{r^2}, \tag{55.3}$$

m étant la masse de la planète.

Nous avons démontré ainsi que les accélérations de deux planètes tournant autour du Soleil sur des orbites circulaires sont inversement proportionnelles aux carrés de leurs distances jusqu'au Soleil. Il nous reste à démontrer que cette loi reste valable pour une seule et même planète décrivant une orbite elliptique autour du Soleil. Il faut commencer par remplacer les orbites circulaires par des orbites elliptiques, c'est ce que nous ferons au paragraphe suivant. Mais on peut aussi utiliser les orbites circulaires à condition de supposer que la force d'interaction entre le Soleil et la planète ne dépend que de la distance instantanée entre eux mais est indépendante de la forme de la trajectoire de la planète. Dans cette hypothèse les formules (55.2) et (55.3) peuvent être appliquées aussi bien à des planètes différentes se déplaçant sur des orbites circulaires à des distances différentes du Soleil qu'à des positions différentes d'une même planète se déplaçant sur une trajectoire elliptique.

2. Le coefficient de proportionnalité $4\pi^2\mathcal{K}$ figurant dans les formules (55.2) et (55.3) est le même pour toutes les planètes et ne dépend donc pas de leurs masses. Il peut cependant dépendre des paramètres caractérisant le Soleil puisque le Soleil est une source des forces astreignant les planètes à se mouvoir sur des orbites fermées. Mais dans une interaction, le Soleil et n'importe quelle planète se comportent en *partenaires égaux*. La différence qui existe entre les rôles respectifs de ces partenaires est purement *quantitative*, car leurs masses sont différentes. Si la force d'interaction F est proportionnelle à la masse m de la planète, elle doit l'être aussi à la

masse M du Soleil. Cette dernière force peut donc avoir pour expression

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{55.4}$$

où G est une nouvelle constante ne dépendant ni de la masse du Soleil ni de celle de la planète. En identifiant (55.4) à (55.3) on trouve l'expression suivante pour la constante de Kepler

$$\mathcal{K} \equiv \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \tag{55.5}$$

3. Comme le Soleil et les planètes ne diffèrent les uns des autres et des autres corps que *quantitativement* par leurs masses, il est naturel de supposer qu'une attraction mutuelle s'exerce non seulement entre le Soleil et les planètes, mais aussi entre les planètes et d'une manière générale entre n'importe quels autres corps; cette force d'attraction est définie par la formule (55.4), où M et m désignent les masses des corps en interaction. Cette hypothèse introduite par Newton fut confirmée par l'expérience. Newton énonça la loi de la gravitation universelle selon laquelle *deux corps (ou deux points matériels) quelconques s'attirent mutuellement avec des forces proportionnelles au produit de leurs masses et inversement proportionnelles au carré de leur distance.* Ces forces sont appelées *forces gravitationnelles* ou *forces de la gravitation universelle.* Le coefficient de proportionnalité G figurant dans la formule (55.4) est le même pour tous les corps. C'est donc une constante universelle, l'une des plus importantes d'ailleurs qui porte le nom de *constante gravitationnelle.*

L'énoncé de la loi de la gravitation universelle suppose que les corps en interaction sont *ponctuels.* Physiquement cela signifie que les dimensions des corps sont très petites par rapport à leur distance de séparation. Ici comme c'est d'usage en Physique, les qualificatifs « grand » et « petit » sont pris dans un sens relatif : grand ou petit *par rapport à quelque chose.* La condition qu'implique l'énoncé est satisfaite dans l'interaction du Soleil avec les planètes, dans les interactions mutuelles des planètes ou dans celles des planètes avec leurs satellites. Mais lorsqu'il s'agit de l'attraction gravitationnelle de deux corps d'une dimension de 10 cm, dont les centres de masse ne sont distants que de 20 cm par exemple, ces corps ne peuvent être considérés comme ponctuels. Pour calculer leur attraction mutuelle, on doit les subdiviser en pensée en des parties de très petites dimensions, calculer par la formule (55.4) les forces d'interaction entre ces petites parties, puis faire la somme géométrique de toutes ces forces élémentaires (donc effectuer une intégration). Ce calcul repose sur le *principe de la superposition des champs gravitationnels.* Selon ce principe, *le champ gravitationnel généré par une masse donnée ne dépend absolument pas de la présence d'autres masses.*

D'autre part, *le champ gravitationnel généré par plusieurs corps est égal à la somme géométrique des champs gravitationnels générés par chacun de ces corps pris séparément*. Ce principe résulte de la généralisation des données expérimentales.

Partant de ce principe, on démontre aisément que *deux boules homogènes s'attirent mutuellement comme si leurs masses étaient concentrées aux centres* (voir problèmes 2, 3, 4 à la fin de ce paragraphe).

Remarquons encore que chaque planète est soumise non seulement à l'attraction gravitationnelle du Soleil mais encore à celle des autres corps du système solaire. La masse du Soleil prédomine de loin sur toutes les autres; elle est plus de 700 fois plus grande que la masse totale des planètes et des autres corps du système solaire.

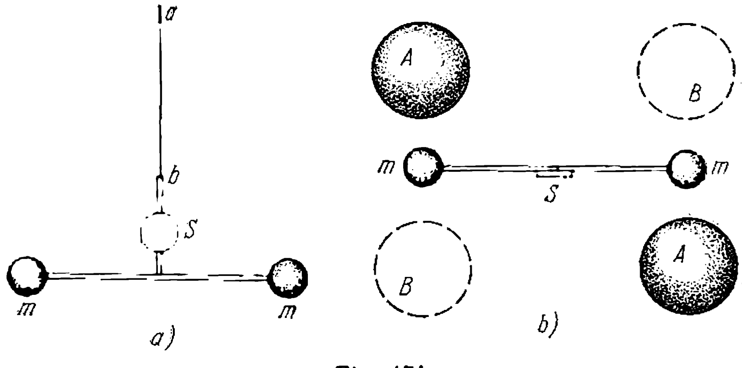
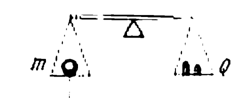


Fig. 171

C'est pour cela que le Soleil est le principal corps régissant les mouvements des planètes. On peut déduire les lois de Kepler de la loi de la gravitation universelle de Newton (cf. § 62). On suppose alors que la seule force à laquelle se trouve soumise une planète donnée est l'attraction gravitationnelle du Soleil. De ce fait *les lois de Kepler sont des lois approchées* ne tenant pas compte des effets gravitationnels des autres corps du système solaire.

4. Du temps de Newton, la loi de la gravitation universelle ne put être confirmée que par les observations astronomiques des mouvements des planètes et de leurs satellites. La première preuve expérimentale directe de cette loi pour les corps terrestres fut donnée en 1798 par le physicien anglais H. Cavendish (1731-1810) qui détermina simultanément la valeur numérique de la constante gravitationnelle G. L'appareil imaginé par Cavendish comporte un équipage mobile suspendu à un fil de torsion ab et portant deux boules de plomb identiques (chacune de masse m) (fig. 171, a). En présence de ces boules sont disposées deux grosses boules de plomb identiques chacune de masse M, avec $M \gg m$. Les grosses boules étaient dis-

posées d'abord dans la position AA puis déplacées dans la position BB (fig. 171, b). Par suite de l'interaction gravitationnelle des petites boules m avec les grosses boules M, l'équipage mobile sort de sa position d'équilibre en tournant d'un certain angle. L'angle de torsion α était mesuré en repérant la position d'un rayon lumineux réfléchi par le miroir S. En désignant par r la distance entre les centres de la grande et de la petite boule et par l la longueur du fléau de la balance de torsion, le moment du couple des forces gravitationnelles assurant la rotation de l'équipage mobile est égal à $G\frac{Mm}{r^2}l$. Dans la position d'équilibre ce moment doit être équilibré par le moment élastique $f\alpha$ du fil tordu. En écrivant la condition d'équilibre d'abord pour la position AA ($\alpha = \alpha_1$), puis pour la position BB ($\alpha = \alpha_2$) des boules de plomb, nous obtenons deux équations



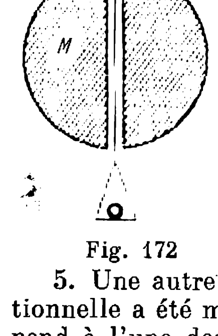


Fig. 172

$$f\alpha_1 = G\frac{Mm}{r^2}l, \quad f\alpha_2 = -G\frac{Mm}{r^2}l.$$

D'où

$$f(\alpha_1 - \alpha_2) = 2G\frac{Mm}{r^2}l.$$

Le module de torsion f du fil se laisse déterminer par la mesure de la période des oscillations libres de l'équipage mobile:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{2f}}.$$

En définitive on arrive au résultat suivant:

$$G = \frac{lr^2}{M}\left(\frac{\pi}{T}\right)^2(\alpha_1 - \alpha_2).$$

5. Une autre méthode de détermination de la constante gravitationnelle a été mise au point en 1878 par Jolly (1809-1884). On suspend à l'une des extrémités du fléau d'une balance deux plateaux superposés entre lesquels est disposé un corps en plomb immobile de masse M ayant une forme géométrique régulière (fig. 172). Dans ce grand corps massif on a creusé un canal vertical à travers lequel passe aisément le fil reliant le plateau supérieur au plateau inférieur. Si on place sur le plateau supérieur un corps de masse m, ce corps sera soumis à l'action des forces dirigées vers le bas $Q_1 = mg + F$, F étant la force d'attraction gravitationnelle entre les masses m et M. Elle est égale à $F = kG\frac{Mm}{r^2}$, r étant la distance entre les centres des deux masses et k un coefficient numérique dont la valeur dépend de la forme géométrique du corps M. Pour des corps de formes géométriques régulières, on peut le calculer théoriquement. Pour une sphère $k = 1$. Si on transporte la masse m du plateau supérieur sur le plateau inférieur, le sens de la force F s'inverse. La force dirigée suivant la verticale descendante devient égale à $Q_2 = mg -$

— F. Les valeurs de Q_1 et de Q_2 sont déterminées par les valeurs du poids qu'il faut placer sur l'autre plateau pour remettre la balance en équilibre. Ainsi

$$Q_1 - Q_2 = 2F = 2kG\frac{Mm}{r^2}.$$

On en tire la valeur de G.

6. Les mesures de G par des procédés modernes ont fourni la valeur suivante:

$$G = (6{,}6732 \pm 0{,}0031)\cdot 10^{-8}\ \text{dyne}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{g}^{-2} = (6{,}6732 \pm 0{,}0031)\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}.$$

Nous voyons ainsi que la constante gravitationnelle est très petite. C'est pour cela que les interactions gravitationnelles entre les corps ordinaires, même s'ils sont gros à l'échelle de la vie courante, sont infiniment faibles. Deux corps ponctuels, ayant chacun une masse de 1 kg et se trouvant à une distance de 1 m l'un de l'autre, s'attirent avec une force $F = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N $= 6{,}67\cdot 10^{-6}$ dyne. Les forces gravitationnelles échangées par des *particules élémentaires* sont tout à fait négligeables. Dans ce dernier cas ces forces ne jouent probablement aucun rôle vu qu'elles sont négligeables par rapport aux autres *forces fondamentales* (voir problème 1 à la fin de ce paragraphe). Mais les forces gravitationnelles sont les *principales forces* régissant le mouvement des corps célestes dont les masses sont très grandes. Dans ce dernier cas les *forces nucléaires* qui sont les forces les plus intenses, ne se manifestent pas du tout car leur rayon d'action est de l'ordre de 10^{-13} cm. Les *forces électriques* tout comme les forces gravitationnelles sont des *forces à distance* et décroissent également en proportion inverse du carré de la distance. Mais elles n'exercent aucune action sur le mouvement des corps astronomiques car elles peuvent être aussi bien des forces d'attraction que des forces de répulsion. Or tous les corps sont *électriquement neutres*, car l'action des charges positives y est compensée par l'action égale et opposée des charges négatives. Les forces gravitationnelles sont, elles, toujours des *forces d'attraction*, de sorte que les champs gravitationnels s'additionnent sans jamais se soustraire. C'est pourquoi les forces gravitationnelles sont les *seules forces* régissant le mouvement des corps astronomiques.

7. Newton s'était contenté de mettre en évidence l'existence des forces gravitationnelles et d'en donner une description quantitative. Il s'est abstenu d'émettre aucune hypothèse sur leur nature physique, estimant qu'en son temps on ne pouvait émettre que des jugements fantaisistes. Après Newton de nombreuses tentatives ont été faites pour donner une interprétation physique évidente de la nature de l'attraction gravitationnelle mais elles ne présentent pour nous aucun intérêt scientifique ni même historique. La théorie

de la gravitation fut développée dans la *théorie de la relativité générale* d'Einstein. Mais dans cette théorie il s'agit non pas d'une interprétation physique imagée, mais d'un *nouveau procédé de description et d'une généralisation de la loi de la gravitation newtonienne.*

Le refus de Newton de donner une explication de la gravitation en la ramenant à d'autres phénomènes physiques fut interprété par ses disciples comme une conception générale de la physique de l'*action directe à distance.* Cette conception affirme que la gravitation est une propriété inhérente de la matière et que chaque corps jouit de la capacité d'agir directement sur d'autres corps se trouvant en d'autres points de l'espace, et ce sans aucune intervention du milieu intermédiaire ou d'autres agents physiques.

La science moderne rejette la conception de l'action directe à distance. De nos jours la Physique considère que *toutes les interactions sont réalisées au moyen de champs.* Mais elle n'essaie même pas de représenter d'une manière imagée le mécanisme de ces actions. Elle attribue au champ une existence objective et la capacité de transmettre des interactions. Un corps A n'agit pas directement sur un corps B, il ne fait que créer autour de soi un champ gravitationnel et c'est ce champ qui exerce une action sur l'autre corps B et qui se manifeste sous la forme d'une force agissant sur ce corps.

PROBLÈMES

1. Calculer le rapport de la force d'attraction gravitationnelle s'exerçant entre deux électrons (et deux protons) à la force de leur répulsion électrostatique.

Réponse. $\frac{F_{gr}}{F_{él}}=\frac{Gm^2}{e^2}$, où $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ unités CGSE est la charge élémentaire. En portant dans la formule la masse de l'électron $m_e = 9,11 \cdot 10^{-28}$g et la masse du proton $m_p = 1,67 \cdot 10^{-24}$ g, nous trouvons pour les électrons $F_{gr}/F_{él} = 2,4 \cdot 10^{-43}$ et pour les protons $F_{gr}/F_{él} = 8 \cdot 10^{-37}$.

2. Trouver l'énergie potentielle et la force d'attraction gravitationnelle entre une sphère creuse homogène de masse M et un point matériel de masse m.

Solution. L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle de deux masses ponctuelles est donnée par la formule (25.6). Relions par une droite le centre O de la sphère et le point A où se trouve placée la masse ponctuelle m (fig. 173, *a* et *b*). Du point O pris pour sommet, décrivons deux cônes de révolution ayant pour axe commun la droite OA et dont les génératrices forment avec cet axe les angles ϑ et $\vartheta + d\vartheta$. Ces cônes découperont sur la surface de la sphère une zone sphérique élémentaire d'aire $dS = 2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$, où r est le rayon de la sphère. La masse de cette zone sphérique est $dM = M\frac{dS}{4\pi r^2} = \frac{M}{2}\sin\vartheta\, d\vartheta$. Comme les points de cette zone se trouvent à égale distance du point A, l'énergie potentielle de l'interaction gravitationnelle de la zone et de la masse ponctuelle m est égale à

$$dU = -G\frac{Mm}{2}\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Introduisons une nouvelle variable ρ qui est la distance entre la masse ponctuelle m et un point de la zone sphérique. Cette variable est liée à ϑ par la relation $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta$, R étant la distance OA entre le centre de la

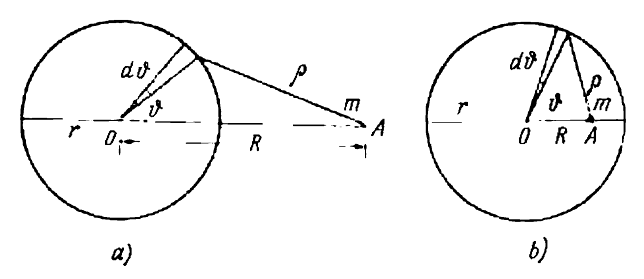


Fig. 173

sphère et la masse ponctuelle m. Lorsqu'on se déplace sur la surface de la sphère, les quantités R et r restent constantes et de ce fait

$$\rho\, d\rho = Rr \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

ainsi que

$$dU = -G\frac{Mm}{2Rr}\,d\rho \quad \text{et} \quad U = -G\frac{Mm}{2Rr}\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} d\rho.$$

Si le point A se trouve en dehors de la sphère, les valeurs maximale et minimale de ρ sont respectivement $\rho_{max} = R + r$ et $\rho_{min} = R - r$. Dans ce cas l'intégration donne

$$U = -G\frac{Mm}{R}. \tag{55.6}$$

L'énergie potentielle a la même valeur que si toute la masse de la sphère était concentrée en un seul point qui est le centre de la sphère. Ce même résultat est valable pour la force d'interaction F. En effet, d'après (29.3), la force F est donnée par la formule

$$F = -\frac{dU}{dR} = -G\frac{Mm}{R^2}.$$

On pourrait dire que *la sphère attire à soi la masse ponctuelle comme si toute sa masse était concentrée en son centre.* On peut exprimer ce même résultat autrement: *la masse ponctuelle attire la sphère comme si toute la masse de la sphère était concentrée en son centre.*

Si le point A se trouve à l'intérieur de la cavité sphérique (fig. 173, *b*) on a $\rho_{max} = r + R$, $\rho_{min} = r - R$ et l'intégration donne

$$U = -G\frac{Mm}{r}. \tag{55.7}$$

A la frontière de la cavité sphérique les deux expressions (55.6) et (55.7) deviennent identiques. D'après (55.7) *l'énergie potentielle du point matériel se trouvant à l'intérieur de la cavité ne dépend pas de R, elle est constante. Dans ces conditions la force F appliquée au point matériel est nulle* puisque $U =$ const et donc $F = -\frac{dU}{dR} = 0$.

3. Démontrer que *deux sphères creuses homogènes s'attirent mutuellement comme si leurs masses étaient concentrées dans leurs centres.*

D é m o n s t r a t i o n. On a montré dans le problème précédent que le champ de gravitation de la première sphère ne change pas si on concentre toute sa masse dans son centre. La force avec laquelle ce champ agit sur la deuxième sphère sera donc la même. Ainsi le problème se ramène au calcul de la force qu'exerce une masse ponctuelle sur une sphère. Mais dans l'exemple précédent nous avons démontré que cette force ne change pas si la masse de la deuxième sphère est elle aussi concentrée dans son centre. C'est toute la démonstration.

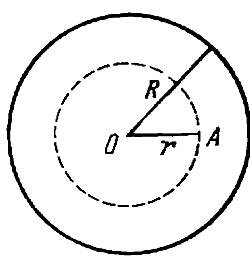


Fig. 174

4. Démontrer que *deux boules homogènes s'attirent mutuellement comme si leurs masses étaient concentrées aux centres de ces boules.* Démontrer aussi que si à l'intérieur d'une boule homogène il existe une cavité sphérique de même centre que celui de la boule, le champ de gravitation est nul à l'intérieur de cette cavité. Montrer que ce résultat reste valable pour des boules à répartition des masses en couches concentriques, donc pour le cas où la densité ρ de la substance de chaque boule ne dépend que de la distance au centre.

5. Calculer l'intensité du champ de gravitation qui est la force agissant sur l'unité de masse, à l'intérieur et en dehors d'une sphère de rayon R remplie d'une substance de densité spatiale constante ρ.

S o l u t i o n. A l'extérieur de la sphère le champ est $g = G\frac{M}{r^2}$, où M est la masse de la sphère. Pour calculer le champ régnant en un point A se trouvant à l'intérieur de la sphère à une distance r de son centre (fig. 174), menons par ce point une surface sphérique auxiliaire de même centre O. La substance de la sphère se trouvant à l'extérieur de la surface sphérique auxiliaire n'influe pas sur le champ régnant à son intérieur. Elle n'influe donc pas sur le champ au point A. Le champ de gravitation au point A est créé uniquement par la substance se trouvant à l'intérieur de la surface sphérique auxiliaire. Ce champ vaut $G\frac{m}{r^2}$, m étant la masse de la substance délimitée par la surface sphérique auxiliaire. On arrive ainsi aux résultats suivants:

$$g = \begin{cases} G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi G}{3}\frac{R^3}{r^2}\rho, & \text{pour} \quad r \geqslant R, \\ G\frac{m}{r^2} = \frac{4\pi}{3}G\rho r, & \text{pour} \quad r \leqslant R. \end{cases} \tag{55.8}$$

Pour $r = R$ les deux formules deviennent identiques.

6. Calculer l'énergie gravitationnelle U d'une sphère de rayon R uniformément remplie d'une substance de densité spatiale ρ.

S o l u t i o n. L'énergie gravitationnelle de la sphère est l'énergie potentielle déterminée par les forces de gravitation agissant entre les différents points matériels que l'on peut discerner en pensée dans la sphère massive. Elle est égale au travail changé de signe que doivent effectuer les forces extérieures pour disperser à l'infini la substance de la sphère, chaque parcelle de substance étant rejetée à l'infini. Ce travail est indépendant du procédé utilisé pour faire passer la substance de la sphère de son état initial à son état final. Pour faire le calcul on peut procéder de la manière suivante. Subdivisons en pensée la sphère en couches concentriques infiniment minces et éloignons-les successivement à l'infini en commençant par la couche extérieure. En un point quelconque d'une couche donnée l'intensité du champ de gravitation créé par la

substance se trouvant à l'extérieur de cette couche est nulle. Le champ n'est créé que par la substance englobée par la couche considérée. Si m est la masse de cette substance et dm la masse de la couche, le travail dépensé pour rejeter cette couche à l'infini est $dA = G\frac{mdm}{r}$. Or pour une sphère homogène $m = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$, M étant la masse totale de la sphère. Par suite $dA = 3G\frac{M^2}{R^6}r^4dr$. Puisque $dA = -dU$, on obtient par intégration

$$U = -3\frac{GM^2}{R^6}\int_0^R r^4\,dr = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \qquad (55.9)$$

Nous avons pris pour zéro de l'énergie potentielle sa valeur pour la sphère à l'état infiniment dispersé.

Les applications astrophysiques de la formule (55.9) présentent de l'intérêt. Les physiciens se préoccupent depuis longtemps des sources de l'énergie rayonnée par le Soleil et les étoiles. Au XIX[e] siècle, Helmholtz (1821-1894) et William Thomson (1824-1907) ont émis l'hypothèse selon laquelle le Soleil se contracte constamment sous l'action des forces gravitationnelles. La chaleur dégagée par cette contraction alimente le rayonnement d'énergie par le Soleil. L'énergie maximale pouvant être libérée par la contraction gravitationnelle du Soleil, correspond à l'état initial où toute la substance du Soleil était dispersée régulièrement dans un espace infini. Admettons qu'à l'état final la densité de la substance solaire a même valeur en tout point de son volume. En réalité la densité augmente en allant vers le centre du Soleil. Mais, pour une estimation, notre simplification n'entraîne pas une erreur trop grossière. On peut alors utiliser la formule (55.9). La masse du Soleil est $M = 2\cdot 10^{33}$ g et son rayon $R = 7\cdot 10^{10}$ cm. Avec ces valeurs numériques on trouve que l'énergie libérée est

$$E = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = 2{,}28\cdot 10^{48}\ \text{ergs}.$$

Actuellement le taux d'émission de l'énergie solaire est égal à $3{,}86\cdot 10^{33}$ ergs/s. En admettant que ce taux a été constant dans le temps (hypothèse valable pour une estimation grossière), on en conclut que l'âge du Soleil serait

$$t \approx \frac{2{,}28\cdot 10^{48}}{3{,}86\cdot 10^{33}} = 5{,}9\cdot 10^{14}\ \text{s} \approx 1{,}9\cdot 10^{7}\ \text{ans}.$$

Si on corrige ce résultat en tenant compte de la répartition de la densité dans le Soleil correspondant aux modèles en vigueur, l'âge t irait jusqu'à $6\cdot 10^7$ ans. Mais cette quantité est également trop petite. D'après les estimations géologiques, l'âge de la Terre est d'environ 4 à $4{,}5\cdot 10^9$ ans. Comme l'âge du Soleil ne saurait être inférieur, la contraction gravitationnelle doit être considérée comme une source d'énergie trop faible pour compenser les pertes d'énergie par rayonnement du Soleil. En réalité la source de l'énergie solaire, comme celle de l'énergie rayonnée par les étoiles, est constituée par les *réactions nucléaires* s'effectuant dans les profondeurs du Soleil et des étoiles. *Le résultat final de ces réactions est la transformation de l'hydrogène en hélium.* On doit remarquer cependant que la contraction gravitationnelle devient la principale source d'énergie aux étapes ultérieures de l'évolution des étoiles (nains blans, étoiles neutroniques, pulsars, collapsars et « trous noirs »).

7. On creuse dans une sphère homogène massive, de densité de substance ρ, une cavité sphérique dont le centre O_1 est déplacé par rapport au centre O de la sphère (fig. 175). Calculer le champ de gravitation à l'intérieur de cette cavité.

S o l u t i o n. Imaginons que la cavité est remplie d'une substance de même densité que celle de la sphère. Le champ de gravitation g à l'intérieur de cette cavité sera alors égal à la différence des champs gravitationnels de deux sphères massives de centres O et O_1. Comme le point d'observation A se trouve à l'intérieur de deux sphères, on peut utiliser la formule (55.8) et écrire

$$g=-\frac{4\pi}{3}G\rho r-\left(-\frac{4\pi}{3}G\rho r_1\right)=-\frac{4\pi}{3}G\rho R,$$

où R est le rayon vecteur mené du centre O au centre O_1. Ce champ est homogène, donc de même module, de même direction et de même sens en tous les points de la cavité.

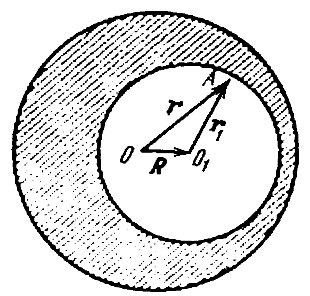


Fig. 175

§ 56. Accélération des planètes et des comètes en mouvement sur des sections coniques

1. Au paragraphe précédent nous avons remplacé des orbites elliptiques par des orbites sphériques afin de simplifier les calculs. Reprenons ce problème d'une manière plus rigoureuse, sans le simplifier. Nos calculs seront applicables non seulement aux *planètes* mais également aux *comètes*. Les observations montrent que les comètes se meuvent suivant des *hyperboles* et des *paraboles* ayant pour foyer l'emplacement du Soleil et que leurs mouvements satisfont à la deuxième loi de Kepler. Il est évident que pour ces trajectoires la troisième

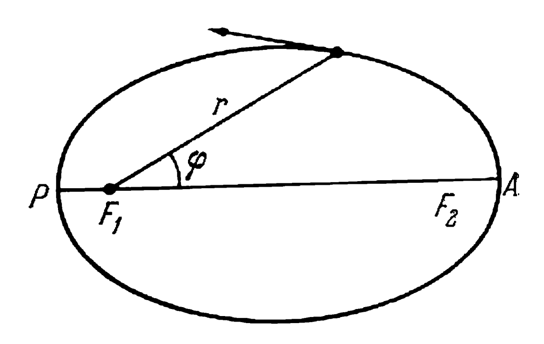


Fig. 176

loi de Kepler est dénuée de sens. Elle est d'ailleurs inutile pour le calcul de l'accélération des planètes ou des comètes. En effet, pour une trajectoire donnée, la deuxième loi de Kepler permet de calculer la vitesse des planètes et des comètes sur cette trajectoire. Cela suffit amplement pour décrire complètement le mouvement d'un corps, donc d'indiquer à tout instant sa position et sa vitesse. A partir de là on peut calculer l'accélération d'un corps en tout point de sa trajectoire. C'est ce calcul très simple que nous allons exposer.

2. Utilisons un système de coordonnées polaires dont le pôle se trouve au foyer F_1 (à l'emplacement du Soleil) et dont l'axe polaire PA est dirigé suivant le grand axe de l'ellipse ou de l'hyperbole (fig. 176). Décomposons l'accélération du corps mobile en une composante radiale a_r dirigée suivant le rayon r et une composante azimutale a_φ perpendiculaire au rayon. Ces deux

composantes ont pour expressions (cf. § 46)

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r, \qquad a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}). \tag{56.1}$$

La quantité

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \tag{56.2}$$

est la vitesse aréolaire, c'est-à-dire l'aire balayée dans l'unité de temps par le rayon vecteur de la planète ou de la comète. Selon la deuxième loi de Kepler la vitesse aréolaire est constante et par suite $a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(2\sigma) = 0$. Cela signifie que l'accélération du corps céleste considéré ne possède pas de composante azimutale et pointe donc vers le Soleil. Nous avons déjà obtenu ce résultat au § 31 en utilisant un procédé différent.

Pour trouver l'accélération radiale a_r, nous devons calculer les dérivées $\ddot{r}$ et $\dot{\varphi}$. La dérivée $\dot{\varphi}$ est donnée par la formule (56.2). Pour calculer la dérivée $\ddot{r}$ utilisons l'équation de la section conique en coordonnées polaires

$$r(1 - e\cos\varphi) = p, \tag{56.3}$$

où p et e sont des constantes dont la première porte le nom de *paramètre de l'ellipse* et la seconde celui d'*excentricité de l'ellipse*. On peut, sans porter atteinte à la généralité, poser que ces quantités sont non négatives. Pour l'ellipse $e < 1$, pour la parabole $e = 1$, pour l'hyperbole $e > 1$. Dans les cas limites où $e = 0$ et $e = \infty$, on obtient un cercle et une droite. En dérivant l'équation (56.3) par rapport au temps, on trouve

$$\dot{r}(1 - e\cos\varphi) + er\dot{\varphi}\sin\varphi = 0,$$

ou après multiplication par r et compte tenu de (56.2) et de (56.3) on obtient

$$p\dot{r} + 2e\sigma \sin\varphi = 0.$$

En dérivant une seconde fois on a

$$p\ddot{r} + 2\sigma e\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} = 0.$$

En y substituant $\dot{\varphi} = \frac{2\sigma}{r^2}$, $e\cos\varphi = 1 - \frac{p}{r}$, nous avons

$$\ddot{r} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \frac{4\sigma^2}{r^3} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \dot{\varphi}^2 r.$$

On tire alors de la première formule (56.1)

$$a_r = -\frac{4\sigma^2}{pr^2}. \tag{56.4}$$

Ainsi *il résulte des deux premières lois de Kepler que l'accélération d'une planète ou d'une comète est inversement proportionnelle au carré de sa distance au Soleil.*

3. Mettant en œuvre la troisième loi de Kepler on peut démontrer que le facteur de proportionnalité $\frac{4\sigma^2}{p}$ a même valeur pour toutes les planètes. C'est ce que nous allons faire. L'aire de l'ellipse est égale à πab, a et b étant les longueurs de son demi-grand et demi-petit axe. Puisque la vitesse aréolaire σ est constante, on a $\sigma = \pi ab/T$, T étant la période de révolution de la planète sur son orbite. Si nous utilisons encore la formule de géométrie bien connue

$p = b^2/a$, (56.4) devient

$$a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\frac{1}{r^2}. \quad (56.5)$$

(Pour un mouvement circulaire uniforme cette formule se ramène à la formule connue $a_r = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}$). Introduisons la constante de Kepler (55.1):

$$a_r = -\frac{4\pi^2 \mathcal{K}}{r^2}. \quad (56.6)$$

Ce résultat coïncide avec la formule (55.2), mais pour l'établir nous n'avons fait appel qu'aux lois empiriques de Kepler sans aucune autre considération spéciale. Cela montre que la formule (55.2) est exacte. On pouvait s'y attendre puisque conformément aux conceptions fondamentales de la mécanique newtonienne l'accélération d'une planète ne doit dépendre que des positions relatives du Soleil et de la planète, et ce, quelles que soient sa trajectoire et sa vitesse. Pour la même raison la formule (56.6) peut être utilisée pour le calcul des accélérations des comètes, quoique la troisième loi de Kepler y soit inapplicable. Dans ce cas la constante de Kepler $\mathcal{K}$ aura la même valeur numérique, mais ne pourra plus s'exprimer en fonction des paramètres de l'orbite de la comète par des formules analogues à (55.1).

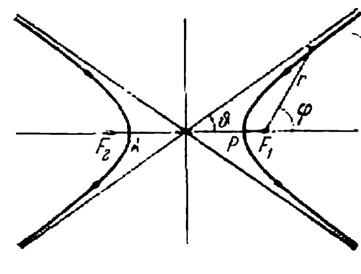


Fig. 177

4. Le mouvement sur une parabole peut être considéré comme le cas limite du mouvement sur une ellipse dont l'un des foyers est éloigné à l'infini. Quant au mouvement hyperbolique, on doit y apporter quelques explications supplémentaires.

Une hyperbole comporte deux branches indépendantes. Pour que les deux branches puissent être décrites par une seule équation (56.3) on doit admettre que la distance r peut prendre des valeurs positives et *négatives*. Soit ϑ l'angle défini par la condition $\cos\vartheta = 1/e$. Cet angle caractérise les directions des *asymptotes à l'hyperbole* (fig. 177). Si $|\varphi| > \vartheta$, r est positif et l'équation décrit la branche de droite de l'hyperbole. Si $|\varphi| < \vartheta$, r est négatif et on doit chercher le point de la courbe non pas le long de la demi-droite faisant l'angle φ, mais le long de la demi-droite opposée. On obtient ainsi la branche de gauche de l'hyperbole.

Il est évident qu'un point mobile ne peut passer d'une branche de l'hyperbole à une autre. Si le point est soumis à une force d'attraction, la concavité de sa trajectoire doit faire face au centre de force. Si par exemple le centre de force (le Soleil) se trouve au foyer F_1, le point mobile ne peut parcourir que la branche de droite de l'hyperbole. Pour dégager les lois des mouvements sur les sections coniques en général et non sur les seules orbites elliptiques, il est commode d'introduire, tout formellement d'ailleurs, un point matériel auxiliaire parcourant la branche de gauche de l'hyperbole sous l'action d'une force de répulsion émanant du même centre de force F_1. L'énergie potentielle de ce point auxiliaire sera égale à $U = +G\frac{Mm}{|r|}$. Elle est positive puisqu'il s'agit de forces de répulsion. Mais comme pour la branche de gauche de l'hyperbole les valeurs de r sont négatives, cette expression peut s'écrire aussi $U = -G\frac{Mm}{r}$. C'est exactement la même formule que celle qui exprime l'énergie potentielle

d'un point réel parcourant la branche de droite de l'hyperbole. Donc si l'énergie et le moment cinétique du point auxiliaire par rapport au foyer F_1 sont égaux aux mêmes quantités du point réel, les mouvements de ces deux points seront décrits par les *mêmes équations*. Or, dans les calculs mathématiques, ce qui importe n'est pas la nature du mobile, mais les équations par lesquelles on décrit le mouvement. Au point de vue mathématique tout se passe formellement comme s'il n'y avait qu'un seul point jouissant de la capacité de passer d'une branche de l'hyperbole sur une autre. Nous illustrerons le bien-fondé de notre artifice par un exemple au § 58. Il n'existe pas de forces gravitationnelles de répulsion, mais on peut les introduire dans des raisonnements. En outre les forces de répulsion se manifestent dans les interactions des charges électriques de même signe. Ces forces décroissent tout comme les forces de gravitation en raison inverse du carré de la distance. De ce fait le mouvement sous l'action des forces de répulsion présente un intérêt réel pour la Physique.

§ 57. Mouvements elliptique, parabolique et hyperbolique

1. *Lorsque la trajectoire est elliptique, le mouvement de la planète est fini*, c'est-à-dire qu'elle se meut dans une région limitée de l'espace sans s'éloigner à l'infini. Par contre, *dans le cas de trajectoires paraboliques et hyperboliques, le mouvement est infini* en ce sens que les planètes ne sont pas astreintes à se mouvoir dans une région limitée de l'espace et peuvent s'éloigner à l'infini. Ainsi le problème consiste à déterminer les conditions dans lesquelles le mouvement des planètes est fini ou infini.

En désignant par E l'énergie totale d'une planète on a

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = E = \text{const.} \qquad (57.1)$$

Nous ne tenons pas compte de l'énergie cinétique du Soleil estimant qu'elle est très petite devant celle de la planète. La justesse de cette approximation tient à ce que la masse de la planète est petite par rapport à celle du Soleil. De même en désignant par L le moment cinétique de la planète par rapport au Soleil, on écrira

$$mr^2\dot{\varphi} = L = \text{const.} \qquad (57.2)$$

Eliminons entre ces équations la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$. Pour ce faire, décomposons la vitesse totale v en une composante radiale v_r et une composante azimutale $r\dot{\varphi}$. On peut alors écrire

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2},$$

et l'équation (57.1) devient

$$\frac{m}{2}v_r^2 - G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E = \text{const.} \qquad (57.3)$$

Cette dernière équation ne contient qu'une seule inconnue — la vitesse radiale v_r. Formellement on peut la considérer comme l'*équa-*

tion de l'énergie pour un mouvement unidimensionnel radial du point matériel. Le rôle de l'énergie potentielle est assumé par la fonction

$$V(r) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

2. Le problème se trouve ainsi ramené à la détermination des conditions dans lesquelles un mouvement unidimensionnel d'énergie potentielle $V(r)$ serait fini ou infini. Cette question a déjà été considérée au § 25. Il est commode de résoudre ce problème par un procédé graphique. Sur la figure 178 les courbes en pointillé représentent respectivement les fonctions

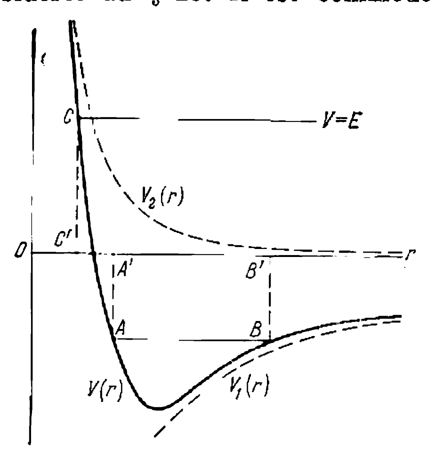


Fig. 178

$$V_1(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

et

$$V_2(r) = \frac{L^2}{2mr^2},$$

en supposant que $L \neq 0$. La courbe $V(r)$ que nous cherchons à obtenir s'obtient en additionnant les ordonnées des points des deux courbes en pointillé. Pour $r \to 0$ la fonction $V_2(r)$ tend à l'infini plus vite que la fonction $V_1(r)$. Par suite, pour r petit, la fonction $V(r) = V_1(r) + V_2(r)$ est positive et tend asymptotiquement vers $+\infty$ lorsque $r \to 0$. Pour $r \to \infty$ la fonction $V_1(r)$ tend vers zéro moins vite que ne le fait la fonction $V_2(r)$. Pour r grand la fonction $V(r)$ est négative et tend asymptotiquement vers zéro lorsque $r \to \infty$. Le graphique de cette fonction est représenté sur la figure 178 par la courbe en trait plein. Elle a la forme d'un puits de potentiel. Pour $L = 0$, on a $V(r) \equiv V_1(r)$, le minimum sur la courbe se déplace vers l'origine des coordonnées et s'éloigne à $-\infty$. Ceci correspond au cas où la planète se déplace le long d'une droite passant par le centre du Soleil.

Comme la quantité $^1/_2\, mv_r^2$ ne peut être négative, il résulte de l'équation (57.3) que la région où peut se trouver la planète est définie par la condition $V(r) \leqslant E$. Menons la droite horizontale $V = E = \text{const}$. Les parties de la courbe $V(r)$ se trouvant au-dessus de cette droite correspondent aux points de l'espace qu'une planète d'énergie E ne saurait atteindre. Si $E < 0$, la droite coupera la courbe $V = V(r)$ en deux points A et B. Désignons par A' et B' leurs projections sur l'axe des abscisses. La planète ne peut se déplacer que dans la région comprise entre A' et B', elle sera pour ainsi

dire « localisée dans le puits de potentiel » $V = V(r)$. Son mouvement sera fini et sa trajectoire sera *elliptique*. Si $E > 0$, la droite coupe la courbe $V(r)$ en un seul point C dont la projection sur l'axe des abscisses est C'. Si la planète se déplaçant de droite à gauche arrive au point C', elle rebroussera chemin en allant vers la droite et en s'éloignant de façon monotone à l'infini. Son mouvement sera donc infini sur une trajectoire *hyperbolique*. Enfin pour $E = 0$ le mouvement est également infini. Ce cas intermédiaire entre les mouvements elliptique et hyperbolique correspond à un mouvement *parabolique*.

Ainsi *pour* $E > 0$ *le mouvement est hyperbolique, pour* $E < 0$ *elliptique et pour* $E = 0$ *parabolique. Dans le cas de forces de répulsion l'énergie* E *sera toujours positive et de ce fait le mouvement sera toujours hyperbolique* (*dans un cas particulier rectiligne*). Comme pour $r \to \infty$ la fonction $V(r)$ s'annule, on a

$$E = \frac{m}{2} v_\infty^2. \tag{57.4}$$

Il s'ensuit que *dans le cas d'un mouvement hyperbolique le point matériel arrive à l'infini avec une vitesse finie* v_∞ *et dans le cas d'un mouvement parabolique il arrive à l'infini avec une vitesse nulle.* La vitesse initiale v_p que doit posséder le point matériel pour pouvoir parcourir une trajectoire parabolique porte le nom de *vitesse parabolique.* Cette vitesse se laisse déterminer par l'équation (57.1) en y posant $E = 0$. Si r_0 désigne la valeur initiale du rayon r, on aura

$$\frac{mv_p^2}{2} - G\frac{Mm}{r_0} = 0,$$

d'où

$$v_p = \sqrt{2G\frac{M}{r_0}}. \tag{57.5}$$

La vitesse parabolique est en relation simple avec la vitesse « circulaire » v_c. C'est la vitesse que doit posséder une planète pour pouvoir décrire autour du Soleil, sous l'action de la force gravitationnelle, une trajectoire circulaire de rayon r_0. Cette vitesse s'obtient en égalant l'accélération centripète v_c^2/r_0 à la force gravitationnelle $G\frac{M}{r_0^2}$ appliquée à l'unité de masse:

$$v_c = \sqrt{G\frac{M}{r_0}} \tag{57.6}$$

et par suite

$$v_p = v_c\sqrt{2}. \tag{57.7}$$

PROBLÈMES

1. Un astéroïde qui décrivait une orbite circulaire autour du Soleil s'est scindé en deux fragments de même masse à la suite d'explosions. Aussitôt après l'explosion l'un des fragments s'arrête, tandis que l'autre continue son mouvement. Quelle sera la trajectoire de ce second fragment : elliptique, hyperbolique ou parabolique ?

Réponse. Sa trajectoire sera hyperbolique.

2. Supposer que dans le problème précédent les deux fragments résultant de l'explosion de l'astéroïde volent dans des directions rectangulaires à la même vitesse. Quelles seront leurs orbites ?

Réponse. Les trajectoires des deux fragments seront paraboliques.

§ 58. Calcul des paramètres de l'orbite

1. Partant des lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique on peut calculer les longueurs du grand et du petit axe d'une orbite elliptique. Au *périhélie P* et à l'*aphélie A* (fig. 179) la vitesse radiale de la planète est nulle. En posant dans (57.3) $v_r = 0$ on trouve pour ces points

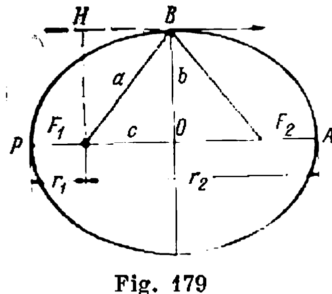


Fig. 179

$$r^2 + G\frac{Mm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0. \quad (58.1)$$

Pour $E < 0$ cette équation du second degré a deux racines réelles positives r_1 et r_2. L'une des racines correspond au périhélie P et l'autre à l'aphélie A. La somme $r_1 + r_2$ est la longueur du *grand axe* de l'ellipse. En utilisant la notation usuelle $2a$ de cette longueur, on a

$$2a = r_1 + r_2 = -G\frac{Mm}{E} = -G\frac{M}{\varepsilon}, \quad (58.2)$$

où $\varepsilon = E/m$ est l'énergie totale par unité de masse de la planète. Comme pour un mouvement elliptique $\varepsilon < 0$ l'expression (58.2) est essentiellement positive, comme il se doit.

Les trajectoires circulaires sont des cas dégénérés des orbites elliptiques. On trouve la condition du mouvement sur une orbite circulaire en posant $r_1 = r_2 = r$ dans (58.2). On trouve alors $2E = -G\frac{Mm}{r}$, soit $2E = U$. En écrivant cette égalité sous la forme $E = U - E$ et en utilisant la relation $E = K + U$ on obtient

$$E = -K. \quad (58.3)$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire la somme de l'énergie totale et de l'énergie cinétique est égale à zéro. On démontre aisément que cette condition permet de retrouver la formule (57.6).

La formule (58.3) reste valable pour un mouvement elliptique si on entend par K la valeur *moyenne dans le temps* de l'énergie cinétique de la planète. En effet le mouvement elliptique étant fini, on peut lui appliquer le théorème de viriel (§ 25, point 6):

$$\overline{K} = -\frac{1}{2}\overline{rF} = \frac{1}{2}\overline{rF} = \frac{GMm}{2}\left(\overline{\frac{1}{r}}\right) = -\frac{1}{2}\overline{U}.$$

En retranchant $\frac{1}{2}\overline{K}$ des deux membres et en remarquant que $E = \overline{K} + \overline{U}$ on obtient

$$\overline{K} = -E,$$

ce qui démontre notre assertion.

2. Calculons maintenant la longueur b du *demi-petit axe* de l'ellipse. Pour cela on doit connaître, en plus de l'énergie, le moment cinétique de la planète ou sa vitesse aréolaire $\sigma = \dot{S}$. On peut poser que la longueur du grand axe est connue puisqu'elle est univoquement déterminée par l'énergie de la planète. Soit B un des points où le petit axe coupe l'ellipse (cf. fig. 179). Comme la somme des distances de tout point de l'ellipse aux foyers F_1 et F_2 est constante et égale à $2a$, on a $F_1B = a$. La vitesse aréolaire au point B est

$$\sigma = \frac{1}{2}vb, \tag{58.4}$$

puisque b est la longueur de la perpendiculaire F_1H abaissée du foyer F_1 sur la direction de la vitesse en ce point. La vitesse v au point B se déduit de l'équation de l'énergie. En y posant $r = a$, on trouve

$$\frac{v^2}{2} - G\frac{M}{a} = \varepsilon.$$

En y substituant l'expression de ε tirée de (58.2) on obtient v. Puis on trouve que

$$b = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{GM}}. \tag{58.5}$$

3. Etendons les résultats obtenus au cas du *mouvement hyperbolique*. Nous utiliserons pour cela l'artifice décrit au § 56, point 4. Sur la branche de droite de l'hyperbole (cf. fig. 177) se déplace la comète et sur celle de gauche le point matériel auxiliaire. Ces deux mouvements sont décrits par la même équation (57.3). Aux sommets P et A de l'hyperbole la vitesse radiale v_r étant nulle, nous retombons sur l'équation du second degré (58.1), où l'énergie E est cependant positive; par suite les deux racines sont de signes contraires. La racine positive r_1 correspond au sommet P et la racine négative r_2 au sommet A. La somme $r_1 + r_2$ est négative. En valeur absolue cette somme représente la distance entre les sommets P et A. En utilisant pour désigner cette distance la notation usuelle $AP = 2a$ on obtient

$$2a = -(r_1 + r_2) = G\frac{Mm}{E} = G\frac{M}{\varepsilon}. \tag{58.6}$$

Cette formule coïnciderait exactement avec (58.2) si on convenait de considérer la distance entre les sommets de l'hyperbole comme une quantité négative.

4. Etablissons maintenant pour le mouvement hyperbolique une formule analogue à (58.4). Il est d'usage de désigner par $2c$ la distance F_1F_2 entre les foyers et par b la racine carrée $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Menons par le foyer F_2 une droite parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole (fig. 180). Abaissons du foyer F_1 sur la droite F_2M la perpendiculaire F_1M. La longueur du segment de droite F_2M peut être considérée comme la différence des distances des foyers F_1 et F_2 jusqu'au point infiniment éloigné où se coupent les droites parallèles

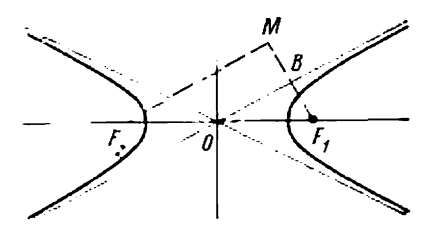


Fig. 180

F_2M et OB. En vertu de la propriété connue de l'hyperbole, on a $F_2M = 2a$. Appliquant le théorème de Pythagore, on trouve que la distance F_1M est égale à $2b$. La vitesse aréolaire qui est une quantité constante peut être calculée pour un point se déplaçant à l'infini. Le rayon vecteur d'un tel point décrit dans l'unité de temps un triangle de base v_∞ et de hauteur $F_1B = b$. L'aire de ce triangle

$$\sigma = \frac{1}{2} bv_\infty \tag{58.7}$$

est la vitesse aréolaire. La quantité v_∞ est donnée par la formule (57.4) que l'on peut écrire aussi

$$\frac{v_\infty^2}{2} = \varepsilon. \tag{58.8}$$

L'angle ϑ entre les asymptotes de l'hyperbole est donné par

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{b}{a} = \frac{bv_\infty^2}{GM}. \tag{58.9}$$

5. Le paramètre p de l'ellipse et de l'hyperbole est défini par l'expression $p = b^2/a$. En y portant les valeurs de b et de a nous obtenons dans les deux cas la même expression

$$p = \frac{4\sigma^2}{GM}. \tag{58.10}$$

Cette même formule définit le paramètre p de la parabole qui est la courbe limite de l'ellipse et de l'hyperbole. Pour la parabole le paramètre p est la seule quantité caractérisant sa forme.

6. Le type de trajectoire d'une planète est déterminé par les conditions initiales, i.e. la position et la vitesse à un instant donné pris comme instant initial. Considérons l'exemple suivant. Soient S

le Soleil et A la position initiale de la planète (fig. 181). Désignons par r_0 la distance AS. Communiquons à la planète se trouvant en A une vitesse v_0 dirigée suivant la normale à AS et voyons comment se modifie la forme de la trajectoire suivant la valeur de v_0. Si l'énergie totale de la planète est négative, i.e. v_0 est inférieur à la vitesse parabolique v_p, la planète aura une trajectoire elliptique. Pour

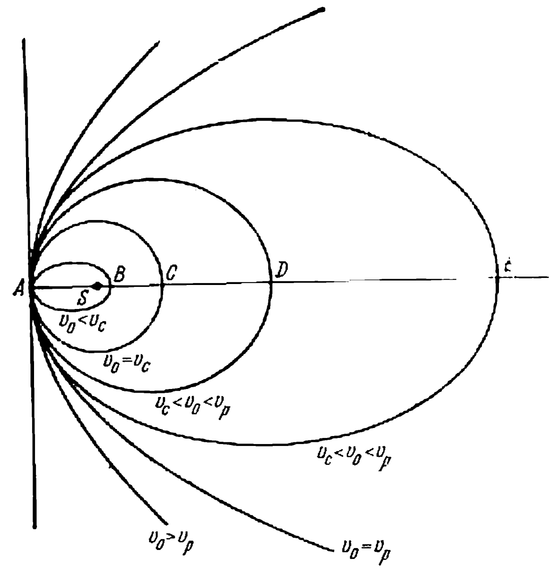


Fig. 181

$v_0 = 0$, l'ellipse dégénère en une droite passant par le centre du Soleil S. Pour $v_0 = v_c$ le mouvement sera circulaire et les points A et C seront équidistants du Soleil. La distance AC (grand axe) est égale à $2r_0$. Lorsque l'énergie diminue, le grand axe de l'ellipse se raccourcit et pour $v_0 < v_c$ il devient inférieur à $2r_0$. Le point A se trouve alors à plus grande distance du Soleil S (c'est l'aphélie)

Vitesse initiale	Trajectoire de la planète
$v_0 = 0$	Droite passant par le centre du Soleil
$v_0 < v_c$	Ellipse dont le périhélie est en B et l'aphélie en A
$v_0 = v_c$	Cercle centré sur le Soleil
$v_c < v_0 < v_p$	Ellipse dont le périhélie est en A et l'aphélie en D
$v_0 = v_p$	Parabole
$v_0 > v_p$	Hyperbole

que le point B (le périhélie). Pour $v_0 > v_c$ le grand axe est plus grand que $2r_0$, le point A est alors le périhélie et le point D (ou E) est l'aphélie. Pour $v = v_p = v_c \sqrt{2}$ la trajectoire est une parabole et enfin pour $v > v_p$ c'est une hyperbole. Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessus.

PROBLÈME

Dans les expériences classiques de Rutherford on étudiait la diffusion des particules α par les noyaux de différents éléments chimiques. En supposant que les noyaux sont infiniment lourds et que la diffusion est due aux forces de répulsion coulombiennes, montrer que l'angle de déviation θ de la vitesse des particules α par rapport à sa direction initiale est lié au paramètre de choc b par la relation

$$\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} = \frac{mbv_\infty^2}{2Ze^2}, \tag{58.11}$$

où m est la masse de la particule α, v_∞ sa vitesse à grande distance du noyau, $2e$ sa charge électrique, Ze la charge du noyau (e charge électrique élémentaire, Z numéro atomique de l'élément).

R e m a r q u e. Le *paramètre de choc* est la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de diffusion (du noyau) sur la direction initiale de la tangente à la trajectoire d'une particule se trouvant à l'infini.

Nous utiliserons la formule (58.11) en physique atomique pour l'étude de l'expérience de Rutherford.

§ 59. Influence du mouvement du Soleil

1. Dans notre étude du mouvement des planètes nous n'avons pas tenu compte de celui du Soleil, posant que sa masse était infiniment grande comparée à celles des planètes. Nous avons défini l'accélération de la planète par la formule

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{a}_{\text{abs}} = \boldsymbol{F}, \tag{59.1}$$

où $\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$ est la force newtonienne de l'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil sur la planète. Le symbole $\boldsymbol{a}_{\text{abs}}$ désigne l'accélération de la planète rapportée à un référentiel d'inertie, celui de Copernic par exemple. Tenons compte maintenant du déplacement du Soleil. Pour trouver l'équation de mouvement de la planète par rapport au Soleil on doit remplacer la masse m de la planète par la masse réduite $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ (cf. § 20). L'équation du mouvement relatif est alors

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} \equiv \mu\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = \boldsymbol{F}.$$

En substituant l'expression de μ

$$m\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\boldsymbol{F}. \tag{59.2}$$

Formellement tout se passe comme si le Soleil restait immobile et la constante gravitationnelle augmentait de $1 + m/M$ fois. C'est pour cela que *les deux premières lois de Kepler restent valables pour le mouvement relatif*. Quant à la troisième loi de Kepler, elle doit être précisée. Pour ce faire, il suffit de remplacer dans la formule (55.5) la constante G par $G\left(1 + \frac{m}{M}\right)$:

$$\frac{a^3}{T^2(M+m)} = \frac{G}{4\pi^2}. \tag{59.3}$$

Cette expression montre que *le rapport* $\frac{a^3}{T^2(M+m)}$ *est une constante universelle qui ne dépend ni des masses des corps en interaction, ni de leur distance mutuelle.* Ce résultat montre que *la troisième loi de Kepler appliquée à un mouvement relatif n'est pas tout à fait exacte.* Le fait qu'elle soit vérifiée à un haut degré de précision pour les planètes du système solaire tient à ce que leurs masses sont très petites par rapport à celle du Soleil.

Notons encore la relation

$$\frac{a_{\text{rel}}}{a_{\text{abs}}} = 1 + \frac{m}{M}, \tag{59.4}$$

qui découle directement de la comparaison des formules (59.1) et (59.2).

2. Les formules (55.5) et (59.3) sont utilisées pour déterminer les masses des planètes ayant des satellites et celles des étoiles doubles. Si la masse du satellite est négligeable comparativement à celle de la planète, la troisième loi de Kepler (55.5) décrit correctement son mouvement. On détermine alors la valeur de la constante de Kepler $\mathcal{K}$ par mesure de l'orbite et du temps de révolution du satellite. La valeur de la constante gravitationnelle G étant connue la formule (55.5) permet de calculer la masse M de la planète en unités absolues. En Astronomie on préfère cependant prendre pour unité de masse la masse de la Terre. Dans ce cas il n'est pas nécessaire de connaître la valeur numérique de G, qui n'est pas très précise, pour calculer la masse d'une planète.

A titre d'exemple calculons le rapport de la masse M_S du Soleil à la masse m_T de la Terre. Posons que la masse de la Terre est négligeable devant celle du Soleil. Nous négligerons de même la masse de la Lune par rapport à celle de la Terre. Pour l'orbite de la Terre $a_T = 1{,}496 \cdot 10^8$ km, $T_T = 365{,}26$ jours et pour l'orbite de la Lune $a_L = 3{,}844 \cdot 10^5$ km, $T_L = 27{,}32$ jours. En appliquant la formule (55.5) on trouve

$$\frac{M_S}{m_T} = \left(\frac{a_T}{a_L}\right)^3 \left(\frac{T_L}{T_T}\right)^2 = 3{,}298 \cdot 10^5.$$

Selon la formule (59.3) on trouve ainsi la valeur du rapport $\frac{M_S + m_T}{m_T + m_L}$. Cette méthode donne le rapport des masses des corps centraux autour

desquels gravitent des satellites dont les masses sont petites devant les masses des corps centraux. Cette condition est parfaitement réalisée dans le cas des satellites artificiels. On peut, par exemple, calculer le rapport des masses de la Lune et de la Terre ayant mesuré les paramètres des orbites des satellites artificiels de la Terre et de la Lune.

PROBLÈMES

1. Calculer la distance R entre les constituants d'une étoile double sachant que leur masse totale $M_1 + M_2$ est double de celle du Soleil (M_0) et que la période de leurs révolutions sur orbites circulaires centrées au centre de masse est $T = 2T_0$, T_0 étant la durée de l'année terrestre. La distance de la Terre au Soleil est $R_0 = 1{,}5 \cdot 10^8$ km.

Réponse. $R = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{M_1 + M_2}{M_0}} = 2R_0 = 3 \cdot 10^8$ km.

2. La distance minimale entre les constituants d'une étoile double tournant l'un autour de l'autre est égale à r_1. Dans cette position leur vitesse relative est v_1. La somme de leurs masses est M. Calculer la distance r_2 entre les étoiles et leur vitesse relative v_2 lorsque leur distance mutuelle est maximale. Pour quelle valeur minimale de leur vitesse relative v_1 les étoiles peuvent-elles se séparer?

Réponse. $r_2 = \left(\frac{2GM}{2GM - r_1 v_1^2} - 1\right) r_1$; $v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$.

L'étoile double se décompose pour $v_1 \geqslant \sqrt{\frac{2GM}{r_1}}$.

§ 60. Applications de la loi de la gravitation universelle à la pesanteur terrestre

D'après Newton le poids du corps sur la Terre est une manifestation de la force gravitationnelle s'exerçant entre le corps considéré et la Terre *). Pour mettre à l'épreuve cette assertion, Newton compara l'accélération de la chute libre d'un corps à proximité de la surface terrestre à l'accélération de la Lune sur l'orbite qu'elle décrit autour de la Terre.

Supposons qu'à l'intérieur du globe terrestre la répartition de la substance soit à symétrie sphérique, autrement dit que sa densité ne dépend que de la distance au centre de la Terre. Nous avons montré au § 55 que dans ce cas la Terre crée dans l'espace libre le même champ de gravitation que celui produit par un point matériel de même masse placé au centre de la Terre. Si l'hypothèse de Newton est juste, l'accélération g_{abs} de la force de pesanteur à une distance r du centre de la Terre sera donnée par la formule

$$g_{abs} = G\frac{M}{r^2}, \tag{60.1}$$

*) La force de pesanteur dont il s'agit n'est en toute rigueur égale à la force d'attraction gravitationnelle que si la pesée s'effectue sur une balance en repos ou n'ayant pas d'accélération par rapport au référentiel d'inertie (cf. § 66).

où M est la masse de la Terre. La même formule devra donner l'accélération a_L de la Lune sur son orbite :

$$a_L = G \frac{M}{R^2}, \tag{60.2}$$

R étant le rayon de l'orbite de la Lune. Ainsi

$$g_{abs} = a_L \left(\frac{R}{r}\right)^2. \tag{60.3}$$

Si a_L est connu, cette formule permet de calculer la valeur de l'accélération g_{abs} de la chute libre à la surface terrestre. C'est ce que fit Newton.

On peut calculer l'accélération a_L de la Lune connaissant R et la période de révolution T de la Lune sur son orbite (par rapport aux étoiles). On a respectivement $R = 3{,}844 \cdot 10^5$ km, $T = 27{,}32$ jours. D'où

$$a_L = \frac{4\pi^2}{T^2} R = 0{,}2723 \text{ cm/s}^2. \tag{60.4}$$

Le rayon moyen r du globe terrestre, calculé à partir de la condition que la quantité $\frac{4\pi}{3} r^3$ soit égale au volume de la Terre, est $r = 6371$ km. En portant cette valeur dans (60.3) on trouve $g_{abs} = 991{,}4$ cm/s². Cette valeur est proche des valeurs expérimentales: $g_{abs} = 983{,}2$ cm/s² au pôle, et $g_{abs} = 981{,}4$ cm/s² à l'équateur. Les valeurs théorique et expérimentale étant peu différentes, l'hypothèse de Newton se trouve confirmée. La différence subsistant entre ces valeurs résulte surtout de ce qu'on n'a pas tenu compte du mouvement de la Terre. La formule (60.4) donne l'accélération de la Lune par rapport à la Terre $(a_L)_{rel}$, tandis que dans la formule (60.3) doit figurer l'accélération de la Lune par rapport à un référentiel d'inertie $(a_L)_{abs}$. Ces deux accélérations sont reliées selon (59.4) par la relation

$$(a_L)_{rel} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)(a_L)_{abs},$$

m étant la masse de la Lune. Il s'ensuit que la valeur g_{abs} calculée ci-dessus doit être diminuée de $\left(1 + \frac{m}{M}\right)$ fois. Le rapport de la masse de la Lune à la masse de la Terre est $\frac{m}{M} = 1/81$. En apportant cette correction on trouve $g_{abs} = 979{,}3$ cm/s², valeur plus proche des données expérimentales. La légère divergence qui subsiste peut être attribuée à ce que la Terre n'est pas parfaitement sphérique.

On notera que la formule (60.1) permet de calculer la masse de la Terre connaissant la valeur de la constante gravitationnelle G.

PROBLÈMES

1. Montrer que si on se trouve à une altitude faible par rapport au rayon terrestre R, la variation de l'accélération de la pesanteur avec l'altitude est donnée par la formule approchée

$$g \approx g_0 \left(1-2\frac{h}{R}\right) \approx g_0 (1-0{,}00314h),$$

g_0 étant la valeur de g au niveau du sol. L'altitude h est donnée en kilomètres.

2. Pour calculer la densité moyenne de la Terre δ, Airy (1801-1892) a suggéré et réalisé l'expérience suivante. On mesure les accélérations de la pesanteur g_0 au niveau du sol et g au fond d'un puits de mine à une profondeur h. On admet que dans une couche superficielle d'épaisseur h la densité de la Terre est homogène et égale à $\delta_0 = 2{,}5$ g/cm³. (Cette hypothèse correspond mal à la réalité.) Expérimentalement on a trouvé $g - g_0 = 0{,}000052\ g_0$, $R/h = 16\,000$ (R est le rayon de la Terre). Partant de ces données calculer la densité moyenne de la Terre. (Remarquer qu'à proximité de la surface terrestre g augmente avec la profondeur ! Expliquer cet accroissement de g.)

Réponse. $\delta \approx \dfrac{3\delta_0}{2 - \dfrac{g-g_0}{g_0}\dfrac{R}{h}} \approx 6{,}5$ g/cm³.

3. Supposons qu'on ait creusé un canal le long de l'axe de la Terre, d'un pôle à l'autre. Quel sera le mouvement d'un point matériel abandonné à lui-même à l'entrée du canal (sans vitesse initiale) ? La densité ρ de la Terre est supposée homogène.

Réponse. Le point matériel exécutera des oscillations harmoniques de fréquence circulaire $\omega^2 = \frac{4\pi}{3}\rho G = \frac{g}{R}$, où R est le rayon de la Terre, g l'accélération de la pesanteur à la surface du sol. La période de ces oscillations $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84$ mn. On notera que *la période des oscillations ne dépend que de la densité de la sphère sans dépendre de ses dimensions.*

4. Calculer la vitesse initiale v_∞ des météorites sachant que la valeur maximale du paramètre de choc assurant leur chute sur la Terre est égale à l ($l > R$, R étant le rayon de la Terre). Calculer une valeur numérique pour $l = 2R$. (Voir remarque au problème du § 58.)

Réponse. $v_\infty = R\sqrt{\dfrac{2gR}{l^2 - R^2}}$. Pour $l = 2R$ $v_\infty = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \approx$ $\approx 6{,}5$ km/s.

5. Calculer la masse de la Terre à l'aide des paramètres de l'orbite du satellite soviétique « Cosmos-380 ». La période de révolution (par rapport aux étoiles) est $T = 102{,}2$ mn, la distance à la Terre est de 210 km au périgée et de 1548 km à l'apogée. Assimiler la Terre à une sphère de rayon égal à 6371 km.

Réponse. $M = \dfrac{4\pi^2}{G}\dfrac{a^3}{T^2} \approx 6 \cdot 10^{27}$ g, a étant le rayon de l'orbite circulaire du satellite.

§ 61. Vitesses cosmiques

1. La théorie des mouvements finis et infinis des planètes, que nous avons exposée au § 57, est pleinement applicable au mouvement des satellites artificiels de la Terre et des vaisseaux cosmiques (dont les moteurs de propulsion sont arrêtés). Nous négligerons la

résistance de l'air en supposant que le mouvement s'effectue dans une atmosphère très raréfiée. Nous négligerons aussi dans l'étude du mouvement à proximité de la Terre les forces d'attraction gravitationnelle exercées par le Soleil, la Lune et les planètes. Désignons par M la masse de la Terre et par m la masse du satellite artificiel.

Dans le champ de la gravitation terrestre l'énergie totale du satellite ou du vaisseau cosmique est égale à

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r},$$

ce qui en vertu de (60.1) s'écrit

$$E = \frac{mv^2}{2} - mrg_{\text{abs}}. \tag{61.1}$$

(Dans ce qui suit on supprimera l'indice abs et on écrira g sans indice.) Si l'énergie E est négative, le mouvement sera fini et l'engin décrira une trajectoire elliptique. Pour un mouvement circulaire

$$v_{\text{c}} = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{gr}. \tag{61.2}$$

Si r désigne le rayon du globe terrestre, la valeur de la vitesse donnée par cette formule porte le nom de *première vitesse cosmique*. Elle est d'environ 8 km/s.

La valeur minimale de E à partir de laquelle le mouvement devient infini est égale à zéro. Dans ce cas le mouvement est parabolique de vitesse

$$v_{\text{p}} = \sqrt{2gr} = v_{\text{c}}\sqrt{2} \approx 11{,}2 \text{ km/s}, \tag{61.3}$$

qui porte le nom de *vitesse parabolique* ou celui de *seconde vitesse cosmique*. C'est la vitesse minimale que doit posséder un corps pour qu'il ne revienne jamais sur Terre (à condition que ce corps ne soit pas soumis aux forces gravitationnelles émanant des autres corps célestes).

Si, enfin, l'énergie totale E est positive, i.e. la vitesse initiale du corps est supérieure à la seconde vitesse cosmique, son mouvement sera hyperbolique.

2. Des calculs analogues peuvent être faits pour l'étude des mouvements dans le champ gravitationnel du Soleil. La distance moyenne de la Terre au Soleil est de 150 millions de kilomètres environ. A cette distance la vitesse de la Terre sur orbite circulaire est de 29,8 km/s environ. Pour qu'un corps lancé à cette distance du Soleil puisse quitter à jamais le système solaire, il doit posséder par rapport au Soleil une vitesse supérieure à $29{,}8\sqrt{2} \approx 42{,}1$ km/s. Se trouvant sur Terre, le corps se déplace avec elle autour du Soleil à une vitesse de 29,8 km/s. Si le corps n'était pas soumis à la gravitation terrestre, il aurait suffi de lui communiquer par rapport

à la Terre une vitesse supplémentaire égale à 42,1 — 29,8 = = 12,3 km/s dans le sens du mouvement de la Terre pour qu'il se mette en mouvement par rapport au Soleil à la vitesse parabolique et s'échappe à jamais du système solaire. En fait il faut communiquer au corps une vitesse plus grande pour que le corps surmonte l'attraction terrestre. La vitesse que doit posséder un corps par rapport à la Terre pour qu'il puisse s'échapper du système solaire porte le nom de *troisième vitesse cosmique.* La valeur de cette vitesse dépend de la direction le long de laquelle le corps sort de la zone d'action de l'attraction terrestre. Cette valeur est minimale si cette direction coïncide avec la direction du mouvement orbital de la Terre autour du Soleil et elle est maximale si ces directions sont opposées.

Un calcul exact de la troisième vitesse cosmique est assez laborieux, car il faut tenir compte des interactions gravitationnelles de trois corps: le Soleil, la Terre et le vaisseau cosmique. Le calcul se simplifie notablement si on néglige l'influence qu'exerce le champ de gravitation du Soleil sur le mouvement du vaisseau cosmique pendant tout le temps qu'il met pour s'échapper de la zone d'action de l'attraction terrestre *). Désignons par des lettres minuscules (v, v_c, v_p) les différentes vitesses du vaisseau cosmique par rapport à la Terre, et par des lettres majuscules (V, V_c, V_p) ces mêmes vitesses rapportées au Soleil. Tant que le vaisseau se meut dans le champ terrestre, il est commode de rapporter son mouvement à un référentiel par rapport auquel la Terre est immobile. Estimant que la masse M de la Terre est infiniment grande par rapport à la masse m du vaisseau, on peut écrire l'équation de l'énergie sous la forme suivante:

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

où v_∞ représente la vitesse du vaisseau à l'instant où il est pratiquement sorti de la zone d'attraction de la Terre. En introduisant la vitesse circulaire $v_c^2 = GM/r$ nous obtenons $v_\infty^2 = v^2 - 2v_c^2$. Une fois le vaisseau sorti de la zone d'attraction terrestre, nous rapporterons son mouvement à un référentiel dans lequel le Soleil est fixe. Dans ce référentiel, la vitesse V que possède le vaisseau à l'instant où il s'échappe de la zone d'attraction terrestre est égale à la somme vectorielle de la vitesse v_∞ et de la vitesse V_c du mouvement circulaire de la Terre. Si le vaisseau quitte la zone d'attraction terrestre sous un angle ϑ, les vitesses v_∞ et V forment entre elles le même angle. Donc

$$V^2 = V_c^2 + v_\infty^2 + 2V_c v_\infty \cos\vartheta.$$

On déduit la troisième vitesse cosmique v_3 de la condition $V = V_p = \sqrt{2}\,V_c$. En portant cette expression de V dans la relation précédente, nous obtenons une équation du second degré en v_∞, d'où

$$v_\infty = (\sqrt{1+\cos^2\vartheta} - \cos\vartheta)\, V_c.$$

*) Une analyse plus poussée de cette question (cf. § 65) montre qu'en réalité on néglige non pas le champ gravitationnel du Soleil, mais son *inhomogénéité* dans la région de l'espace où prédomine le champ de gravitation de la Terre. La composante homogène du champ de gravitation du Soleil est compensée par les forces d'inertie qui apparaissent du fait de la chute libre de la Terre sur le Soleil. C'est pour cela que l'erreur commise dans ce calcul de la troisième vitesse cosmique est négligeable.

(Le signe positif devant le radical résulte de ce que la vitesse v_∞ est essentiellement positive.) Il vient

$$v_3^2 = (\sqrt{1+\cos^2\vartheta} - \cos\vartheta)^2 V_C^2 + 2v_C^2. \qquad (61.4)$$

La troisième vitesse cosmique sera minimale pour $\vartheta = 0$ (vaisseau lancé dans la direction du mouvement orbital de la Terre) et maximale pour $\vartheta = \pi$ (lancement dans la direction opposée à celle du mouvement orbital de la Terre). Pour ces valeurs la formule (61.4) donne

$$\begin{aligned} v_3^{\min} &\approx \sqrt{0{,}171 V_C^2 + 2v_C^2} \approx 16{,}7 \text{ km/s}, \\ v_3^{\max} &\approx \sqrt{5{,}828 V_C^2 + 2v_C^2} \approx 72{,}7 \text{ km/s}. \end{aligned} \qquad (61.5)$$

Calculons maintenant approximativement la *quatrième vitesse cosmique* v_4. C'est la vitesse minimale que doit posséder une fusée pour tomber sur le Soleil en un point donné. La valeur de cette vitesse dépend de la position du point d'impact. Au départ la fusée tourne avec la Terre autour du Soleil à une vitesse

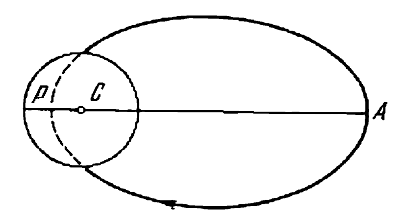


Fig. 181a

V_C. Pour qu'elle puisse tomber sur le Soleil il faut freiner son mouvement. Comme ci-dessus, à l'instant où la fusée quitte la zone d'attraction terrestre, sa vitesse est $V = V_C + v_\infty$ (par rapport au Soleil). L'énergie minimale qu'il faudra dépenser pour le freinage correspond au cas où les vitesses V_C et v_∞ sont opposées. On a alors $V = V_C - v_\infty$ (toutes les vitesses sont positives) et l'énergie consommée par unité de masse de la fusée est

$$\varepsilon = {}^1/_2 (V_C - v_\infty)^2 - GM/R = {}^1/_2 (V_C^2 + 2V_C v_\infty - v_\infty^2),$$

où $R = CA$ est la distance de la fusée au centre du Soleil lorsqu'elle est éloignée au maximum (fig. 181a). Si $\varepsilon < 0$ la fusée aura pour trajectoire une ellipse de grand axe

$$2a = -\frac{GM}{\varepsilon} = \frac{2RV_C^2}{V_C^2 + 2V_C v_\infty - v_\infty^2}.$$

L'un des foyers de cette ellipse se trouve au centre du Soleil. Désignons par $x = CP$ la distance du centre du Soleil au plus proche sommet de l'ellipse. Cette distance x définit univoquement la forme de l'ellipse et la ligne tracée sur la surface du Soleil passant par le point d'impact de la fusée. Le grand axe de l'ellipse $2a = R + x$. En portant cette valeur dans l'équation ci-dessus nous obtenons une équation du second degré en v_∞. La plus petite racine de cette équation vaut

$$v_\infty = V_C \left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}}\right).$$

La quatrième vitesse cosmique v_4 s'obtient de la relation $v_4^2 = v_\infty^2 + 2v_c^2$, soit

$$v_4^2 = V_c^2\left(1-\sqrt{\frac{2x}{R+x}}\right)^2 + 2v_c^2.$$

Sa valeur dépend du paramètre x définissant le point d'impact. Pour $x = 0$ (mouvement rectiligne vers le centre du Soleil) la valeur de v_4 est maximale:

$$v_4^{max} = (V_c^2 + 2v_c^2)^{1/2} \approx 31{,}8 \text{ km/s}.$$

La fusée tombe sur la face avant du Soleil. Pour $x = r$ (r est le rayon du Soleil) la fusée tombe sur la face arrière du Soleil en suivant la tangente à sa surface. La vitesse v_4 est alors minimale:

$$v_4^{min} \approx \left[V_c^2\left(1-\sqrt{\frac{2r}{R+r}}\right)^2 + 2v_c^2\right]^{1/2} \approx$$
$$\approx [V_c^2(1-\sqrt{2\alpha})^2 + 2v_c^2]^{1/2} \approx 29{,}2 \text{ km/s},$$

où $\alpha = 4{,}65 \cdot 10^{-3}$ rad est le rayon angulaire moyen du Soleil.

PROBLÈMES

1. Un satellite artificiel de la Terre parcourt une orbite circulaire de rayon R avec une période T_1. A un certain instant et pendant un temps très court, on a mis en marche le moteur à réaction, ce qui a accru la vitesse du satellite de α fois; l'orbite du satellite est devenue alors elliptique. Sachant que le moteur accélérait le satellite dans le sens de son mouvement, calculer la distance maximale du satellite au centre de la Terre à l'instant où le moteur aura été arrêté. Calculer la période de révolution T_2 du satellite sur sa nouvelle orbite (elliptique).

S o l u t i o n. Désignons par E_c l'énergie totale du satellite sur son orbite circulaire. D'après (58.3) $E_c = -K$, $U = -2K$. Une fois le moteur arrêté, la vitesse du satellite aura augmenté de α fois et l'énergie cinétique K de α^2 fois. L'énergie potentielle est restée invariable puisque pendant la durée du fonctionnement du moteur le satellite se sera déplacé fort peu. L'énergie totale du satellite sur son orbite elliptique est alors égale à

$$E_{ell} = \alpha^2 K + U = (\alpha^2 - 2)\, K = (2 - \alpha^2)\, E_c.$$

Comme les grands axes des orbites elliptiques sont inversement proportionnels aux énergies totales (cf. formule 58.2)) on aura

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{2-\alpha^2}, \quad a = \frac{R}{2-\alpha^2}.$$

L'orbite sera elliptique si $\alpha^2 \leqslant 2$. La distance maximale du satellite au centre de la Terre (apogée) est

$$R_{max} = 2a - R = \frac{\alpha^2 R}{2-\alpha^2}.$$

Par application de la troisième loi de Kepler, on trouve la période de révolution T_2:

$$T_2 = \frac{T_1}{(2-\alpha^2)^{3/2}}.$$

2. Trouver la valeur du rayon R de l'orbite circulaire d'un satellite se déplaçant dans le sens de rotation de la Terre dans son plan équatorial, valeur

pour laquelle le satellite reste toujours immobile par rapport à la Terre (satellite dit *stationnaire*).

Réponse. $R = \left(\frac{g}{\omega^2 R_0}\right)^{1/3} R_0 \approx 6,60\, R_0$, où R_0 est le rayon équatorial de la Terre, $\omega^2 R_0$ l'accélération centripète à l'équateur due à la rotation axiale de la Terre, g l'accélération en chute libre. A l'équateur $\omega^2 R_0/g = 1/288$.

3. Les forces de frottement des marées déterminées par l'action de la Lune ralentissent la rotation axiale de la Terre. Ce ralentissement dure jusqu'à l'égalisation des vitesses angulaires de la rotation axiale de la Terre et du mouvement orbital de la Lune autour de la Terre. Calculer la vitesse angulaire totale ω de ces deux rotations, la durée T du jour terrestre et le rayon a de l'orbite de la Lune dès que les vitesses angulaires seront devenues égales. Actuellement la vitesse angulaire de la rotation axiale de la Terre est $\omega_T = 7,29 \cdot 10^{-5}$ rad/s, le moment cinétique de la Terre par rapport à son axe de rotation est $L_T = 5,91 \cdot 10^{40}$ g $\cdot$ cm²/s, le moment d'inertie de la Terre par rapport au même axe est $I_T = 8,11 \cdot 10^{44}$ g $\cdot$ cm², le rayon de l'orbite lunaire est $a_0 = 3,84 \cdot 10^{10}$ cm, la période de révolution de la Lune autour de la Terre (par rapport aux étoiles) est $T_L = 27,3$ jours, la masse de la Lune est $m = 7,35 \cdot 10^{25}$ g. Pour simplifier les calculs on supposera que l'axe terrestre est perpendiculaire au plan de l'orbite de la Lune.

Solution. Avec ces données nous calculons successivement: le moment d'inertie de la Lune par rapport à l'axe de rotation de la Terre $I_L = ma_0^2 = 1,08 \cdot 10^{47}$ g $\cdot$ cm² (nous négligeons le moment d'inertie de la Lune par rapport à son propre axe); la vitesse angulaire du mouvement orbital de la Lune autour de la Terre $\omega_L = 2,67 \cdot 10^{-6}$ rad/s; le moment cinétique de la Lune par rapport à la Terre $L_L = I_L\omega_L = 28,9 \cdot 10^{40}$ g $\cdot$ cm²/s; le moment cinétique total du système Terre — Lune $L = L_T + L_L = 34,8 \cdot 10^{40}$ g $\cdot$ cm²/s. Selon la loi de conservation du moment cinétique $(I_T + ma^2)\,\omega = L$, ou en négligeant I_T, $ma^2\omega = L$. D'après la troisième loi de Kepler $a^3\omega^2 = a_0^3\omega_L^2$. A partir de ces deux équations on calcule les inconnues a et ω. Dans l'approximation adoptée:

$$a = \frac{L^2}{m^2 a_0^4 \omega_L^2}\, a_0 = \left(\frac{L}{L_L}\right)^2 a_0 = 1,45 a_0 = 5,58 \cdot 10^{10} \text{ cm},$$

$$\omega/\omega_L = (a_0/a)^{3/2} = 0,573, \quad T = 27,3/0,573 = 47,7 \text{ jours}.$$

4. Un vaisseau cosmique s'approche de la Lune suivant une trajectoire parabolique frôlant la Lune. Pour passer sur une orbite circumlunaire, on met en marche le moteur de freinage à l'instant où le vaisseau se trouve à la plus petite distance de la Lune; le moteur éjecte les gaz avec une vitesse $v = 4$ km/s par rapport au vaisseau et dans le sens de son mouvement. Quelle partie de la masse totale du vaisseau représente le carburant consommé pour son freinage? Rayon moyen de la Lune $R = 1738$ km, accélération de la chute libre sur la surface de la Lune $g = 162$ cm/s².

Réponse. $\frac{m_0 - m}{m_0} = (\sqrt{2} - 1)\, \frac{\sqrt{gR}}{v} \approx 0,17$.

5. Un satellite artificiel tourne autour de la Terre dans une atmosphère raréfiée sur une orbite circulaire (ou quasi circulaire). Quelle influence exerce la résistance du milieu sur sa vitesse et sur son moment cinétique par rapport au centre de la Terre?

Solution. Selon (58.3) pour un mouvement circulaire $E = -K$. Comme le frottement diminue l'énergie totale E, l'énergie cinétique K doit augmenter (le satellite se rapproche de la Terre).

6. Un vaisseau cosmique se trouvant loin de la Terre tombe en chute libre sans vitesse initiale. En quel point doit-on faire tourner de 90° la direction de sa vitesse (sans modifier sa grandeur) pour qu'il vienne se placer sur une orbite circumterrestre ?

R é p o n s e. Au milieu de la distance séparant le centre de la Terre de la position initiale du vaisseau.

7. Un vaisseau cosmique tourne autour de la Terre sur une orbite elliptique. En quel point de l'orbite doit-on faire tourner la direction de sa vitesse (sans modifier sa grandeur) pour que son orbite devienne circulaire?

S o l u t i o n. Comme l'énergie du vaisseau ne dépend que de la longueur $2a$ du grand axe de son orbite, le passage sur une orbite circulaire doit s'effectuer à la distance a, c'est-à-dire au point d'intersection de l'ellipse par son petit axe. On doit faire tourner la direction de la vitesse d'un angle tel qu'elle devienne orthogonale à la droite reliant le vaisseau au centre de la Terre.

8. Un vaisseau cosmique tourne autour de la Terre sur une orbite elliptique. Au point d'intersection de l'ellipse avec son petit axe, on met en marche le moteur de propulsion. Quelle variation de vitesse faut-il réaliser pour que l'orbite du vaisseau devienne parabolique?

R é p o n s e. Il faut augmenter la vitesse de $\sqrt{2}$ fois.

9. Quelle est la surcharge à laquelle se trouve soumis le cosmonaute dans un vaisseau cosmique sur la première étape du parcours après le lancement, lorsque le vaisseau monte verticalement avec une accélération constante telle qu'au bout d'un temps $\tau = 4$ s sa vitesse devient égale à $v = \alpha v_c$, v_c étant la première vitesse cosmique et $\alpha = 0{,}03$? (On désigne par surcharge le rapport $n = \frac{P - P_0}{P_0}$, où P_0 est le poids du cosmonaute sur Terre et P le « poids » du cosmonaute qu'aurait indiqué une balance à ressort à bord du vaisseau en marche.)

S o l u t i o n. Prenons pour sens positif celui de la verticale ascendante. Le « poids » du cosmonaute à bord du vaisseau est

$$P = P_0 + m\,\frac{dv}{dt}.$$

En posant que sur le parcours initial P est une quantité constante, on en déduit la vitesse du vaisseau au bout d'un temps τ:

$$v \equiv \alpha v_c = \frac{P - P_0}{m}\,\tau,$$

d'où

$$\frac{P - P_0}{P_0} = \frac{\alpha v_c}{g\tau} = \frac{\alpha}{\tau}\sqrt{\frac{R}{g}} = 6.$$

§ 62. Etablissement des lois régissant le mouvement des planètes à partir de la loi de la gravitation universelle de Newton

Dans les paragraphes précédents nous avons adopté les trois lois de Kepler comme base de nos raisonnements et nous sommes parvenus à la loi de la gravitation universelle de Newton. Maintenant nous allons faire l'inverse. Posons que le Soleil exerce sur la planète une force de gravitation conforme à la loi de Newton et déterminons le mouvement correspondant de la planète. Nous admettrons que la masse du Soleil est infiniment grande par rapport à celle de la planète. Nous avons montré au § 59 que nous retombons sur ce cas même lorsque cette condition n'est pas remplie. Adoptons un système de coordonnées

polaires (r, φ) dont le pôle se trouve au centre du Soleil. Décomposons la vitesse v de la planète en une vitesse radiale $v_r = \dot{r}$ et une vitesse azimutale $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ qui lui est perpendiculaire. On a évidemment $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Les lois de conservation de l'énergie et le moment cinétique de la planète peuvent s'écrire:

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-G\frac{M}{r}=\varepsilon, \tag{62.1}$$

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}=\sigma, \tag{62.2}$$

où M est la masse du Soleil, ε l'énergie totale par unité de masse de la planète, σ la vitesse aréolaire qui reste constante pendant le mouvement. Pour trouver l'équation de la trajectoire de la planète nous devons éliminer le temps entre ces équations. En considérant r comme une fonction de φ nous avons $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$.

En portant cette valeur dans (62.1) et en éliminant $\dot{\varphi}$ à l'aide de (62.2) nous obtenons

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}=\frac{1}{2\sigma^2}\left(\varepsilon+\frac{GM}{r}\right). \tag{62.3}$$

Introduisons une nouvelle variable $\rho = -\frac{1}{r}+\frac{1}{p}$, où p est une constante que nous définirons plus loin. L'équation (62.3) s'écrit maintenant

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\left(\rho-\frac{1}{p}\right)^2=\frac{\varepsilon}{2\sigma^2}+\frac{GM}{2\sigma^2}\left(-\rho+\frac{1}{p}\right).$$

Choisissons une constante p telle que dans cette équation disparaissent les termes de premier degré en ρ. Pour ce faire nous poserons

$$p=\frac{4\sigma^2}{GM}. \tag{62.4}$$

Nous obtenons alors

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=\frac{\varepsilon}{2\sigma^2}+\frac{1}{p^2}-\rho^2.$$

Comme la quantité figurant dans le premier membre est non négative la constante $\frac{1}{p^2}+\frac{\varepsilon}{2\sigma^2}$ est également non négative; dénotons-la par A^2:

$$A^2=\frac{1}{p^2}+\frac{\varepsilon}{2\sigma^2}. \tag{62.5}$$

Nous obtenons

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=A^2-\rho^2. \tag{62.6}$$

Il est évident que $A^2 \geqslant \rho^2$ et on peut donc poser $\rho/A = \cos\Theta$, Θ étant une nouvelle inconnue. Nous avons donc

$$A^2-\rho^2=A^2\sin^2\Theta, \qquad \frac{d\rho}{d\varphi}=-A\sin\Theta\frac{d\Theta}{d\varphi}.$$

En substituant cette expression dans (62.6) et en divisant par $A\sin\Theta$ nous obtenons $\frac{d\Theta}{d\varphi}=\pm 1$, d'où $\Theta = \pm\varphi + \varphi_0$. Il en résulte que $\rho = A\cos(\pm\varphi +$

$\pm \varphi_0) = A\cos(\varphi \pm \varphi_0)$. Dans la dernière expression le double signe $\pm$ figurant devant φ_0 est inutile puisque φ_0 est une constante d'intégration. Reprenant les anciennes notations nous obtenons

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}\left[1-e\cos(\varphi+\varphi_0)\right], \tag{62.7}$$

où

$$e=pA=\sqrt{1+\frac{\varepsilon p^2}{2\sigma^2}}=\sqrt{1+\frac{8\varepsilon\sigma^2}{G^2M^2}}. \tag{62.8}$$

Sans restreindre la généralité nous poserons $\varphi_0 = 0$. Cela signifie tout simplement que les angles φ sont comptés à partir d'une position du rayon vecteur de la planète qui est telle que sa longueur est égale à $p/(1-e)$. L'équation (62.7) devient alors

$$r=\frac{p}{1-e\cos\varphi}. \tag{62.9}$$

C'est l'équation d'une section conique d'excentricité e et de paramètre p. Pour $\varepsilon < 0$, $e < 1$ (ellipse); pour $\varepsilon = 0$, $e = 1$ (parabole); pour $\varepsilon > 0$, $e > 1$ (hyperbole). Nous avons retrouvé ainsi les résultats du § 57. Il est facile de calculer maintenant les autres paramètres de l'orbite et dans le cas d'un mouvement elliptique d'en déduire la troisième loi de Kepler. Comme nous avons déjà présenté tous ces calculs, il n'est pas nécessaire de les recommencer.

CHAPITRE IX

ÉTUDE DES MOUVEMENTS PAR RAPPORT À DES SYSTÈMES NON INERTIELS

§ 63. Forces d'inertie apparaissant dans les référentiels en mouvement de translation accéléré

1. Jusqu'à présent nous avons rapporté les mouvements à l'un des innombrables *référentiels d'inertie.* Dans ces référentiels d'inertie l'équation fondamentale décrivant le mouvement d'un point matériel exprime la *deuxième loi de Newton.* Ecrivons cette équation comme suit

$$m\boldsymbol{a}_{\text{abs}} = \boldsymbol{F}. \tag{63.1}$$

Nous avons affecté le symbole $\boldsymbol{a}$ de l'accélération de l'indice « abs » dont la signification apparaîtra plus loin. Fixons-nous pour tâche d'établir les équations de mouvement dans les *systèmes non inertiels,* c'est-à-dire les systèmes qui sont animés d'un mouvement accéléré par rapport aux référentiels d'inertie. Le problème posé revient à établir les *lois de transformation des forces et des accélérations* qu'il faut appliquer pour passer d'un référentiel inertiel à un référentiel non inertiel. La physique prérelativiste considérait que c'était un problème de cinématique pure et le résolvait en s'appuyant sur deux hypothèses: 1) le temps est absolu, en ce sens que les intervalles de temps entre deux événements quelconques sont les mêmes quel que soit le référentiel utilisé; 2) l'espace est absolu, en ce sens que la distance entre deux points (deux corps matériels) quelconques est la même quel que soit le référentiel envisagé. La physique prérelativiste admettait donc que *la distance et les intervalles de temps étaient invariants dans le passage d'un référentiel à tout autre animé d'un mouvement arbitraire.* Ces deux hypothèses paraissaient à tel point évidentes qu'on ne les explicitait même pas. Ce n'est qu'à la suite d'une profonde analyse réalisée dans le cadre de la théorie de la relativité que l'on s'aperçut que ces hypothèses étaient en fait des *postulats.* Il s'avéra que *ces deux hypothèses n'étaient approximativement correctes que dans le cas de mouvements lents* et devenaient fausses si le mouvement était rapide. Nous nous placerons ici dans le cas non relativiste, ce qui revient à supposer que *toutes les vitesses, y compris les vitesses relatives des référentiels eux-mêmes, sont petites par rapport à la vitesse de la lumière dans le vide.*

2. Convenons d'appeler *fixe* un référentiel d'inertie quelconque et d'appeler mouvement *absolu* le mouvement par rapport à ce référentiel fixe. Dans la formule (63.1) il s'agit donc de l'accélération d'un tel mouvement absolu. Il n'y a pas lieu d'attribuer aux concepts « référentiel fixe » et « mouvement absolu » d'autre signification que celle contenue dans les définitions ci-dessus. Ces concepts sont de pures conventions et ne contredisent nullement l'assertion que tout mouvement est *relatif*. Un corps au repos dans un référentiel mobile est entraîné par ce référentiel dans son mouvement par rapport à un référentiel fixe. Un tel mouvement est dit *d'entraînement*. Le mouvement absolu d'un corps se compose de ses mouvements relatif et d'entraînement.

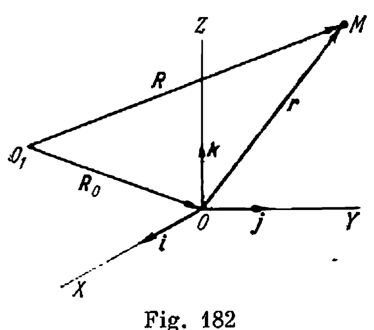


Fig. 182

L'objet de ce chapitre est l'étude du *mouvement relatif*. Le premier pas à faire est d'établir les équations du mouvement relatif. *Nous entendons par équation de mouvement les relations permettant de définir les accélérations de tous les points matériels d'un système mécanique dans le référentiel auquel est rapporté le mouvement considéré.* Si le référentiel utilisé est en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au référentiel fixe, il est inertiel. Dans ce cas les équations du mouvement relatif coïncident avec celles du mouvement absolu et vérifient les lois de Newton. Il suffit donc de considérer seulement les cas où le référentiel utilisé est en mouvement accéléré par rapport au référentiel fixe.

3. Prenons deux référentiels: un référentiel fixe S_1 dont l'origine des coordonnées se trouve en O_1, et un référentiel mobile S dont l'origine des coordonnées est en O (fig. 182). Désignons par $\boldsymbol{R}_0$ le rayon vecteur $\overrightarrow{O_1O}$ reliant l'origine fixe O_1 à l'origine mobile O. Soit M un point matériel. Sa position dans le référentiel fixe est définie par le rayon vecteur $\boldsymbol{R}$ et dans le référentiel mobile par le rayon vecteur $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$. A tout instant les vecteurs $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}_0$ et $\boldsymbol{r}$ sont liés entre eux par la relation

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}. \tag{63.2}$$

En dérivant deux fois de suite cette relation par rapport au temps on obtient

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \dot{\boldsymbol{R}}_0 + \dot{\boldsymbol{r}}, \tag{63.3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{\boldsymbol{R}}_0 + \ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{63.4}$$

Pour mieux dégager le fond de la question, nous allons considérer d'abord le cas particulier où le référentiel S est en mouvement de *translation* par rapport au référentiel fixe S_1. Il est clair que le vecteur $\dot{\boldsymbol{R}}$ représente toujours la vitesse absolue $\boldsymbol{v}_{abs}$ et le vecteur $\ddot{\boldsymbol{R}}$ l'accélération absolue $\boldsymbol{a}_{abs}$ du point mobile M. Le vecteur $\boldsymbol{v}_0 \equiv \dot{\boldsymbol{R}}_0$ est la vitesse absolue et $\boldsymbol{a}_0 \equiv \ddot{\boldsymbol{R}}_0$ l'accélération absolue de l'origine O du trièdre de référence S. Dans le cas d'un mouvement de translation ces quantités coïncident respectivement avec la vitesse et l'accélération de n'importe quel point du référentiel S. On doit donc interpréter $\boldsymbol{v}_0$ et $\boldsymbol{a}_0$ comme la *vitesse* et l'*accélération d'entraînement*. De même pour un mouvement de translation, les vecteurs $\dot{\boldsymbol{r}}$ et $\ddot{\boldsymbol{r}}$ représentent respectivement la *vitesse* et l'*accélération relatives*, c'est-à-dire les valeurs de ces grandeurs dans le référentiel mobile S. Nous écrirons ainsi pour un mouvement de translation

$$\boldsymbol{v}_{abs} = \boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{v}_{ent}, \tag{63.5}$$

$$\boldsymbol{a}_{abs} = \boldsymbol{a}_{rel} + \boldsymbol{a}_{ent}, \tag{63.6}$$

avec $\boldsymbol{a}_{ent} = \boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{v}_{ent} = \boldsymbol{v}_0$.

4. Portons maintenant (63.6) dans (63.1) et faisons passer le terme en $\boldsymbol{a}_{ent}$ dans le second membre:

$$m\boldsymbol{a}_{rel} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0. \tag{63.7}$$

C'est l'équation du mouvement relatif d'un point matériel. Le second membre de cette équation peut tout formellement être assimilé à une certaine « force » agissant sur le point matériel dans le référentiel mobile. Cela montre que dans tout référentiel la force est définie comme un vecteur égal au produit de la masse du point matériel par son accélération dans le référentiel considéré. Il n'est pas nécessaire que la « force » prise dans cette signification soit le résultat de l'interaction des corps, mais il est nécessaire de disposer d'un procédé indépendant permettant d'exprimer la « force » en fonction des coordonnées et des vitesses du point mobile. Ce n'est qu'à cette condition que nous serons en mesure d'écrire une équation de mouvement telle que (63.7) et c'est justement à cela que se ramène le contenu réel des lois de la mécanique.

La « force » $\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0$ comporte deux composantes essentiellement différentes. La première composante $\boldsymbol{F}$ est une « force réelle » en ce sens qu'elle résulte de l'interaction de corps. Elle ne dépend que des différences des coordonnées de position et des vitesses des points matériels en interaction. En cinématique non relativiste ces différences ne changent pas lorsqu'on passe d'un référentiel donné à un autre référentiel animé d'un mouvement arbitraire. La force $\boldsymbol{F}$ ne change donc pas elle non plus, ce qui signifie qu'elle est *invariante* par rapport à ce changement de référentiel.

La composante — ma_0 est de nature différente ; elle résulte non pas de l'interaction des corps, mais du *mouvement accéléré du référentiel*. On l'appelle *force d'inertie*, plus exactement *force d'inertie de translation*, puisque nous n'envisageons ici que le mouvement de translation du référentiel mobile. Si on passe à un autre référentiel en mouvement accéléré, les forces d'inertie changent. Elles sont *non invariantes* vis-à-vis d'un changement de référentiel et se distinguent donc des « forces réelles » résultant de l'interaction des corps. Une autre distinction consiste en ce que *les forces d'inertie ne vérifient pas le principe de l'action et de la réaction*. Lorsqu'un corps est soumis à une force d'inertie il n'existe pas de force de réaction appliquée à un autre corps. Ainsi le mouvement des corps soumis à l'action d'une force d'inertie est analogue au mouvement dans des champs de forces extérieures. *La force d'inertie est toujours une force extérieure par rapport à tout système mobile de corps matériels.*

5. Les forces d'inertie sont-elles réelles ou illusoires ? La réponse à cette question dépend du sens que l'on veut donner aux mots « réel » et « illusoire ». Si on se conforme à la mécanique newtonienne selon laquelle toutes les forces doivent résulter de l'interaction des corps, on est amené à considérer les forces d'inertie comme des forces illusoires disparaissant dans les référentiels d'inertie. Mais ce point de vue n'est nullement obligatoire puisque toutes les interactions s'effectuent par l'intermédiaire de champs de forces et sont transmises à des vitesses finies. On peut donc considérer les forces d'inertie comme des actions que subissent les corps de la part de champs de forces réels. Il est vrai que ces champs se transforment d'une manière déterminée lorsqu'on passe d'un référentiel donné à un autre en mouvement accéléré par rapport au précédent. Mais ce n'est pas une raison pour traiter ces forces d'illusoires. Les forces électriques et magnétiques se transforment elles aussi lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre (même si les deux systèmes sont inertiels); et néanmoins personne ne doute de l'existence réelle des champs électromagnétiques.

Quel que soit le point de vue adopté, il existe beaucoup de phénomènes que l'on peut interpréter comme des manifestations de la force d'inertie. Lorsqu'un train accélère son mouvement, les voyageurs sont soumis à une force dirigée en sens inverse du sens de la marche du train. Si le voyageur est assis dans le sens de la marche, cette force le repousse sur le dossier du siège. Cette force est la force d'inertie. Lorsque le train ralentit, le sens de la force d'inertie s'inverse et pousse le voyageur en avant, dans le sens de la marche. Si on suspend dans un wagon un pendule et si le train accélère, la force d'inertie tend à dévier le pendule dans un sens opposé à celui de l'accélération. A l'état d'équilibre la force d'inertie se trouve équilibrée par la force de pesanteur et la tension du fil de suspension du pendule. Les forces d'inertie se manifestent d'une manière par-

ticulièrement nette lors d'un brusque freinage du train. Les forces d'inertie soumettent les aviateurs et les cosmonautes à des surcharges lorsque l'avion accroît rapidement sa vitesse ou lors du lancement ou du freinage des vaisseaux cosmiques.

On peut fort bien interpréter ces différents effets sans faire intervenir la notion de force d'inertie, par une étude du mouvement relativement à un référentiel d'inertie. Ainsi, dans le cas du pendule ci-dessus, le pendule est alors en mouvement accéléré par rapport au référentiel d'inertie adopté.

Le pendule doit dévier vers l'arrière pour faire apparaître une force de tension ayant une composante horizontale pointant vers l'avant. C'est cette composante qui communique au pendule une accélération. Mais dans de nombreux cas il est plus simple d'étudier l'effet dans le référentiel mobile sans avoir recours à un référentiel d'inertie. En outre il est parfois difficile de subdiviser la force totale se manifestant dans un système non inertiel en force « réelle » résultant de l'interaction des corps et en force d'inertie « illusoire » déterminée par le mouvement accéléré du référentiel.

§ 64. Forces d'inertie apparaissant dans un référentiel en mouvement accéléré arbitraire

1. Supposons maintenant que le référentiel S (cf. fig. 182) se déplace par rapport au référentiel fixe S_1 d'une façon *parfaitement arbitraire*. Un tel mouvement peut être décomposé en un *mouvement de translation* à la vitesse v_0 égale à la vitesse de déplacement de l'origine des coordonnées O et en un *mouvement de rotation* autour d'un axe instantané passant par l'origine O. La vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ de la rotation peut varier en module et en sens. Soient $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ les vecteurs unitaires des axes de coordonnées du référentiel S que nous supposerons rectangulaire. Ces vecteurs étant unitaires, leurs longueurs sont invariables, mais leurs directions et leurs sens peuvent se modifier au cours du temps; autrement dit ce sont des vecteurs variables, car chacun de ces vecteurs tourne à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$. Leurs dérivées par rapport au temps sont données par les formules (46.11) que nous écrirons de nouveau:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=[\boldsymbol{\omega i}],\quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=[\boldsymbol{\omega j}],\quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=[\boldsymbol{\omega k}]. \tag{64.1}$$

Le raisonnement à faire est exactement le même que celui du paragraphe précédent, mais les calculs deviennent plus laborieux. Il est évident que les formules (63.2), (63.3) et (63.4) restent inchangées. L'interprétation des termes $\dot{\boldsymbol{R}}_0$ et $\ddot{\boldsymbol{R}}_0$ est la même que dans le § 63, à savoir $\dot{\boldsymbol{R}}_0$ est la vitesse absolue v_0 de l'origine O et $\ddot{\boldsymbol{R}}_0$ est son accélération absolue a_0. Seuls les termes $\dot{\boldsymbol{r}}$ et $\ddot{\boldsymbol{r}}$ deviennent autres et ce sont ces termes que nous allons calculer.

2. Soient x, y, z les coordonnées d'un point mobile M dans un référentiel mobile S. On a alors

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{64.2}$$

En dérivant cette expression on obtient

$$\dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}) + \left(x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right)$$

Dans la première parenthèse on ne dérive que les coordonnées x, y, z comme si les vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ et le référentiel S étaient immobiles. Une telle dérivation serait le fait d'un observateur se trouvant au repos dans le référentiel S et qui se serait fixé pour tâche de déterminer la vitesse du point M dans ce référentiel; dans notre terminologie il aurait déterminé ainsi la vitesse relative $\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$. Nous avons donc

$$\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}. \tag{64.3}$$

En utilisant ensuite les formules (64.1) nous obtenons

$$x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = x[\boldsymbol{\omega i}] + y[\boldsymbol{\omega j}] + z[\boldsymbol{\omega k}] = [\boldsymbol{\omega}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})] = [\boldsymbol{\omega r}]$$

Par suite

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}_{\text{rel}} + [\boldsymbol{\omega r}]. \tag{64.4}$$

Finalement la vitesse absolue sera égale à

$$\boldsymbol{v}_{\text{abs}} = \boldsymbol{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{v}_{\text{ent}}, \tag{64.5}$$

expression qui coïncide avec (63.5) à cette différence près que la vitesse d'entraînement est maintenant

$$\boldsymbol{v}_{\text{ent}} = \boldsymbol{v}_0 + [\boldsymbol{\omega r}]. \tag{64.6}$$

Cette quantité représente la vitesse absolue qu'aurait eu le point M s'il était au repos dans le référentiel mobile S. C'est pour cette raison qu'on l'appelle vitesse d'entraînement. La vitesse d'entraînement comporte deux parties: la vitesse $\boldsymbol{v}_0$ à laquelle se meut l'origine O du trièdre de référence et la vitesse $[\boldsymbol{\omega r}]$ qui résulte de la rotation du référentiel S autour de son origine O.

3. La question de l'accélération absolue est un peu plus compliquée. Pour la calculer dérivons par rapport au temps l'expression (64.5). Compte tenu de (64.6) nous obtenons

$$\boldsymbol{a}_{\text{abs}} \equiv \dot{\boldsymbol{v}}_{\text{abs}} = \dot{\boldsymbol{v}}_{\text{rel}} + \dot{\boldsymbol{v}}_0 + [\boldsymbol{\omega}\dot{\boldsymbol{r}}] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}].$$

La dérivée de $\dot{\boldsymbol{v}}_{\text{rel}}$ s'obtient en dérivant (64.3). On doit évidemment dériver aussi bien les composantes de la vitesse relative $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$

que les vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. On procède de la même façon que dans le cas de la dérivation de (64.2). On écrira donc par analogie avec (64.4)

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\text{rel}} = \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{rel}}], \tag{64.7}$$

où

$$\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}. \tag{64.8}$$

L'expression (64.8) donne l'accélération relative. Pour la trouver il faut dériver deux fois de suite les coordonnées x, y, z en supposant les vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ fixes. C'est ce que ferait un observateur étudiant le mouvement du point M par rapport au référentiel S sans savoir que ce référentiel est en mouvement. C'est pour cela que la quantité (64.8) porte le nom d'accélération relative.

Transformons maintenant la forme de la composante $[\boldsymbol{\omega}\dot{\boldsymbol{r}}]$ en y substituant l'expression (64.6) à la place de $\dot{\boldsymbol{r}}$:

$$[\boldsymbol{\omega}\dot{\boldsymbol{r}}] = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{rel}}] + [\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]].$$

L'accélération absolue sera en définitive

$$\boldsymbol{a}_{\text{abs}} = \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + 2\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{rel}}] + \dot{\boldsymbol{v}}_0 + [\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}], \tag{64.9}$$

que l'on peut encore écrire

$$\boldsymbol{a}_{\text{abs}} = \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}} + \boldsymbol{a}_{\text{ent}}, \tag{64.10}$$

où

$$\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{rel}}], \tag{64.11}$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{ent}} = \dot{\boldsymbol{v}}_0 + [\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]. \tag{64.12}$$

Le vecteur $\boldsymbol{a}_{\text{ent}}$ ne dépend que du mouvement du référentiel S relativement au référentiel fixe S_1. C'est la seule accélération que connaîtrait un point au repos dans le référentiel S. C'est pour cela que le vecteur $\boldsymbol{a}_{\text{ent}}$ est dit *accélération d'entraînement*. Enfin la composante $\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{rel}}]$ dépend aussi bien du mouvement relatif que du mouvement d'entraînement et porte le nom d'*accélération de Coriolis*, d'après le nom du savant français Coriolis (1792-1843) qui introduisit cette notion dans la mécanique. L'égalité (64.10) où figurent les différentes composantes de l'accélération absolue exprime le *théorème de Coriolis* qui s'énonce: *l'accélération absolue est égale à la somme vectorielle de l'accélération relative, de l'accélération de Coriolis et de l'accélération d'entraînement.*

Voyons ce que représente l'accélération d'entraînement. Utilisons à cet effet la formule (64.12). Le terme $\dot{\boldsymbol{v}}_0$ est l'accélération d'entraînement résultant du mouvement de translation accéléré du référentiel S, qui est le même que celui de l'origine O du trièdre de réfé-

rence. Les deux autres termes de la somme sont dus à la rotation du référentiel S. Le terme $[\dot{\omega} r]$ fait partie de l'accélération d'entraînement car il provient de la non-uniformité de la rotation. Si la rotation était uniforme ($\omega = \text{const}$), ce terme n'existerait pas. L'autre terme $[\omega [\omega r]]$ que nous noterons a_{cp} est l'accélération centripète pointant vers l'axe instantané de rotation. En effet écrivons le rayon vecteur r sous la forme $r = r_\perp + r_\parallel$, $r_\parallel$ et $r_\perp$ étant respectivement les composantes de ce rayon vecteur dirigées suivant l'axe de rotation et suivant la normale à cet axe. Comme $[\omega r_\parallel] = 0$, on a

$$a_{\text{cp}} \equiv [\omega [\omega r]] = [\omega [\omega r_\perp]].$$

En développant d'après la formule connue le produit vectoriel double et en tenant compte de ce que $\omega r_\perp = 0$, on obtient

$$a_{\text{cp}} = -\omega^2 r_\perp. \tag{64.13}$$

Ce qui démontre notre proposition.

4. On pourrait dès maintenant établir l'équation du mouvement relatif d'un point matériel. Mais nous estimons utile de démontrer à nouveau le théorème de Coriolis en prenant un cas particulier afin de mieux faire comprendre l'origine de l'accélération de Coriolis et des autres termes de l'accélération absolue.

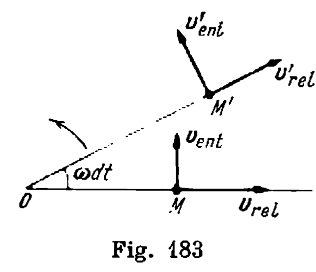


Fig. 183

Soit une bille M (fig. 183) se déplaçant le long d'une tige rigide tournant autour d'un axe fixe à la vitesse angulaire ω perpendiculaire au plan de la figure. La vitesse absolue v_{abs} de la bille se compose de deux vitesses rectangulaires: la vitesse de déplacement le long de la tige et la vitesse normale à la tige. La première de ces vitesses est la vitesse relative dans un référentiel par rapport auquel la tige est au repos. La seconde apparaît du fait de la rotation de la tige et représente donc une vitesse d'entraînement. Ainsi $v_{\text{abs}} = v_{\text{rel}} + v_{\text{ent}}$ et par suite $a_{\text{abs}} = \dot{v}_{\text{rel}} + \dot{v}_{\text{ent}}$. Posons que dans le temps dt la tige tourne d'un angle $d\varphi = \omega dt$. Au cours de ce même intervalle de temps dt la bille s'est déplacée de la position M dans la position M'. Calculons l'accroissement correspondant du vecteur v_{rel}. Si la tige ne tournait pas, cet accroissement ne pourrait résulter que d'un mouvement non uniforme de la bille le long de la tige et serait égal à $a_{\text{rel}}\, dt$. Mais comme la tige tourne, v_{rel} prend un accroissement supplémentaire égal à $[d\varphi v_{\text{rel}}]$. L'accroissement total du vecteur v_{rel} est donc:

$$dv_{\text{rel}} = a_{\text{rel}}\, dt + [\omega v_{\text{rel}}]\, dt.$$

Cherchons l'accroissement du vecteur $v_{\text{ent}} = [\omega r]$. Il est évident que $dv_{\text{ent}} = [d\omega r] + [\omega dr]$. Le premier terme apparaît du fait de la rotation non uniforme de la tige et vaut $[\dot{\omega} r]\, dt$. Le second terme est déterminé par le déplacement du point M dans l'espace (absolu) et a pour valeur $[\omega v_{\text{abs}}]\, dt = [\omega v_{\text{rel}}] dt + [\omega v_{\text{ent}}]\, dt$. Ainsi

$$dv_{\text{ent}} = [\dot{\omega} r]\, dt + [\omega v_{\text{rel}}]\, dt + [\omega v_{\text{ent}}]\, dt.$$

En additionnant les accroissements des deux vecteurs v_{rel} et v_{ent} nous obtenons finalement

$$a_{abs} = a_{rel} + 2[\omega v_{rel}] + [\omega[\omega r]] + [\dot{\omega} r].$$

Il apparaît que dans le cas considéré l'accélération de Coriolis comporte deux termes égaux. Le premier résulte de la rotation du vecteur v_{rel} accompagnant celle de la tige. Le second terme est dû à l'accroissement de la vitesse d'entraînement v_{ent}; cet accroissement résulte de ce que la bille s'approche ou s'éloigne de l'axe de rotation. La démonstration ci-dessus reste évidemment valable si la direction de l'axe de rotation varie avec le temps.

L'accélération de Coriolis $2[\omega v_{rel}]$ est dirigée suivant la normale à la tige en rotation. Pour que la bille M acquière cette accélération, la tige doit exercer sur la bille une pression latérale. La force de pression latérale est égale à $2m[\omega v_{rel}]$, m étant la masse da la bille M. La bille M exerce sur la tige une force égale et opposée $F = 2m[v_{rel}\omega]$. Si la bille s'éloigne de l'axe de rotation

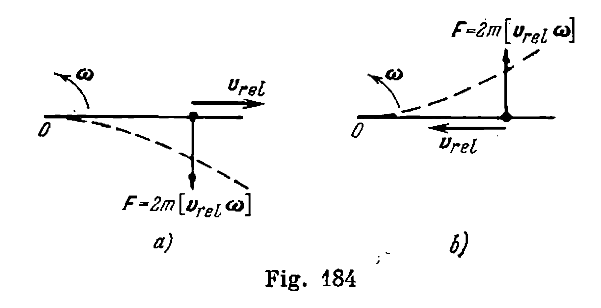


Fig. 184

(fig. 184, *a*), la force F s'exerce dans un sens opposé à celui de la rotation et la rotation se trouve ralentie. La tige s'incurve alors de façon que sa convexité soit dans le sens de la rotation (en pointillé sur la fig. 184, *a*). Si la bille se rapproche de l'axe de rotation (fig. 184, *b*), la force F est dirigée dans le sens de la rotation de la tige; la vitesse angulaire de la tige augmente et la tige s'incurve de manière que sa concavité soit dans le sens de la rotation. Dans l'expérience avec le tabouret de Joukovsky (§ 34, fig. 60), nous avons vu apparaître des forces de pression latérale exercées par les haltères sur l'expérimentateur lorsque celui-ci éloigne ou approche les haltères de l'axe de rotation. Ce sont ces forces qui font varier la vitesse angulaire de rotation du tabouret avec l'expérimentateur. D'une façon générale, tous les effets liés à une variation de la vitesse angulaire d'un corps isolé accompagnant les variations de son moment d'inertie se laissent interpréter par l'action des forces de pression latérale.

5. Etablissons maintenant les équations du mouvement relatif. Nous allons procéder de la même manière que dans le paragraphe précédent. Portons l'expression (64.10) dans l'équation (63.1) et regroupons tous les termes dans le second membre, à l'exception du terme contenant l'accélération relative. On obtient

$$ma_{rel} = F - ma_{cor} - ma_{ent} \tag{64.14}$$

ou sous forme développée

$$ma_{rel} = F + 2m[v_{rel}\omega] - m\dot{v}_0 + m\omega^2 r_\perp - m[\dot{\omega} r]. \tag{64.15}$$

A la force « réelle » F sont venues s'ajouter deux forces d'inertie: la *force* dite *de Coriolis*

$$F_{cor} = -ma_{cor} = 2m\,[v_{rel}\omega], \tag{64.16}$$

et la *force d'inertie d'entraînement*

$$F_{ent} = -ma_{ent} = -m\dot{v}_0 + m\omega^2 r_{\perp} - m\,[\dot{\omega} r]. \tag{64.17}$$

Toutes les remarques générales que nous avons faites au sujet des forces d'inertie s'appliquent à ces deux forces d'inertie qui apparaissent lorsque le référentiel effectue un mouvement de translation accéléré.

6. Dans le cas général, la force d'inertie d'entraînement comporte trois termes. Le premier terme $-m\dot{v}_0$ a été introduit au paragraphe précédent; c'est la *force d'inertie de translation* résultant du mouvement accéléré de l'origine O du trièdre de référence. Le dernier terme $-m\,[\dot{\omega} r]$ est dû à la *rotation non uniforme* du trièdre de référence. Il n'a pas reçu de dénomination spéciale. Le second terme

$$F_{cf} = m\omega^2 r_{\perp} \tag{64.18}$$

est la *force d'inertie centrifuge* ou *force centrifuge* tout court. Lorsqu'un autobus prend un virage, les voyageurs sont soumis à une force centrifuge. Les surcharges auxquelles se trouve soumis un aviateur effectuant dans le ciel des figures d'acrobatie à grande vitesse sont pour l'essentiel dues aux forces centrifuges. Si on attache à une centrifugeuse des billes suspendues à des fils et qu'on la mette ensuite en rotation rapide, les forces centrifuges éloigneront les billes de l'axe de rotation. L'angle de déviation est d'autant plus grand que la bille se trouve éloignée de l'axe de rotation. Les forces centrifuges sont mises à profit pour l'essorage du linge dans les machines à laver et dans les écrémeuses qui séparent la crème du lait.

7. Comme toutes les autres forces d'inertie, les forces centrifuges ne se manifestent que dans les systèmes en mouvement (rotation) accéléré et disparaissent dès qu'on passe à des systèmes d'inertie. Il ne faut pas l'oublier pour ne pas risquer d'aboutir à des paradoxes décevants. Donnons un exemple de tels paradoxes. Soit un corps en mouvement circulaire. Ce corps est soumis à deux forces: la force centripète F_1 orientée vers le centre du cercle et la force centrifuge F_2 orientée en sens inverse. Etant égales et opposées ces deux forces s'équilibrent mutuellement: $F_1 + F_2 = 0$. Or selon la loi d'inertie, tout corps doit être en mouvement rectiligne et uniforme. La contradiction n'est apparue que parce qu'on a rapporté le mouvement à un référentiel fixe (d'inertie) où aucune force centrifuge ne peut apparaître. Il n'y a que la force centripète F_1 qui communique au corps une accélération. C'est, par exemple, la tension

du fil auquel est attaché le corps. On ne doit introduire la force centrifuge que lorsque le mouvement est rapporté à un référentiel en rotation. Dans un référentiel en rotation le corps est soumis à une force centrifuge qui est équilibrée par une force centripète. Mais là il n'y a aucune contradiction puisque le corps est au repos relativement à un référentiel en rotation.

La confusion provient bien souvent de ce qu'en mécanique technique on utilise le terme « force centrifuge » dans un sens très différent. On entend par force centrifuge la *force de réaction* qu'oppose un corps A en mouvement circulaire au corps B qui le met en rotation. La force que le corps B applique au corps A, qui est égale et opposée à la force de réaction, est désignée sous le nom de force centripète. Soit une bille attachée à un fil. Prenons dans la main l'extrémité libre du fil et faisons tourner la bille au bout du fil. La force centripète est ici la tension du fil qui attire la bille vers le centre du cercle. La force centrifuge provient également de la tension du fil, mais elle est appliquée à la main qui tient le fil. Dans cette acceptation de ces termes, la force centrifuge et la force centripète sont toujours appliquées à des *corps différents*. Ces deux forces sont des « forces réelles » dans le sens de la mécanique newtonienne, puisqu'elles résultent toutes deux de l'interaction des corps. On ne peut rien dire contre cette terminologie mais on peut mettre en doute son opportunité. Mais lorsqu'on affirme que la force centrifuge prise dans le sens de cette terminologie tend à éloigner le corps tournant de l'axe de rotation, on doit protester vigoureusement; une telle affirmation est absurde puisque dans ce cas, n'étant pas appliquée au corps en rotation, cette force ne peut exercer sur lui aucune action. Lorsqu'on dit que la force centrifuge tend à repousser le corps de l'axe de rotation, il faut l'entendre comme une *force d'inertie*. C'est pour cela que nous réserverons le terme « force centrifuge » aux cas où elle est une *force d'inertie* qui ne se manifeste que dans les référentiels en rotation et disparaît dans les référentiels d'inertie.

8. Quelques mots au sujet de la force d'inertie de Coriolis (64.16). Elle n'apparaît que lorsque le référentiel S est en rotation et que le point matériel *est en mouvement relativement à ce référentiel*. La force de Coriolis se distingue des autres forces d'inertie en ce qu'elle dépend de la vitesse relative v_{rel}. Si la vitesse relative devient nulle, la force de Coriolis s'annule elle aussi. Un voyageur debout dans un autobus en marche est soumis dans les virages à la force centrifuge. Mais si pendant le virage le voyageur se déplace dans l'autobus, il se trouve soumis en plus à une force de Coriolis; c'est ce qui explique que dans les virages on conserve son équilibre plus facilement en étant immobile qu'en marchant. Etant toujours perpendiculaire à la vitesse relative, la force de Coriolis n'effectue aucun travail pendant le mouvement relatif. Elle est donc une force *gyroscopique* (cf. § 24, point 6).

PROBLÈMES

1. En quoi le raisonnement suivant est-il erroné : soient deux points matériels immobiles A et B à une distance r l'un de l'autre. L'état de repos du point B peut être considéré comme résultant de la composition de deux rotations de vitesses angulaires constantes égales mais de sens opposés $+\boldsymbol{\omega}$ et $-\boldsymbol{\omega}$. La première rotation fait apparaître une accélération centripète $\boldsymbol{a}_1 = \omega^2\boldsymbol{r}$ et la seconde une accélération centripète $\boldsymbol{a}_2 = (-\omega)^2\boldsymbol{r} = \omega^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_1$. L'accélération résultante du point B est donc $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = 2\omega^2\boldsymbol{r}$. Il s'ensuit que le point A exerce sur le point B une force d'attraction $F = 2m\omega^2\boldsymbol{r}$, m étant la masse du point B. Comme ω est une quantité arbitraire, on aboutit au résultat absurde que les points A et B s'attirent mutuellement avec une force arbitraire fixée à l'avance.

S o l u t i o n. Dans ce raisonnement on n'a pas tenu compte de l'accélération de Coriolis. Introduisons un référentiel S en rotation uniforme autour du point A à la vitesse angulaire $+\boldsymbol{\omega}$. Posons que le point B est en rotation relativement à ce référentiel à la vitesse angulaire $-\boldsymbol{\omega}$. En désignant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par $\boldsymbol{r}$ nous écrivons pour les vitesses et les accélérations du point B :

$$v_{\text{rel}} = -[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}], \quad \boldsymbol{a}_{\text{rel}} = \boldsymbol{a}_{\text{ent}} = -\omega^2\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{rel}}] = 2\omega^2\boldsymbol{r}.$$

Il s'en suit que $\boldsymbol{a}_{\text{abs}} = \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}} + \boldsymbol{a}_{\text{ent}} = 0$.

2. Un tireur et une cible se trouvent aux deux extrémités d'un diamètre d'un manège de chevaux de bois de rayon $R = 5$ m en rotation uniforme autour d'un axe vertical. La période de rotation du manège $T = 10$ s, la vitesse de la balle de fusil $v = 300$ m/s. En négligeant la vitesse linéaire maximale ωR du manège devant la vitesse de la balle, estimer sous quel angle α par rapport au diamètre doit viser le tireur pour atteindre la cible. Traiter le problème, d'une part, du point de vue d'un système en rotation, et d'autre part, du point de vue d'un système fixe et comparer les résultats.

R é p o n s e. $\alpha = \frac{4\pi R}{vT} = 0{,}0209$ rad $= 1{,}2°$.

3. Une tige fine de longueur l tourne autour de l'une de ses extrémités en décrivant un cône de révolution (pendule conique composé). Calculer la période T du mouvement en fonction de l'angle au sommet 2φ.

I n d i c a t i o n. Dans un référentiel tournant avec la tige autour d'un axe vertical la tige est au repos. Le problème consiste à déterminer la condition d'équilibre d'une tige suspendue dans ce référentiel et soumise à l'action de la pesanteur et de la force centrifuge.

R é p o n s e. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l\cos\varphi}{3g}}$.

4. Un pendule pesant constitué par une bille emmanchée sur l'extrémité d'une tige rigide de petit diamètre oscille librement autour d'un axe horizontal A passant par l'extrémité supérieure de la tige. L'axe A est fixé sur l'axe géométrique d'un disque horizontal tournant autour de cet axe géométrique vertical à la vitesse angulaire constante ω. Autrement dit le plan dans lequel oscille le pendule tourne avec le disque à la même vitesse angulaire ω. Calculer la période des petites oscillations du pendule sachant que la masse de la tige est petite devant celle de la bille. Dans quelles conditions la position verticale inférieure de la tige sera-t-elle une position d'équilibre instable ?

R é p o n s e. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - l\omega^2}}$, pour $l\omega^2 < g$. Lorsque $l\omega^2 > g$ la position d'équilibre est instable.

5. Imaginons qu'on ait creusé dans le globe terrestre un canal suivant un diamètre du plan équatorial. Calculer la force de pression F qu'exercera sur la paroi du canal un corps en chute libre dans ce canal depuis la surface du globe,

à l'instant où il arrivera au centre de la Terre. Négliger la résistance de l'air et poser que la densité de la Terre est homogène.

Réponse. $F = \frac{4\pi}{T}\sqrt{\frac{R}{g}}\,P \approx 0{,}12\ P$, P étant le poids du corps à la surface de la Terre, T la durée du jour sidéral et R le rayon de la Terre.

6. (Problème proposé par Newton). Quelle force centrale faudrait-il ajouter à la force d'attraction exercée par le Soleil pour que l'orbite d'une planète se mette à tourner autour du Soleil sans modifier sa forme?

Solution. Désignons par F_1 la force d'attraction newtonienne qu'exerce le Soleil sur la planète, par F_2 la force centrale supplémentaire cherchée et par $\boldsymbol{\omega}$ la vitesse angulaire de rotation de l'orbite. Le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est perpendiculaire au plan de l'orbite. Le moment cinétique total $\boldsymbol{L}$ de la planète par rapport au Soleil se compose du moment cinétique du mouvement relatif $\boldsymbol{L}_1 = m\,[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}]$ et du moment cinétique de la rotation supplémentaire $\boldsymbol{L}_2 = mr^2\boldsymbol{\omega}$. Le moment $\boldsymbol{L}$ est évidemment conservatif puisque la force totale $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ est centrale. Le moment L_1 est conservatif lui aussi puisque c'est le moment qu'aurait eu la planète si l'orbite ne tournait pas et si son mouvement était déterminé par la seule force centrale $\boldsymbol{F}_1$. Par suite le moment L_2 doit être conservatif et la planète doit tourner à la vitesse angulaire

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{L}_2}{mr^2} = \frac{\mathrm{const}}{r^2}. \qquad (64.19)$$

La rotation de l'orbite est irrégulière à moins qu'elle soit circulaire. Dans un référentiel tournant avec l'orbite à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ l'équation de mouvement de la planète peut s'écrire

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + m\omega^2\boldsymbol{r} - m\,[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}] + 2m\,[\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\boldsymbol{\omega}].$$

D'autre part, selon l'énoncé du problème, dans ce référentiel la planète doit décrire une ellipse de Kepler normale, par suite $m\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{F}_1$, ce qui conduit à

$$\boldsymbol{F}_2 = -m\omega^2\boldsymbol{r} + m\,[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}] - 2m\,[\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\boldsymbol{\omega}]. \qquad (64.20)$$

En dérivant (64.19) par rapport au temps et en remarquant que $\boldsymbol{L}_2 = \mathrm{const}$, on obtient

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -2\frac{\dot{r}}{r}\frac{\boldsymbol{L}_2}{mr^2} = -2\frac{\dot{r}}{r}\boldsymbol{\omega}.$$

On peut décomposer la vitesse $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$ en une composante le long du rayon $\frac{\dot{r}}{r}\boldsymbol{r}$ et une composante normale au rayon. Cette dernière apparaît par suite de la rotation de la planète sur sa trajectoire elliptique à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{rel}} = \frac{\boldsymbol{L}_1}{mr^2}$. Ainsi

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \frac{\dot{r}}{r}\boldsymbol{r} + [\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{rel}}\boldsymbol{r}].$$

En portant cette dernière expression dans (64.20) on obtient après des transformations simples

$$\boldsymbol{F}_2 = -m\,\{\omega^2 + 2\,(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{rel}})\}\,\boldsymbol{r}, \qquad (64.21)$$

soit

$$\boldsymbol{F}_2 = -[L_2^2 + 2\,(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2)]\,\frac{\boldsymbol{r}}{mr^4} = \frac{\mathrm{const}}{r^4}\,\boldsymbol{r}. \qquad (64.22)$$

Ceci montre que la force supplémentaire F_2 doit être inversement proportionnelle au cube de la distance de la planète au Soleil.

7. Utiliser le théorème de Coriolis pour résoudre le *problème inverse* du mouvement d'un gyroscope symétrique. Le problème direct de la mécanique consiste à déterminer le mouvement connaissant les forces appliquées au système mécanique. Le problème inverse consiste à déterminer les forces connaissant le mouvement du système. Soit un gyroscope exécutant une précession régulière stimulée. Quelles sont les forces qui doivent lui être appliquées pour que cette précession ait lieu?

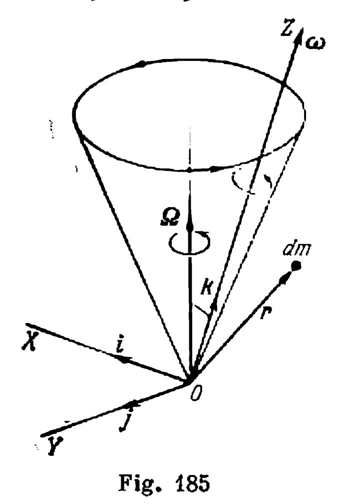


Fig. 185

S o l u t i o n. Le gyroscope est en rotation uniforme autour de son axe de révolution à la vitesse angulaire ω et son axe de révolution exécute un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω (précession stimulée). Adoptons un référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω. Dans ce référentiel l'axe de révolution du gyroscope est immobile, de sorte que

$$v_{\text{rel}} = [\omega r], \quad v_{\text{ent}} = [\Omega r], \quad a_{\text{ent}} = [\Omega\,[\Omega r]]. \tag{64.23}$$

Délimitons en pensée, dans le corps du gyroscope, un élément de masse dm et de rayon vecteur r (fig. 185). Désignons par df la force (réelle) appliquée à cet élément de masse. En utilisant la formule (64.9) il ne faut pas perdre de vue que dans notre cas la vitesse angulaire de rotation du référentiel est désignée par Ω (et non par ω comme dans (64.9)). En appliquant à l'élément de masse la deuxième loi de Newton et en utilisant les formules (64.9) et (64.23), nous aurons

$$df = dm\,[\omega\,[\omega r]] + 2dm\,[\Omega\,[\omega r]] + dm\,[\Omega\,[\Omega r]]. \tag{64.24}$$

Comme nous supposons que le gyroscope est un solide parfaitement rigide, son équation de mouvement est complètement définie par la somme géométrique f des forces extérieures et de leurs moments par rapport au point de suspension O. Pour trouver f nous devons intégrer (64.24). Etant constants les vecteurs ω et Ω peuvent être sortis de sous le signe d'intégration. On notera encore que $\int r\,dm = mr_C$, r_C étant le rayon vecteur du centre de masse C du gyroscope. Ce calcul nous fournit

$$f = m\,\{[\omega\,[\omega r_C]] + 2\,[\Omega\,[\omega r_C]] + [\Omega\,[\Omega r_C]]\}.$$

Les deux premiers termes du second membre de cette relation sont nuls puisque, le centre de masse C se trouvant sur l'axe de révolution du gyroscope, les vecteurs r_C et ω sont colinéaires. En définitive on a

$$f = m\,[\Omega\,[\Omega r_C]]. \tag{64.25}$$

On aurait pu obtenir ce résultat directement par application du théorème du mouvement du centre de masse puisque son accélération n'est due qu'à la rotation de précession et a pour valeur $[\Omega\,[\Omega r_C]]$ (accélération centripète). La force f apparaît aussitôt comme étant la réaction du point d'appui sur le gyroscope en précession.

Calculons maintenant le moment M des forces. Pour cela on doit former le produit vectoriel du rayon vecteur r par l'expression (64.24), puis intégrer le résultat obtenu par rapport à m. Or il est évident qu'avec cette intégration le terme $dm\,[\omega\,[\omega r]]$ ne contribuera aucunement au moment M, car le résultat de

l'intégration de ce terme est indépendant de l'existence d'autres termes dans (64.24). Ce terme correspond à une rotation uniforme autour de l'axe de révolution du gyroscope et comme l'axe de révolution est un des axes de rotation libres, aucune force extérieure n'est nécessaire pour assurer une rotation uniforme autour d'un axe libre. Pour la même raison la valeur de M ne dépendrait pas du dernier terme de (64.24) si la précession s'effectuait autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de révolution du gyroscope et si son centre de masse C était confondu avec le point de suspension O. Si ces conditions ne sont pas remplies, le dernier terme contribue à M. Néanmoins nous négligerons le dernier terme de (64.24) pour la raison suivante. Nous supposerons que la vitesse de la rotation de précession Ω est très petite devant la vitesse de rotation propre ω du gyroscope, ce qui nous permet de négliger les carrés de la petite quantité Ω. Or le dernier terme de (64.24) est justement du second degré en Ω. On en arrive à conclure que le moment M n'est dû qu'au deuxième terme de la somme (64.24). En développant le produit vectoriel double, en le multipliant vectoriellement par r et en intégrant, nous obtenons

$$M = 2 \int (\Omega r)\,[r\omega]\,dm$$

Pour calculer l'intégrale, introduisons un système de coordonnées rectangulaires en faisant coïncider l'axe Z avec l'axe de révolution du gyroscope et en disposant l'axe X dans le plan contenant les vecteurs ω et Ω (cf. fig. 185). Dans ce système de coordonnées

$$M = -2j\omega\Omega_x \int x^2\,dm - 2j\omega\Omega_z \int zx\,dm + 2i\omega\Omega_x \int xy\,dm + 2i\omega\Omega_z \int yz\,dm.$$

La première intégrale exceptée, toutes les autres intégrales donnent un résultat nul parce que la répartition des masses est à symétrie axiale. Quant au premier terme il peut s'écrire sous la forme suivante:

$$M = -j\omega\Omega_x \int (x^2 + y^2)\,dm = -jI_{\perp}\omega\Omega \sin\vartheta,$$

ϑ étant l'angle entre les vecteurs ω et Ω, et $I_{\perp}$ le moment d'inertie correspondant du gyroscope. Sous forme vectorielle

$$M = I_{\perp}\,[\Omega\omega] \tag{64.26}$$

Le produit vectoriel $[\Omega\omega]$ est le vecteur vitesse à laquelle, au cours d'une précession régulière, se déplace l'extrémité du vecteur ω qui est indissolublement liée à l'axe de révolution du gyroscope. Ainsi le sommet du gyroscope se déplace non dans la direction de la force appliquée, mais suivant une direction qui lui est normale, donc dans la direction du moment M. Ce résultat est probablement la chose la plus étonnante dans le mouvement du gyroscope. Si on passe maintenant à un référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω de la précession, on pourra dire que dans ce référentiel le moment des forces extérieures doit compenser le moment des forces d'inertie de Coriolis.

§ 65. Equation du mouvement relatif d'un point matériel dans le champ de la gravitation terrestre, compte tenu de la rotation de la Terre

1. Appliquons l'équation du mouvement relatif (64.15) au mouvement des corps relativement à la Terre. Nous attacherons le référentiel mobile S à la Terre dans son mouvement de rotation. Il s'agit de la rotation de la Terre par rapport à un référentiel d'iner-

tie, celui de Copernic par exemple. Plaçons l'origine des coordonnées O au centre de la Terre. Dans ces conditions v_0 représentera la vitesse et $\dot{v}_0$ l'accélération du centre de la Terre. Puisque la rotation de la Terre est pratiquement uniforme, le dernier terme de (64.15) se trouve éliminé. Comme il ne s'agira que de mouvements relatifs, nous supprimerons dorénavant l'indice « rel » dans (64.15), ce qui revient à poser $v \equiv v_{\text{rel}}$ et $a \equiv a_{\text{rel}}$. Nous présenterons la force extérieure sous la forme d'une somme de trois forces $F_T + F_0 + F$, F_T étant la force de l'attraction gravitationnelle de la Terre, F_0 la résultante des forces d'attraction gravitationnelle du Soleil, de la Lune, des planètes, des étoiles et des autres corps célestes, et F la somme géométrique de toutes les autres forces agissant sur le point matériel. Par exemple, la force F tient compte de la force de résistance de l'air, de la force de frottement, de la force de tension d'un fil, etc. Avec ces notations l'équation (64.15) s'écrit

$$ma = (F_T + m\omega^2 r_A) + 2m\,[v\omega] + F + (F_0 - m\dot{v}_0). \qquad (65.1)$$

2. Mettons en œuvre la loi fondamentale de la Physique selon laquelle *dans un champ de gravitation donné l'accélération de la chute libre de tous les corps est la même*. Cette loi s'appelle *loi de Galilée généralisée*, puisque Galilée fut le premier à démontrer sa validité pour les corps en chute libre dans le champ de la gravitation terrestre. Il découle de cette loi que *la force à laquelle se trouve soumis un corps placé dans un champ de gravitation n'est pas liée à la composition du corps et ne dépend que de sa masse. Cette force est rigoureusement proportionnelle à la masse du corps.* De ce point de vue les forces de gravitation se comportent comme les forces d'inertie qui elles aussi sont rigoureusement proportionnelles à la masse du corps.

3. La principale contribution à la force F_0 est apportée par les champs de gravitation du Soleil et de la Lune. Ces champs sont inhomogènes, surtout celui de la Lune, et décroissent en raison inverse du carré de la distance à la Lune ou au Soleil. Or les dimensions de la Terre étant très petites par rapport à ces distances, on peut négliger en première approximation, dans l'étude des mouvements à proximité de la surface terrestre, les variations des champs de gravitation du Soleil, de la Lune et des autres corps célestes et ce à une distance de l'ordre du diamètre de la Terre au-dessus de sa surface; autrement dit on pose qu'au voisinage de la Terre le champ de gravitation produit par tout corps sidéral est *homogène*. Un champ gravitationnel homogène communique la même accélération à tous les corps quels que soient les points du champ où se trouvent ces corps. Il en résulte que dans cette approximation le champ de gravitation extérieure communique au point matériel considéré la même accélération que celle qu'il communique au centre de la Terre, c'est-à-dire $\dot{v}_0$. Il s'ensuit que $F_0 - m\dot{v}_0 = 0$. On en arrive à la conclu-

sion que *les forces d'attraction exercées par les champs de gravitation du Soleil, de la Lune et de tous les autres corps célestes s'éliminent entre les équations du mouvement relatif* (65.1). *Ces forces sont exactement compensées par les forces d'inertie de translation qui résultent de l'accélération que communiquent ces champs à la Terre.* Ce résultat remarquable est un corollaire de la loi de Galilée généralisée.

4. D'après la même loi de Galilée, la force $\boldsymbol{F}_\text{T}$ de l'attraction terrestre, et par suite la somme vectorielle $\boldsymbol{F}_\text{T} + m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$ sont proportionnelles à la masse m du point matériel. Cette somme ne dépend pas du mouvement relatif du point matériel et ne caractérise que le champ gravitationnel de la Terre et sa rotation. Il est donc tout indiqué de considérer cette somme comme une seule quantité. Introduisons la notation

$$\boldsymbol{F}_\text{T} + m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp = m\boldsymbol{g}. \qquad (65.2)$$

L équation du mouvement relatif s'écrira maintenant

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + 2m\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}] + \boldsymbol{F}. \qquad (65.3)$$

La quantité $\boldsymbol{g}$ est la même pour tous les corps et ne varie que lorsqu'on se déplace d'un point de l'espace à un autre.

Pour mettre en évidence la signification physique du vecteur $\boldsymbol{g}$, admettons qu'il n'existe aucune force extérieure ($\boldsymbol{F} = 0$) et que la vitesse $\boldsymbol{v}$ du point matériel est égale à zéro. La formule (65.3) entraîne $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$. Ainsi *le vecteur* $\boldsymbol{g}$ *représente l'accélération qu'acquiert le corps quand on l'abandonne en chute libre par rapport à la Terre, à condition que sa vitesse soit nulle à l'instant considéré.* Il est indispensable de préciser que la vitesse du corps est nulle, car si elle ne l'était pas, le corps prendrait une accélération supplémentaire déterminée par la force de Coriolis. Nous voyons ainsi que l'accélération en chute libre comporte deux termes

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_\text{abs} + \omega^2\boldsymbol{r}_\perp. \qquad (65.4)$$

Le premier terme $\boldsymbol{g}_\text{abs} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}_\text{T}$ est l'accélération due à la force d'attraction gravitationnelle de la Terre. C'est l'accélération que l'on aurait obtenue en mesurant l'accélération que prend le corps en chute libre par rapport à un référentiel fixe, à condition qu'il ne soit soumis à aucun autre champ hormis le champ terrestre. Le second terme $\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$ est l'accélération que prend le corps sous l'action de la force d'inertie centrifuge et qui est liée à la rotation de la Terre.

§ 66. Poids et pesée du corps

1. *Le poids d'un corps est la force* $\boldsymbol{P}$ *qui lui est appliquée et qui est égale et opposée à la force que ce corps exerce sur le support sur lequel il repose ou à la force de tension du fil auquel ce corps est suspendu. On suppose que le corps, le support et la suspension sont au repos par rapport au référentiel dans lequel s'effectue la pesée. Quand on parle*

du poids d'un corps, on suppose généralement que le corps, son support et sa suspension sont au repos par rapport à la Terre. Supposons pour fixer les idées que le corps repose sur un support. Il agit sur le support avec la force $\boldsymbol{P}$ et le support agit sur le corps avec une force $\boldsymbol{F}$ égale et opposée à $\boldsymbol{P}$. Les forces $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{F}$ sont donc les forces d'interaction du corps et du support. Elles vérifient la troisième loi de Newton $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{P}$. En admettant que le corps est au repos sur le support, posons dans (65.3) $v = 0$, $\boldsymbol{a}=0$, $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{P}$. On obtient alors

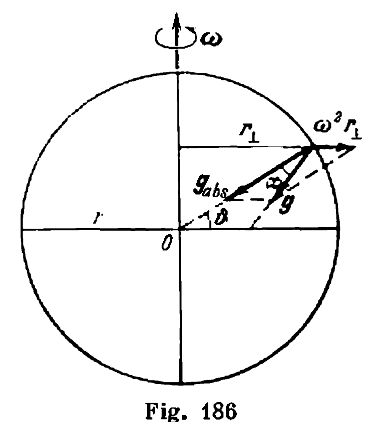


Fig. 186

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}. \qquad (66.1)$$

Compte tenu de (65.4) nous voyons que P comporte deux termes:

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}_{\text{abs}} + m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{F}_{\text{T}} + m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp. \qquad (66.2)$$

Il en résulte que *le poids est la somme géométrique de la force d'attraction gravitationnelle de la Terre $\boldsymbol{F}_{\text{T}}$ et de la force d'inertie centrifuge $m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$.*

Le raisonnement est le même pour un corps suspendu à un fil. La direction que prend le fil de suspension caractérise la direction de la force $\boldsymbol{P}$ et donc celle de l'accélération en chute libre $\boldsymbol{g}$. Cette direction est dite *ligne du fil à plomb.*

2. Le vecteur $\boldsymbol{g}_{\text{abs}}$ caractérise le champ de la gravitation terrestre. En tout point de l'espace il ne dépend que des dimensions et de la forme de la Terre, ainsi que de la répartition de la substance dans le globe terrestre. Si la Terre avait une forme sphérique parfaite et si la répartition de sa substance était à symétrie sphérique, le vecteur $\boldsymbol{g}_{\text{abs}}$ serait dirigé vers le centre de la Terre. La ligne du fil à plomb est définie par le vecteur $\boldsymbol{g}$, i.e. par la diagonale du parallélogramme construit avec les vecteurs $\boldsymbol{g}_{\text{abs}}$ et $\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$ (fig. 186). Il s'ensuit que même si la Terre possédait une symétrie sphérique parfaite, la direction pointant vers son centre ne coïnciderait pas avec la ligne du fil à plomb. Pour le cas d'une Terre sphérique la différence entre ces directions est déterminée par la force centrifuge. En réalité, la Terre est aplatie aux pôles (donc le long de son axe de révolution), ce qui constitue une cause supplémentaire de déviation de $\boldsymbol{g}$ par rapport à $\boldsymbol{g}_{\text{abs}}$. Cependant, comme la rotation de la Terre est lente et que son aplatissement n'est pas tellement prononcé, ces deux directions diffèrent peu. Pour une Terre supposée parfaitement sphérique l'angle α entre ces directions est déterminé par la formule

$$\sin\alpha = \frac{\omega^2 r_\perp}{g}\sin\vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2 r}{g}\sin 2\vartheta, \qquad (66.3)$$

où ϑ est la latitude géographique du lieu (cf. fig. 186). Aux pôles et à l'équateur l'angle α s'annule. Pour la Terre telle qu'elle est, la formule (66.3), bien qu'approchée, est suffisamment exacte. Projetons les vecteurs $\boldsymbol{g}_{abs}$ et $\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$ sur le support du vecteur $\boldsymbol{g}$; en posant $\cos\alpha \approx 1$, on obtient aisément la formule approchée

$$g = g_{abs} - \omega^2 r_\perp \cos\vartheta = g_{abs} - \omega^2 r \cos^2\vartheta. \qquad (66.4)$$

L'erreur que l'on commet en utilisant cette formule est de l'ordre de α^2.

Le module de g peut être déterminé par pesée ou par étude de la chute libre d'un corps. Un procédé plus précis est fondé sur la mesure de la période d'oscillations d'un pendule réversible (cf. § 41). Les données expérimentales montrent que g dépend de la latitude géographique. Aux pôles $g = 983{,}2$ cm/s^2, à l'équateur $g = 978{,}0$ cm/s^2. La valeur de g étant connue, la formule (66.4) permet aussi de calculer g_{abs}. Aux pôles $g_{abs} = g = 983{,}2$ cm/s^2. A l'équateur

$$g_{abs} = g + \omega^2 r = 978{,}0 + \frac{4\pi^2}{86\,164^2}\cdot 6{,}378\cdot 10^8 = 981{,}4 \text{ cm/s}^2.$$

Si la Terre était rigoureusement sphérique et si la répartition de la substance était à symétrie sphérique, la valeur de g_{abs} aurait été la même aux pôles et à l'équateur. En fait g_{abs} est plus petit à l'équateur, ce qui s'explique par l'aplatissement de la Terre provoqué par l'action des forces centrifuges. A l'équateur les points de la surface de la Terre sont plus éloignés du centre qu'aux pôles, ce qui fait que ces points sont attirés plus faiblement par le centre terrestre que les points équivalents se trouvant aux pôles. Il va de soi que l'on ne peut déceler les différences de l'accélération en chute libre g à l'aide d'une balance à fléau, mais on y arrive à l'aide d'une balance à ressort.

3. Supposons maintenant qu'une balance à ressort est installée à bord d'un vaisseau spatial ou d'un satellite artificiel. Qu'indique alors la balance lorsque le corps soumis à la pesée est au repos par rapport au vaisseau? Les raisonnements que nous avons faits ci-dessus restent valables à condition de remplacer la Terre par le vaisseau spatial. On devra notamment rattacher le référentiel mobile S au vaisseau. La Terre se comportera en corps extérieur qui avec le Soleil, la Lune et les autres corps célestes crée à l'intérieur du vaisseau un champ de gravitation extérieur. Les dimensions du vaisseau étant petites, ce champ y sera homogène. Il sera exactement compensé par les forces d'inertie de translation créées dans le référentiel S par l'accélération que lui communique ce champ de gravitation. Si les moteurs de propulsion du vaisseau sont arrêtés et qu'il tombe librement dans ce champ de gravitation, le mouvement relatif à l'intérieur du vaisseau sera toujours décrit par l'équation (65.3). Vu l'extrême petitesse du champ de gravitation propre du vaisseau,

le terme mg ne sera dû qu'à la rotation du vaisseau et sera donc égal à $m\omega^2 r_\perp$ (force centrifuge). Si le vaisseau ne tourne pas autour de son axe et que le corps à peser soit au repos par rapport au vaisseau, l'équation (65.3) nous donne $\boldsymbol{F} = 0$. La quantité $\boldsymbol{F}$ est la force qu'applique au corps le ressort allongé de la balance. Puisque $\boldsymbol{F} = 0$, le ressort n'est pas allongé et la balance indique un poids nul. La balance ne réagit pas à l'action des champs de gravitation extérieurs, ces derniers étant compensés par les forces d'inertie de translation. Un tel état d'« apesanteur » est propre à tous les corps se trouvant à bord du vaisseau spatial. L'état d'« apesanteur » se manifeste par l'absence dans les corps de tensions élastiques internes, qui apparaissent d'ordinaire sous l'action de la pesanteur.

Quand le vaisseau tourne, il apparaît une force centrifuge qui n'est pas compensée par les champs gravitationnels extérieurs. Cette force donne naissance à une « pesanteur artificielle ».

Enfin, lorsque les moteurs de propulsion fonctionnent et communiquent au vaisseau une accélération de translation supplémentaire $\boldsymbol{w}$, dans le second membre de l'équation (65.3) doit figurer le terme $-m\boldsymbol{w}$. La balance indiquera alors le poids $\boldsymbol{P} = -m\boldsymbol{w}$. Tous les corps se trouvant à l'intérieur du vaisseau redeviendront « pesants ». C'est l'existence de ce « poids » qui détermine les surcharges auxquelles sont soumis les cosmonautes au lancement et au freinage des vaisseaux spatiaux.

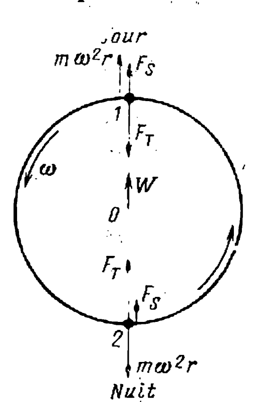


Fig. 187

PROBLÈMES

1. On pèse un corps sur une balance à ressort, à l'Equateur, à midi, lorsque les forces gravitationnelles appliquées aux corps et émanant du Soleil et de la Terre, sont opposées. Simultanément on pèse un corps identique à minuit en un point diamétralement opposé de l'Equateur où ces deux forces agissent dans le même sens. Lequel de ces corps accusera un plus grand poids à la pesée ?

Solution. Si on néglige les inhomogénéités du champ de gravitation du Soleil à proximité de la Terre, on obtient le même résultat dans les deux cas. Tenons maintenant compte des inhomogénéités du champ de gravitation du Soleil en négligeant le champ de la Lune. En deux points diamétralement opposés du globe terrestre (fig. 187) *1* (jour) et *2* (nuit) les poids du corps seront respectivement

$$P_1 = F_{\text{T}} - F_{\text{S}}(R - r) - m\omega^2 r + mw,$$

$$P_2 = F_{\text{T}} + F_{\text{S}}(R + r) - m\omega^2 r - mw,$$

où F_{T} et F_{S} sont les forces gravitationnelles émanant respectivement de la Terre et du Soleil, R est la distance entre leurs centres, r le rayon terrestre, w l'accélération du centre de la Terre due à l'attraction gravitationnelle solaire.

Il est évident que $mw = F(R)$. En faisant la différence, on trouve

$$P_2 - P_1 = [F_S(R+r) - F_S(R)] + [F_S(R-r) - F_S(R)].$$

En développant les deux différences entre crochets selon la formule de Taylor et en ne gardant que les termes quadratiques en r, on obtient

$$P_2 - P_1 = r^2 \frac{d^2 F_S}{dR^2}.$$

Transformons cette expression à l'aide des relations

$$F_S = G\frac{Mm}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} m; \quad P = mg$$

(M est la masse du Soleil, T la période de révolution de la Terre autour du Soleil, P le poids du corps). Après réarrangement on trouve

$$\frac{P_2 - P_1}{P} = \frac{24\pi^2}{gT^2}\frac{r^2}{R} = \frac{12\pi^2 r^2}{sR}.$$

Ici $s = {}^1/_2 gT^2$ est la distance qu'aurait parcouru la Terre au cours d'une année si elle se déplaçait d'un mouvement uniformément accéléré, d'accélération g. Cette distance est égale à $s \approx 5\cdot 10^{12}$ km; on trouve ensuite

$$\frac{P_2 - P_1}{P} \approx 6{,}5\cdot 10^{-12}.$$

2. Trouver la différence des poids de corps identiques en des points diamétralement opposés du globe, due à l'inhomogénéité du champ de gravitation de la Lune. Poser que les centres de la Terre, de la Lune et les deux points considérés *1* et *2* se trouvent sur une même droite (voir problème précédent).

Réponse. $\dfrac{P_2 - P_1}{P} = \dfrac{M_L}{M_T}\dfrac{24\pi^2 r^2}{RgT^2} \approx 8\cdot 10^{-10}$, où M_T et M_L sont respectivement la masse de la Terre et la masse de la Lune, R est la distance entre les centres de la Terre et de la Lune, T la période de révolution de la Lune autour de la Terre, r le rayon terrestre.

3. Un navire se dirige vers l'est en suivant le parallèle de latitude terrestre $\vartheta = 60°$. La vitesse du navire est $v = 10$ m/s. Calculer le poids P du corps à bord du navire si on utilise une balance à ressort. Le poids de ce même corps se trouvant en repos par rapport à la Terre au même point de la surface terrestre est P_0.

Réponse. $P = P_0\left[1 - \dfrac{2\omega v\cos\vartheta + v^2/R}{g}\right] \approx P_0\left(1 - 2\dfrac{\omega v}{g}\cos\vartheta\right) \approx P_0(1 - 7{,}5\cdot 10^{-5})$ (R est le rayon terrestre).

4. Un avion vole à vitesse constante en décrivant un cercle à altitude constante. Quelle sera la direction d'un fil à plomb suspendu dans le salon de l'avion? Calculer la période des petites oscillations d'un pendule simple se trouvant dans le salon de l'avion sachant que la longueur du pendule est l et que le corps de l'avion fait un angle α avec l'horizon.

Réponse. Le fil à plomb est perpendiculaire au plancher du salon de l'avion. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\alpha}{g}}$.

5. Un avion parcourt à altitude constante un cercle de rayon $R = 25$ km à une vitesse constante $v = 250$ m/s. Dans la cabine de l'avion sont installées une horloge à ressort et une horloge à pendule. Quelle durée de vol t' indiquera

l'horloge à pendule si la durée de vol indiquée par l'horloge à ressort est $t = 1$ h? On admet que les horloges sont parfaites. Ne pas tenir compte de la force de Coriolis qui est très petite.

R é p o n s e. $t' = t\left(1+\frac{v^4}{4R^2g^2}\right) = 1$ h 56 s.

§ 67. Déplacement des corps en chute libre par rapport à la ligne d'un fil à plomb

1. Soit un corps tombant en chute libre dans le champ de la pesanteur terrestre. Dans ce cas $\boldsymbol{F} = 0$ et l'équation (65.3) devient

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + 2\,[\boldsymbol{v\omega}]. \tag{67.1}$$

Cette équation décrit la *chute libre du corps, compte tenu de la rotation de la Terre.* L'influence de la rotation de la Terre se ramène à l'action exercée par les forces centrifuge et de Coriolis. La force centrifuge est automatiquement incluse comme partie intégrante dans le poids du corps $m\boldsymbol{g}$ et son existence ne modifie pas la forme de l'équation et ne fait apparaître aucun effet qualitativement nouveau; seule la direction vers le centre fait place à la direction que prend en ce lieu le fil à plomb. L'influence de la force de Coriolis sur le mouvement est plus notable. *Lorsqu'un corps tombe en chute libre sans vitesse initiale, la force de Coriolis se manifeste par une déviation de la direction de la chute libre vers l'est et vers l'équateur par rapport à la ligne du fil à plomb.* La théorie de ces effets revient à résoudre l'équation différentielle (67.1). Si le vecteur $\boldsymbol{g}$ est constant, l'équation vectorielle (67.1) est équivalente au système de trois équations différentielles linéaires de deuxième ordre à coefficients constants. Il est aisé d'obtenir la solution exacte de ce système par les méthodes connues de la théorie des équations différentielles. Mais nous n'utiliserons pas ce procédé, qui est laborieux, et surtout parce qu'il est injustifié de vouloir obtenir des solutions exactes quand on néglige dans l'équation (67.1) la variation de $\boldsymbol{g}$ en fonction des coordonnées. On ne peut négliger cette variation de $\boldsymbol{g}$ que tant que le mouvement est considéré dans un petit domaine de l'espace en tous points duquel $\boldsymbol{g}$ a une valeur sensiblement constante. Or, dans ces cas, on utilise avantageusement la *méthode approchée des approximations successives* dont la précision est amplement suffisante. Les calculs sont alors faciles et mettent mieux en relief la nature des effets, c'est pourquoi nous utiliserons ce procédé.

2. Dans l'équation (67.1) le terme $2\,[\boldsymbol{v\omega}]$ est petit par rapport à $\boldsymbol{g}$, de sorte qu'on peut le considérer comme un petit terme correctif et le négliger à l'*approximation d'ordre zéro*. On aboutit alors aux lois de la chute libre ne tenant pas compte de la rotation de la Terre:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t, \tag{67.2}$$

où $\boldsymbol{v}_0$ est la vitesse initiale du corps.

A l'approximation d'ordre zéro on peut tenir compte de la force de Coriolis. Pour cela on porte dans (67.1) la valeur de $\boldsymbol{v}$ obtenue à l'approximation d'ordre zéro, ce qui nous fournira l'accélération $\boldsymbol{a}$ en *première approximation*:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + 2\,[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}] + 2t\,[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.3}$$

L'intégration de (67.3) donne la vitesse $\boldsymbol{v}$ en première approximation:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t + 2t\,[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}] + t^2\,[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.4}$$

Utilisant ce résultat, nous corrigeons de nouveau l'expression de la force de Coriolis. En la portant dans l'équation (67.1) nous obtenons la *deuxième approximation de l'accélération* $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + 2\,[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}] + 2t\,[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}] + 4t\,[[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]\,\boldsymbol{\omega}] + 2t^2\,[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\,\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.5}$$

Après intégration par rapport à t nous obtenons la deuxième approximation de la vitesse $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t + 2t\,[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}] + t^2\,[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}] + 2t^2\,[[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]\,\boldsymbol{\omega}] + \frac{2}{3}\,t^3\,[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\,\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.6}$$

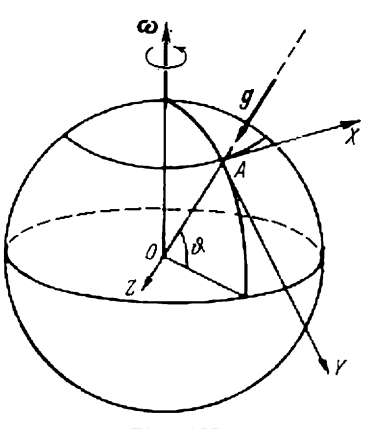


Fig. 188

On pourrait poursuivre indéfiniment ce processus des approximations successives, mais nous l'arrêterons à la deuxième approximation. En intégrant (67.6) par rapport à t nous trouvons le rayon vecteur du point matériel à tout instant en deuxième approximation:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{g}t^2 + t^2\,[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}] + \frac{t^3}{3}\,[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}] + \frac{2}{3}\,t^3\,[[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]\,\boldsymbol{\omega}] + \frac{t^4}{6}\,[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\,\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.7}$$

Dans le cas particulier où le corps entame sa chute libre sans vitesse initiale, nous trouvons pour son déplacement $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ à partir de sa position initiale l'expression suivante:

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{g}t^2 + \frac{t^3}{3}\,[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}] + \frac{t^4}{6}\,[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\,\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.8}$$

3. Afin de soumettre à discussion ce résultat, introduisons un système de coordonnées rectangulaires dont l'origine se trouve au point A d'où tombe le corps (fig. 188). Orientons l'axe X vers l'est, le long d'un parallèle, l'axe Y vers l'équateur le long du méridien et l'axe Z le long de la direction descendante du fil à plomb, donc le long du vecteur $\boldsymbol{g}$. Projetons (67.8) sur les axes de coordonnées.

Le produit vectoriel $[\boldsymbol{g\omega}]$ pointe vers l'est ; le double produit vectoriel $[[\boldsymbol{g\omega}]\,\boldsymbol{\omega}]$ est un vecteur normal à l'axe de rotation et dont l'origine se trouve sur cet axe. En passant aux projections on obtient

$$z = \frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{6} \omega^2 t^4 g \cos^2 \vartheta, \tag{67.9}$$

$$x \equiv s_{\text{est}} = \frac{1}{3} \omega t^3 g \cos \vartheta, \tag{67.10}$$

$$y \equiv s_{\text{éq}} = \frac{1}{12} \omega^2 t^4 g \sin 2\vartheta, \tag{67.11}$$

où ϑ est l'angle définissant la latitude terrestre du lieu. Dans la formule (67.9) le deuxième terme n'est qu'une petite correction à l'approximation zéro et ne modifie donc pas la nature de l'effet. On peut négliger ce terme correctif et calculer la durée de la chute libre par la formule d'approximation zéro :

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}}. \tag{67.12}$$

Il en va tout autrement dans les formules (67.10) et (67.11). Ici, dans l'approximation d'ordre zéro, $x = y = 0$. La rotation de la Terre donne naissance à deux nouveaux effets: un déplacement du corps tombant en chute libre vers l'est et vers l'équateur par rapport à la verticale du lieu (déterminée au moyen d'un fil à plomb) et non par rapport à la direction du centre de la Terre. Le déplacement oriental est donné par l'expression

$$s_{\text{est}} = \frac{2}{3} \omega t h \cos \vartheta = \frac{4\pi}{3} \frac{t}{T} h \cos \vartheta, \tag{67.13}$$

où h est la hauteur de chute et $T = 2\pi/\omega$ est la période de révolution journalière de la Terre.

Le déplacement oriental s_{est} est très petit puisque dans la formule (67.13) figure le très petit facteur t/T. Ainsi pour $h = 100$ m, $t = 4{,}5$ s et à la latitude de Moscou ($\vartheta = 56°$) on trouve $s_{\text{est}} = 1{,}2$ cm. Pour une hauteur de chute de 500 m, on aurait $s_{\text{est}} = 13{,}8$ cm. Malgré la petitesse de l'effet on a pu le déceler avec certitude dès le XIXe siècle en étudiant l'impact du corps au fond d'un profond puits de mine.

Le déplacement équatorial est lié au déplacement oriental par la relation

$$s_{\text{éq}} = \frac{\omega t \sin \vartheta}{2} s_{\text{est}}. \tag{67.14}$$

La présence du petit facteur $\omega t = \frac{2\pi t}{T}$ fait que le déplacement équatorial est tellement faible qu'on ne peut le mettre en évidence.

PROBLÈMES

1. On tire un coup de fusil suivant la verticale ascendante (donc parallèlement à la ligne du fil à plomb). La vitesse initiale de la balle est $v_0 = 100$ m/s, la latitude du lieu est $\vartheta = 60°$. En tenant compte de la rotation axiale de la Terre, calculer en approximation le déplacement oriental ou occidental du point d'impact de la balle sur le sol par rapport à la position du canon du fusil. Négliger la résistance de l'air.

R é p o n s e. La balle subira un déplacement occidental égal à

$$x_{occ} = \frac{4}{3} \frac{v_0^3 \omega}{g^2} \cos \vartheta \approx 51 \text{ cm}.$$

Ce résultat peut surprendre. Lorsqu'un corps se meut suivant une verticale ascendante, la force de Coriolis fait dévier le corps vers l'ouest par rapport à la verticale du lieu et vers l'est lorsqu'il se déplace suivant une verticale descendante. Il semble que le déplacement occidental devrait être exactement compensé par le déplacement oriental, mais cela ne se produit pas. Lorsque le corps monte, sa vitesse initiale latérale est nulle. A l'altitude maximale le corps possède cependant une composante occidentale de la vitesse qu'il acquiert sous l'action de la force de Coriolis. De ce fait il commence à tomber avec une vitesse initiale pointant vers l'ouest, et pendant sa chute, non seulement il se déplace vers l'est sous l'action de la force de Coriolis dont le sens s'est inversé, mais continue par inertie à se déplacer vers l'ouest. C'est pour cela que le déplacement occidental est plus grand que le déplacement oriental.

2. Sous quel angle α par rapport à la verticale doit-on tirer un coup de fusil pour que la balle retombe au point de tir? Utiliser les données du problème précédent.

R é p o n s e. Le canon du fusil doit pointer vers l'est sous un angle $\alpha = \frac{2}{3} \frac{v_0 \omega}{g} \cos \vartheta \approx 2{,}45 \cdot 10^{-4}$ rad $\approx 0{,}85' \approx 51''$.

3. On tire vers l'est un coup de canon à partir d'un point de latitude terrestre $\vartheta = 30°$. La vitesse initiale de l'obus est $v_0 = 500$ m/s, l'angle de tir (angle que fait la tangente au point initial de la trajectoire avec le plan de l'horizon) est $\alpha = 60°$. En négligeant la résistance de l'air mais en tenant compte de la rotation de la Terre, calculer en approximation le déplacement y du point d'impact de l'obus par rapport au plan de tir. Le déplacement aura-t-il lieu vers le nord ou vers le sud? (Le plan de tir est le plan contenant la tangente au point initial de la trajectoire et la direction d'un fil à plomb en ce même point.)

R é p o n s e. Le déplacement se fera au sud, $y = \frac{4\omega v_0^3 \sin \vartheta \cos \alpha \sin^2 \alpha}{g^2} \approx$ ≈ 71 m.

§ 68. Pendule de Foucault

1. En principe les expériences sur le déplacement oriental du corps tombant en chute libre pourraient constituer la preuve expérimentale de ce que le référentiel terrestre n'est pas inertiel et que le référentiel copernicien n'est qu'approximativement inertiel. Mais ces expériences sont difficiles à réaliser et leur précision laisse à désirer. A cette fin il est préférable d'utiliser le *pendule de Foucault*. Ce pendule constitué par une boule massive suspendue à un fil de grande longueur exécute de petites oscillations autour de sa position d'équilibre. Ecartons le pendule de sa position d'équilibre et abandonnons-le à lui-même. Si la Terre était un référentiel d'inertie,

le pendule ne serait soumis qu'à des forces « réelles »: la force de pesanteur $\boldsymbol{mg}$ et la force de tension du fil $\boldsymbol{F}$ (on néglige les forces de frottement et la résistance de l'air). Comme ces deux forces sont contenues dans un plan vertical, le pendule devrait osciller dans un même plan vertical immobile par rapport à la Terre, à moins qu'on ne lui ait donné une poussée latérale. L'expérience montre que ce n'est pas ce qui se produit et que dans le référentiel terrestre le plan des oscillations du pendule tourne lentement autour de la verticale du lieu dans le sens de la rotation diurne du Soleil et des étoiles sur la sphère céleste. Ceci démontre que le référentiel terrestre n'est pas inertiel.

Pour expliquer la rotation du plan d'oscillations du pendule on supposera que la Terre est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ par rapport à un référentiel d'inertie que nous ne connaissons pas. Dans le référentiel terrestre, aux forces « réelles » appliquées au pendule viennent s'ajouter les forces d'inertie: force centrifuge et force de Coriolis. Ainsi le mouvement du pendule sera décrit par l'équation (65.3). La force de Coriolis $2m\,[\boldsymbol{v\omega}]$ est normale au plan d'oscillations du pendule. C'est cette force qui détermine la rotation de ce plan.

2. Supposons d'abord que l'expérience a lieu à l'un des pôles de la Terre. Le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ figurant dans (65.3) sera alors dirigé suivant la verticale. Pour prédire le résultat de cette expérience il suffit de rapporter les oscillations du pendule à un référentiel d'inertie. Comme dans ce système il n'y a aucune force d'inertie, le pendule ne sera soumis qu'à la force de pesanteur $\boldsymbol{mg}$ et à la force de tension du fil $\boldsymbol{F}$. Dans le référentiel d'inertie le plan d'oscillations du pendule occupera une position immuable. La Terre tournera à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ relativement à ce plan fixe. Cela revient à dire que le plan d'oscillations du pendule tournera par rapport à la Terre à la même vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$, mais en sens inverse. Il est évident que le résultat de la prévision ne peut dépendre du mode d'étude si celui-ci est correct. On serait donc arrivé aux mêmes conclusions si dès le début on avait étudié le problème dans le référentiel terrestre en faisant appel à l'équation du mouvement relatif (65.3). Cette remarque nous aidera à comprendre le comportement du plan d'oscillations du pendule lorsqu'on le disposera en un point quelconque de la surface terrestre et non seulement aux pôles.

3. Reprenons l'expérience en un point de la surface terrestre de latitude ϑ. Décomposons le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ en deux composantes, l'une verticale $\boldsymbol{\omega}_v$ et l'autre horizontale $\boldsymbol{\omega}_h$: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_v + \boldsymbol{\omega}_h$. Décomposons encore la composante horizontale en deux composantes : $\boldsymbol{\omega}_\parallel$ et $\boldsymbol{\omega}_\perp$, la première $\boldsymbol{\omega}_\parallel$ contenue dans le plan d'oscillations du pendule et la seconde $\boldsymbol{\omega}_\perp$ orthogonale à ce plan (fig. 189). L'équation (65.3) s'écrira alors

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + 2m\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_v] + 2m\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_\perp] + 2m\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_\parallel] + \boldsymbol{F}.$$

La composante $2m\,[v\omega_\perp]$ de la force de Coriolis est dirigée le long du fil de suspension du pendule. Elle modifie légèrement la tension du fil et de ce fait elle modifie la période des oscillations du pendule. Comme cette composante n'influe pas sur la position du plan d'oscillations du pendule, on peut la négliger dans le problème concernant la rotation de ce plan. La deuxième composante de la force de Coriolis $2m\,[v\omega_v]$ est la plus importante dans notre cas. Etant perpendiculaire au plan d'oscillations du pendule, elle détermine sa rotation. La troisième composante $2m\,[v\omega_\parallel]$ est elle aussi normale à ce plan

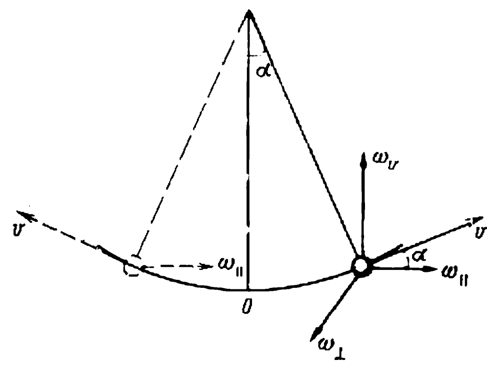


Fig. 189

et exerce également une influence sur ce plan. Mais pour de petites oscillations, l'angle α étant petit, cette composante est petite. D'ailleurs elle change périodiquement de sens pendant les oscillations du pendule. Lorsque le pendule s'écarte à droite ou à gauche du centre O, la composante $2m\,[v\omega_\parallel]$ pointe vers l'arrière du plan de la figure (cf. fig. 189). Lorsque le pendule revient de ses positions extrêmes vers le centre O, son sens s'inverse et elle pointe vers le lecteur. De ce fait la force $2m\,[v\omega_\parallel]$ donne lieu non pas à une rotation systématique du plan d'oscillations du pendule, mais à de petites oscillations de ce plan par rapport à sa position moyenne. Cette force peut également être négligée. En définitive l'équation du mouvement relatif se présente comme suit:

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + 2m\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_v] + \boldsymbol{F}. \qquad (68.1)$$

Elle ne renferme plus la composante horizontale de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ et présente la même forme qu'aux pôles. La différence réside en ce qu'à la place de la vitesse angulaire totale y figure sa composante verticale $\boldsymbol{\omega}_v$. Il s'ensuit que le pendule se comportera comme aux pôles, mais son plan d'oscillations tournera avec une vitesse angulaire plus petite

$$\omega_v = \omega \sin \vartheta. \qquad (68.2)$$

Un tour complet du plan d'oscillations s'effectue dans le temps

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega \sin \vartheta} = \frac{T}{\sin \vartheta}, \qquad (68.3)$$

où T est la période de révolution de la Terre relativement à un référentiel d'inertie.

La première expérience réelle fut réalisée par Foucault à l'observatoire de Paris en 1850 et répétée en 1851 au Panthéon. La longueur du pendule était de 67 mètres et il comportait une boule métallique de masse $m = 28$ kg. L'expérience montra que relativement à la Terre le plan d'oscillations du pendule tourne autour de la verticale du lieu conformément aux formules (68.2) et (68.3) à condition que la rotation de la Terre soit rapportée au référentiel de Copernic. Ce résultat démontre que le référentiel terrestre n'est pas inertiel mais que le référentiel copernicien l'est. Il est évident que cette dernière assertion ne peut être aussi catégorique que la première. Il faudrait mieux dire que l'expérience de Foucault ne contredit pas l'hypothèse du caractère inertiel du référentiel copernicien.

4. Etudions plus en détail la forme de la trajectoire que décrit le pendule de Foucault pendant ses oscillations relativement au référentiel terrestre. Nous avons montré ci-dessus que l'on peut négliger la composante horizontale de la vitesse angulaire ω et admettre que la Terre tourne autour de la verticale

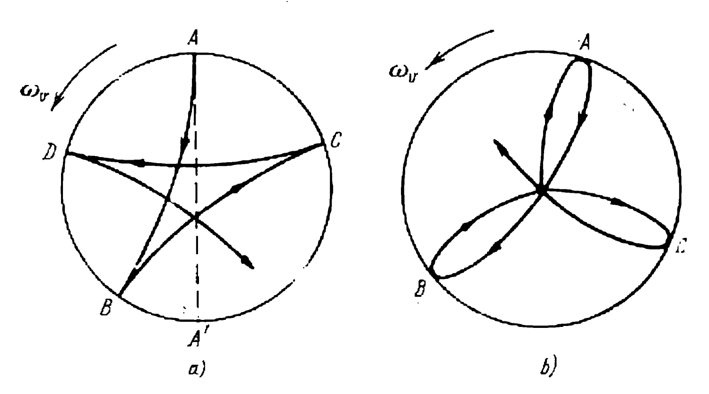


Fig. 190

à la vitesse angulaire ω_V. Cela signifie que l'on peut raisonner comme si l'expérience de Foucault était réalisée au pôle et que la Terre tournait à une vitesse angulaire plus petite ω_V. Orientons le vecteur vitesse angulaire ω_V normalement au plan de la figure vers le lecteur (fig. 190). La force de Coriolis $2m\,[v\omega_V]$ appliquée au pendule oscillant est normale à sa trajectoire et pointe à droite suivant la marche du pendule. Cette force incurve la trajectoire du pendule. Supposons d'abord que le pendule se trouve dans la position extrême A et qu'on l'abandonne à lui-même. N'était la force de Coriolis, le pendule se serait déplacé dans le point A' diamétralement opposé au point A. Sous l'action de la force de Coriolis le pendule subit une déviation et il parvient en fin de course au point B

situé à droite du point A'. Au point B la vitesse du pendule s'annule puis change de sens. La force de Coriolis change de sens elle aussi et infléchit la trajectoire encore à droite (l'observateur doit faire demi-tour pour regarder dans le sens de la marche du pendule). Le temps passant le pendule parvient successivement en de nouveaux points de retour C, D . . . On obtient ainsi une courbe compliquée avec de nombreux points anguleux, illustrée par le schéma de la figure 190, *a*.

L'allure de la trajectoire d'un pendule ayant subi une poussée au départ sera quelque peu différente. La trajectoire s'infléchira toujours vers la droite dans le sens de la marche du pendule qui parviendra aux points extrêmes A, B, C, . . . (fig. 190, *b*) avec des vitesses azimutales non nulles dues à l'action de la force de Coriolis s'exerçant sur le pendule lorsqu'il va du centre aux points extrêmes. Les points de retour ne seront pas des points angulaires mais des segments arrondis tels que représentés sur la figure 190, *b*. La rotation de la Terre étant lente, l'observateur ne remarque pas les incurvations du plan d'oscillations du pendule. Dans les deux cas il n'aperçoit qu'une rotation de ce plan autour de l'axe vertical à la vitesse angulaire $\omega_V = \omega \sin \vartheta$.

PROBLÈME

Un pendule de Foucault est installé à demeure dans la cathédrale Saint-Isaak à Léningrad. Sa longueur est $l = 98$ m et l'amplitude linéaire des oscillations de la boule (i.e. l'élongation maximale par rapport à sa position d'équilibre) est $x_0 = 5$ m. Le pendule a été abandonné à lui-même sans poussée après avoir été écarté dans sa position extrême. Calculer le déplacement latéral de la boule du pendule relativement à sa position d'équilibre à l'instant où il passe par sa position moyenne. La latitude de Léningrad est $\vartheta = 60°$.

S o l u t i o n. Le calcul se trouve simplifié si on rapporte le mouvement à un référentiel fixe (plus exactement à un référentiel tournant par rapport à la Terre autour de la verticale du lieu à la vitesse angulaire $-\omega_V$). Dans ce référentiel l'équation des petites oscillations d'un pendule simple est de la forme $\ddot{r} + \Omega^2 r = 0$, où $\Omega^2 = g/l$ et r est l'élongation du pendule. A l'instant initial le pendule tourne avec la Terre et possède une vitesse latérale $\omega_V x_0$. Plaçons l'origine des coordonnées O dans la position d'équilibre du pendule et dirigeons l'axe X le long de la droite joignant l'origine O au point ($x = x_0$, $y = 0$) où le pendule se trouvait à l'instant initial. Pour le mouvement le long de Y on a $\ddot{y} + \Omega^2 y = 0$. En résolvant cette équation pour les conditions initiales $y_{t=0} = 0$, $\dot{y}_{t=0} = \omega_V x_0$, nous trouvons

$$y = \frac{\omega_V x_0}{\Omega} \sin \Omega t.$$

En position moyenne $\Omega t = \pi/2$ et pour le déplacement latéral en cette position notre formule donne

$$y = \frac{\omega_V x_0}{\Omega} = \frac{\omega x_0}{\Omega} \sin \vartheta \approx 1 \text{ mm}.$$

On recommande au lecteur de refaire le calcul en rapportant le mouvement au référentiel terrestre.

§ 69. Les marées

1. Sur les côtes des mers et des océans on observe deux fois par jour une montée de l'eau de mer (*flux*) jusqu'à un niveau maximal (*marée haute*). Aussitôt après la mer redescend (*reflux*) jusqu'à un niveau minimal (*marée basse*). La différence de niveaux à marée haute et à marée basse est l'*amplitude de la marée*. Le temps qui s'écoule entre les positions successives de haute mer (ou de basse

mer) est égal à 12 h 25 mn. Ce temps coïncide avec la moitié du temps que met la Lune dans sa position visible pour effectuer une révolution complète autour de la Terre. C'est pour cela que depuis longtemps on attribuait la cause des flux et des reflux à la position de la Lune sur la sphère céleste. Une explication scientifique du phénomène ne fut donnée que par Newton.

Le flux et le reflux de l'eau de mer résultent de l'*inhomogénéité du champ de gravitation de la Lune et en partie de celle du champ gravitationnel du Soleil.* Si le champ gravitationnel extérieur était homogène, il aurait été exactement compensé dans le référentiel terrestre par la force d'inertie de translation créée par le mouvement accéléré du centre de masse de la Terre (où nous plaçons l'origine du trièdre de référence). En réalité ce champ n'est pas homogène et la compensation n'est exacte qu'au centre de masse de la Terre ; en tous les autres points la compensation n'est que partielle et ce sont les forces non compensées qui provoquent les marées. L'influence de la Lune est plus importante que celle du Soleil. Quoique le champ gravitationnel de la Lune soit plus faible que celui du Soleil, il est beaucoup *moins homogène* car la Lune est près de 400 fois plus proche de la Terre que le Soleil. Voyons d'abord quelles seraient les marées s'il n'y avait pas de Soleil et si la Terre n'était soumise qu'au champ de gravitation de la Lune.

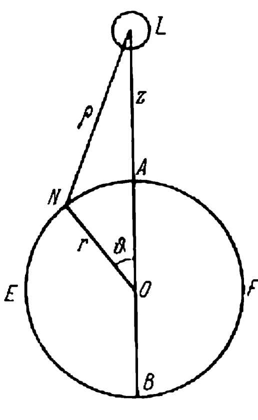


Fig. 191

2. Nous admettrons pour simplifier que la Terre est une sphère solide indéformable, recouverte d'un océan de profondeur constante. Nous supposerons aussi que la Lune se meut dans le plan équatorial de la Terre. Considérons des points de l'océan disposés le long de l'équateur. La Terre et la Lune tournent autour de leur centre de masse commun comme si elles tombaient tout le temps sur ce centre. Mais le point A (fig. 191) pour lequel la Lune est au *zénith* se trouve plus près de la Lune que le centre O de la Terre et le centre O est à son tour plus proche de la Lune que le point B diamétralement opposé au point A. Pour le point B la Lune est au *nadir*. Il s'ensuit que le champ gravitationnel de la Lune est plus fort au point A et plus faible au point B qu'au centre de la Terre. Sous l'action du champ de gravitation de la Lune les particules d'eau se trouvant en A se rapprocheront de la Lune avec une accélération plus grande que celle du centre O de la Terre et les particules d'eau en B auront une accélération plus petite qu'au centre de la Terre. A partir de là, la plupart des auteurs suivent Newton et raisonnent de façon erronée. Les conclusions relatives aux accélérations des particules d'eau sont étendues à leurs vitesses et à leurs déplacements. On affirme alors que les particules d'eau se trouvant en A se rapprocheront plus vite de la Lune que le centre de la Terre O et seront donc en avance sur ce point O. Les particules d'eau se trouvant en B retarderont sur le mouvement du centre O de la Terre. Pour cette raison on voit apparaître sur la surface de l'océan deux bosses diamétralement opposées centrées aux points A et B (fig. 192, *a*). Les centres de ces bosses se trouvent tout le temps sur la droite les reliant à la Lune, et comme la Terre tourne, ces bosses se déplacent sur la surface de l'océan en suivant le mouvement de la Lune. C'est ce qui explique que l'intervalle de temps séparant deux flux ou deux reflux successifs est égal à 12 h 25 mn. D'après cette explication, la haute mer aurait lieu lorsque la Lune se trouve au zénith ou au nadir et la basse mer lorsque la Lune serait en *quadrature*. Les observations ne confirment pas cette conclusion et en réalité la *marée est haute lorsque la Lune est en quadrature* et *la marée est basse lorsqu'elle passe par son point culminant* (fig. 192, *b*). En tout cas entre l'instant où la Lune passe par son point culminant et celui où s'observe la marée haute, il s'écoule un temps assez long, de l'ordre de plusieurs heures. Un tel écart entre théorie et observation

résulte surtout des erreurs de raisonnement que nous avons signalées. Les déplacements et les vitesses des particules d'eau dépendent non seulement des accélérations mais encore de leurs *valeurs initiales*. Le raisonnement donné plus haut aurait été exact si à un seul et même instant (que l'on pourrait considérer comme

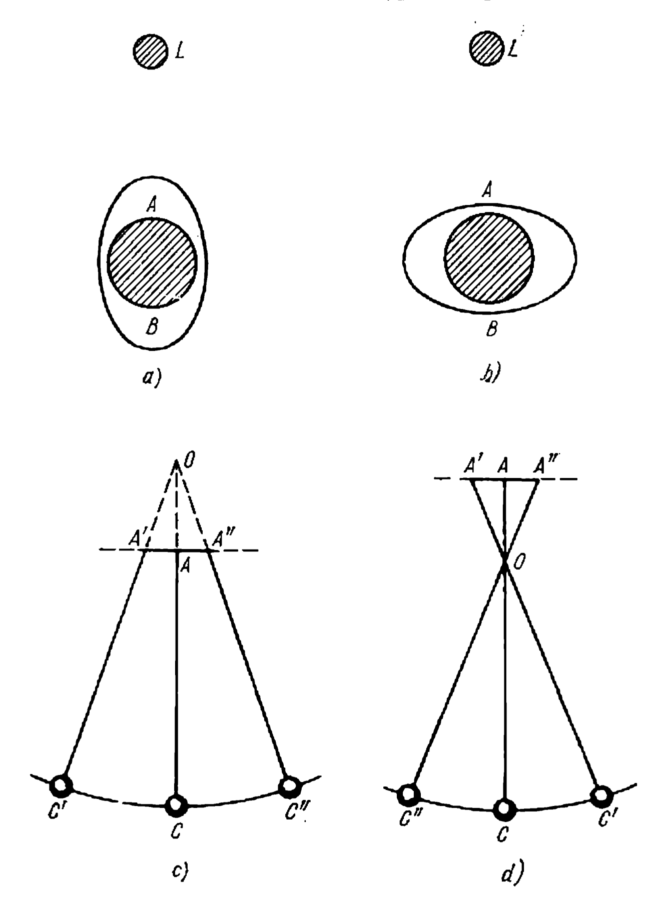


Fig. 192

l'instant initial) les particules d'eau se trouvaient toutes au repos par exemple. Mais c'est justement une condition qui ne se réalise pas sur Terre. Nous reviendrons sur cette question un peu plus loin.

3. Le problème de l'élaboration d'une théorie des marées peut être subdivisé en deux parties. La partie la plus simple consiste à définir les *forces génératrices des marées*, qui sont appliquées à l'eau des océans en différents points du globe terrestre. L'autre partie, incomparablement plus ardue, consiste à déterminer le *mouvement forcé* de l'eau provoqué par ces forces. Etudions d'abord la première partie du problème.

Dans le référentiel terrestre les forces qui agissent sur les particules d'eau sont la force de gravitation et les forces d'inertie. Les forces d'attraction ter-

restre et les forces centrifuges résultant de la rotation de la Terre autour de son centre de masse ne jouent aucun rôle dans la formation des marées. Nous désignerons leur intensité résultante par g (accélération de la chute libre). *En tout point de la surface terrestre le vecteur* g *reste constant. Il définit la forme de la surface libre des océans à l'état d'équilibre.* Cette surface est partout orthogonale au vecteur g. Ce qui importe en théorie des marées ce sont les *déviations par rapport à cette forme d'équilibre*, qui sont déterminées par les forces variables provoquant les marées. Pour calculer ces déviations on peut assimiler la forme d'équilibre de la surface des océans à une sphère. Nous ne tiendrons pas compte de la force d'inertie de Coriolis parce qu'en l'absence des forces provoquant les marées nous considérerons que l'eau est au repos. Les forces de Coriolis qui apparaissent lorsque l'eau est en mouvement du fait des flux et des reflux, sont négligeables. Ainsi on n'aura à tenir compte que des forces de gravitation extérieures de la Lune et des forces d'inertie liées au mouvement accéléré du centre de la Terre. Nous avons désigné ces forces d'inertie sous le nom de *forces d'inertie de translation* (cf. § 64).



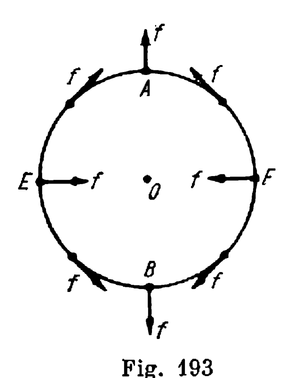


Fig. 193

4. Nous allons rapporter la force génératrice des marées à l'unité de masse à laquelle elle est appliquée et la désigner par f. Il est plus simple de calculer d'abord le potentiel φ_m correspondant à la force f, c'est-à-dire l'énergie potentielle de l'unité de masse soumise à l'action de la force f. Ce potentiel se compose du potentiel de la force gravitationnelle de la Lune (φ_L) et du potentiel des forces d'inertie de translation (φ_{in}). Les calculs correspondants étant donnés dans le problème à la fin de ce paragraphe, nous n'écrirons ici que le résultat. Le potentiel générateur des marées est donné par l'expression

$$\varphi_m = -\frac{3}{4}\frac{GM_L}{R_{TL}^3} r^2 \cos 2\vartheta. \qquad (69.1)$$

où M_L est la masse de la Lune, R_{TL} la distance entre les centres de la Terre et de la Lune, ϑ la distance à la Lune au zénith à l'instant considéré, r la distance entre le centre de la Terre et le point d'observation N (cf. fig. 191). Les quantités r et ϑ sont les coordonnées polaires du point d'observation. Pour trouver la force de marée on doit procéder à la dérivation du potentiel φ_m. Cette force comporte une composante verticale (f_v) et une composante horizontale (f_h):

$$f_v = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial r}, \quad f_h = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_m}{\partial \vartheta}. \qquad (69.2)$$

(Les sens positifs sont ceux qui correspondent à la croissance des quantités r et ϑ.) Dérivons et introduisons l'accélération de la chute libre $g = G\frac{M_T}{r^2}$:

$$f_v = \frac{3}{2}\frac{M_L}{M_T}\left(\frac{r}{R_{TL}}\right)^2 g \cos 2\vartheta, \qquad (69.3)$$

$$f_h = \frac{3}{2}\frac{M_L}{M_T}\left(\frac{r}{R_{TL}}\right)^2 g \sin 2\vartheta. \qquad (69.4)$$

La répartition des forces génératrices des marées le long de l'équateur est indiquée par des flèches sur la figure 193. La force de marée totale est

$$f = \sqrt{f_v^2 + f_h^2} = \frac{3}{2}\frac{M_L}{M_T}\left(\frac{r}{R_{TL}}\right)^3 g. \qquad (69.5)$$

En substituant $M_L/M_T = 1/81$, $r/R_{TL} = 1/60$, on trouve $f/g = 8,57 \cdot 10^{-8}$. On doit remarquer que la Lune tourne autour de la Terre sur une orbite elliptique. Au périgée elle se trouve à une distance égale à 57 rayons terrestres et à l'apogée à une distance égale à 63,7 rayons terrestres. Ceci influe sur la force génératrice des marées due à la Lune. Pour la Lune le rapport f/g varie entre $7,2 \cdot 10^{-8}$ (à l'apogée) et 10^{-7} (au périgée). Il va de soi que ces mêmes formules sont valables pour les forces de marée dues au Soleil. Dans ce cas $f/g = 3,8 \cdot 10^{-8}$, donc 2,25 fois plus petit que pour la Lune en cas de son éloignement moyen de la Terre. La grandeur de la force de marée due au Soleil varie d'environ 10 % au cours de l'année.

5. Ces résultats montrent combien les forces génératrices des marées sont petites comparées à la force de la pesanteur terrestre. Le fait que des forces aussi petites arrivent à provoquer des effets aussi grandioses que les marées tient à ce qu'elles ne sont pas constantes et *varient périodiquement dans le temps*. Si elles étaient constantes dans le temps, mais variaient d'un point à l'autre de la surface terrestre, elles n'auraient modifié que légèrement la forme de la surface libre de l'eau océanique. Mais cette force aurait été invariable dans le temps et il n'y aurait donc plus eu de marées. Les formules (69.3), (69.4) et (69.5) montrent cependant qu'en tout point du globe ne reste invariable que le module de la force de marée et non sa direction. En tout point de la surface terrestre les deux composantes f_v et f_h de la force de marée varient périodiquement avec le temps par suite des variations diurnes de la distance au zénith ϑ de la Lune. Sans nous arrêter sur le rôle des facteurs secondaires, nous poserons $\vartheta = \omega t$, ω étant la vitesse angulaire de rotation axiale de la Terre (par rapport à la droite Terre-Lune). Par suite $f_v \sim \cos 2\omega t$, $f_h \sim \sin 2\omega t$. Lorsque la force f_v atteint sa valeur maximale, la force f_h s'annule et inversement. Ces variations déterminent des variations périodiques de la direction d'un fil à plomb en tout point de la surface terrestre avec pour résultat l'apparition de flux et de reflux.

6. Il nous reste à traiter la deuxième partie du problème : déterminer l'action qu'exercent les forces génératrices des marées sur l'eau océanique. La première théorie des marées, la théorie dite *statique*, a été élaborée par Newton. Cette théorie permettait de déterminer la forme instantanée de la surface libre de l'océan, comme si les forces génératrices des marées étaient invariables dans le temps. Selon les lois de l'hydrostatique, la surface libre d'un liquide à l'état d'équilibre est en tout point orthogonale aux forces (constantes) auxquelles elle est soumise. Il s'ensuit que le potentiel φ de toutes les forces appliquées ne doit pas varier le long de la surface libre d'un liquide. Il est évident que $\varphi = \varphi_0 + \varphi_m$, φ_0 étant le potentiel de toutes les forces déterminant l'accélération g de la chute libre en l'absence des forces génératrices des marées. Ainsi, selon la théorie statique des marées, l'équation de la surface libre de l'eau océanique doit être de la forme $\varphi_0 + \varphi_m = \text{const}$ ou sous forme développée:

$$\varphi_0 - \frac{3}{4} \frac{GM_L}{R_{TL}^3} r^2 \cos 2\vartheta = \text{const}. \tag{69.6}$$

Appliquons cette équation aux points A et E de la surface de l'océan (cf. fig. 193). En posant d'abord $\vartheta = 0$, puis $\vartheta = \pi/2$, nous obtenons

$$\varphi_0 (A) - \frac{3}{4} \frac{GM_L}{R_{TL}^3} r_A^2 = \varphi_0 (E) + \frac{3}{4} \frac{GM_L}{R_{TL}^3} r_E^2.$$

Or $\varphi_0 (A) - \varphi_0 (E) = gH$, où $H = r_A - r_E$ est l'amplitude de la marée. En omettant les indices A et E auprès des autres termes, on pose $r_A = r_E = r$. En remarquant encore que $g = G \frac{M_T}{r^2}$ et en utilisant la formule (69.5), nous obtenons

$$H = \frac{f}{g} r. \tag{69.7}$$

En mettant en œuvre cette formule on trouve pour l'amplitude des marées lunaires $H = 0{,}55$ m et pour l'amplitude des marées solaires $H = 0{,}24$ m. Ainsi, d'après cette théorie, la configuration des marées doit correspondre à la figure 192, *a* et non à la figure 192, *b*. C'est l'inconvénient majeur de la théorie statique.

7. Une théorie correcte et complète des marées doit être une théorie *dynamique*. On doit calculer le *mouvement forcé* des eaux océaniques sous l'action de forces variables génératrices de marées. La question de principe que la théorie doit prendre en considération consiste en ce que les eaux océaniques constituent un système mécanique caractérisé, à l'instar du pendule, par les *fréquences propres des oscillations libres*. Pour bien éclaircir le fond de la question, imaginons avec Airy que l'on creuse le long de l'équateur terrestre un canal de profondeur constante qui, rempli d'eau, fait le tour de la Terre. Si une perturbation apparaît en un point quelconque du canal, elle se propagera le long du canal à une vitesse bien déterminée. Négligeons les forces de frottement agissant dans les liquides. On démontre en hydrodynamique que la vitesse de propagation des perturbations de grandes longueurs d'onde (on entend que les longueurs d'onde sont grandes relativement à la profondeur h du canal) est donnée par la formule $u = \sqrt{gh}$. Prenons pour h la profondeur moyenne de l'océan ($h = 3{,}5$ km). On calcule alors sans peine que la perturbation fera le tour de la Terre en 60 heures. Lorsqu'il s'agit des marées, le temps en cause est deux fois plus petit. Mais dans ce cas, la perturbation est constituée par deux bosses identiques A et B se trouvant aux extrémités d'un diamètre de la Terre (cf. fig. 192, *a*, *b*). Au bout de 30 heures la bosse A viendra occuper la position B et la bosse B la position A, ce qui restaure la forme initiale de la surface de l'eau dans le canal. Cela signifie que l'eau du canal a pour *période propre d'oscillations* $T_0 = 30$ h. Cette période est plus grande que la période d'oscillations des forces génératrices des marées $T = 12$ h 25 mn. D'après la théorie élémentaire des oscillations, dans le cas considéré, où on néglige les forces de frottement, *la force extérieure et les oscillations forcées qu'elle a excitées sont en opposition de phases*. Par contre pour $T_0 < T$ les oscillations sont *en phase*. Ainsi si on met en état d'oscillation le point A de la suspension d'un pendule simple, la boule C se met à osciller (cf. fig. 192, *d* et *e*). Si la fréquence des oscillations du point A est petite, ce point ainsi que la boule C se déplaceront à chaque instant dans le même sens, mais si la fréquence est grande, les mouvements du point A et de la boule C s'effectueront en sens opposés. Comme dans le cas étudié $T_0 > T$, la configuration des marées doit être celle de la figure 192, *b* et non pas celle de la figure 192, *a*. La théorie statique des marées aurait été qualitativement correcte si on avait $T_0 < T$. Mais pour cela il aurait fallu que la profondeur h fût supérieure à ~ 20 km.

8. Les flux solaires se superposent aux flux lunaires et s'ils se renforcent mutuellement les marées sont particulièrement fortes. C'est ce que l'on observe lorsque le Soleil, la Lune et la Terre se trouvent sur une même droite, donc au moment de la nouvelle et de la pleine lune. Les marées que l'on observe alors sont appelées *grandes marées* (*syzygie*). Par contre, lorsque la Lune est à son premier ou à son dernier quart, le flux lunaire est affaibli par le flux solaire, la marée résultante est alors *petite* (ou *de quadrature*).

On n'a pas encore réussi à établir une théorie complète des marées pouvant répondre à tous les besoins de la pratique. Cela ne doit pas nous étonner puisque l'allure des marées est largement affectée par le relief du fond marin et océanique, par les continents et les îles, par la forme des côtes, par les courants et les vents, par les déformations que subit la Terre elle-même sous l'action des forces génératrices des marées, ainsi que par de nombreux autres facteurs qu'il est difficile de définir.

A proximité des îles océaniques l'amplitude de la marée de la nouvelle ou de la pleine lune est généralement de 1 m environ, ce qui correspond aux prévisions de la théorie statique. Près des côtes océaniques l'amplitude atteint ~ 2 m.

Une amplitude de trois mètres ne s'observe qu'en un nombre limité de lieux et une amplitude de six mètres est très rare. Les fortes amplitudes se rencontrent dans des détroits étroits ou dans les profondeurs des golfes s'enfonçant loin dans les terres. Les amplitudes les plus fortes sont enregistrées dans la baie de Fundy sur la côte orientale du Canada. Cette baie se trouve entre le continent et la presqu'île de la Nouvelle-Ecosse. A l'entrée de la baie l'amplitude est de 4 m et atteint 12 à 16 m au fond de la baie. Pendant les syzygies l'amplitude atteint une vingtaine de mètres.

PROBLÈME

Déduire les formules (69.1), (69.3), (69.4).

Solution. Nous avons montré que $\varphi_m = \varphi_L + \varphi_{in}$. Dirigeons l'axe Z vers la Lune (cf. fig. 191). Soit w l'accélération avec laquelle le centre O de la Terre s'approche du centre de masse Terre-Lune. La force d'inertie correspondante est alors $-mw = -w$. En supposant qu'elle est homogène on a $\varphi_{in} = -wz = wr\cos\vartheta$. Le potentiel de la force d'attraction de la Lune est

$$\varphi_L = -G\frac{M_L}{\rho}.$$

La figure 191 montre que $\rho^2 = R_{TL}^2 - 2R_{TL}\, r\cos\vartheta + r^2$. En appliquant la formule du binôme de Newton et en négligeant les termes en r à la puissance trois et plus grande que trois, on obtient

$$\varphi_L = -\frac{GM_L}{R_{TL}}\left(1 - \frac{2R_{TL}r\cos\vartheta - r^2}{R_{TL}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{GM_L}{R_{TL}}\left[1 + \frac{2R_{TL}r\cos\vartheta - r^2}{2R_{TL}^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{2r\cos\vartheta}{R_{TL}}\right)^2\right].$$

Le terme constant $-G\frac{M_L}{R_{TL}}$, comme toute autre quantité constante figurant dans l'expression du potentiel, peut être rejeté. Le terme linéaire en r est compensé par φ_{in} puisque $w = G\frac{M_L}{R_{TL}^2}$. Dans la formule donnant φ_L on peut encore rejeter tous les termes en r qui ne dépendent pas de l'angle ϑ car ils apportent une correction radiale à la force active, qui est la même en tous les points de la surface terrestre. On peut inclure cette correction dans la valeur de g, car elle n'a aucun rapport avec la formation des marées. On arrive ainsi au résultat suivant:

$$\varphi_m = -\frac{3}{4}\frac{r^2}{R_{TL}}w\cos 2v = -\frac{3}{4}\frac{GM_L}{R_{TL}^3}r^2\cos 2\vartheta.$$

§ 70. Masse grave et loi de Galilée généralisée

1. Nous avons introduit le concept de masse en faisant appel à la loi de conservation de l'impulsion. Comme à la base de ce concept on trouve la *propriété d'inertie* des corps, la masse ainsi définie est souvent désignée sous le nom de *masse d'inertie* que l'on dénote par $m^{(i)}$. Or *les corps se caractérisent non seulement par leur propriété d'inertie, mais encore par celle d'exciter dans l'espace environnant des*

champs de gravitation. Sous ce rapport ils se comportent comme des corps portant des charges électriques qui créent autour d'eux des champs électriques. L'inertie et l'aptitude des corps à créer des champs de gravitation dans l'espace environnant ne doivent pas être considérées à priori comme des propriétés liées et encore moins comme des propriétés identiques. On pourrait supposer que l'aptitude des corps à créer autour d'eux des champs gravitationnels résulte non pas de ce qu'ils possèdent des masses d'inertie, mais du fait qu'ils sont porteurs de charges spéciales analogues aux charges électriques et appelées *charges gravitationnelles* ou *masses graves.* L'expérience montre que *les forces d'interaction des masses graves sont inversement proportionnelles au carré de leur distance de séparation.* La détermination quantitative des masses graves s'effectue selon un procédé semblable à celui utilisé en électrostatique pour la mesure des charges électriques. Désignons par $m_1^{(g)}$ et $m_2^{(g)}$ les masses graves des corps ponctuels en interaction mutuelle. La force de leur attraction gravitationnelle s'exprimera alors par

$$F = C\frac{m_1^{(g)}m_2^{(g)}}{r^2}, \tag{70.1}$$

où C est un coefficient numérique dont la valeur ne dépend que du choix des unités de mesure. On peut assigner à ce coefficient une dimension et une valeur numérique arbitraires. Les unités de mesure de r et de F une fois fixées, nous allons déterminer la dimension et l'unité de mesure de la masse grave; la formule (70.1) définira le principe de la mesure des masses graves.

Le fait que la force d'interaction gravitationnelle des corps soit proportionnelle à leurs masses graves ne constitue pas une loi de la Physique. Le mode d'introduction du concept de masse grave est tel que c'est *par définition* que cette proportionnalité doit avoir lieu. *La loi de la Physique établie par Newton affirme que la force d'interaction gravitationnelle des corps est proportionnelle à leurs masses d'inertie.* Il s'ensuit que la *masse d'inertie d'un corps est proportionnelle à sa masse grave.* On peut choisir pour ces masses des unités telles qu'elles soient non seulement proportionnelles, mais encore numériquement égales l'une à l'autre. C'est pour cela que cette loi fondamentale s'appelle *loi de l'équivalence des masses grave et d'inertie.* Voyons quelles sont ses bases expérimentales et les conséquences physiques.

2. Considérons d'abord la chute libre des corps dans le champ de la gravitation terrestre. D'après la deuxième loi de Newton $m^{(i)}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}$ étant la force de pesanteur. On doit entendre par $m^{(i)}$ la masse d'inertie du corps. La force de pesanteur est $\boldsymbol{F} = m^{(g)}\boldsymbol{g}$, où $m^{(g)}$ est la masse grave de ce même corps. Remarquons qu'ici nous rapportons le mouvement du corps à un référentiel d'inertie et que par suite nous ne pouvons introduire aucune force d'inertie. Dans

le sens newtonien toutes les forces sont « réelles » et dans notre cas particulier la force de pesanteur $\boldsymbol{F}$ n'est que la force d'attraction gravitationnelle s'exerçant entre la Terre et le corps considéré (la force centrifuge n'y est pas incluse). D'après la deuxième loi de Newton $m^{(i)}\boldsymbol{a} = m^{(g)}\boldsymbol{g}$, d'où

$$\boldsymbol{a}=\frac{m^{(g)}}{m^{(i)}}\,\boldsymbol{g}. \tag{70.2}$$

Comme la masse d'inertie est égale à la masse grave, on a $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$, ce qui implique que dans le champ de la pesanteur terrestre tous les corps tombent avec la même accélération. Ce fait expérimental mis en évidence par Galilée confirme la loi de l'égalité de la masse d'inertie et de la masse grave. Cette loi est vérifiée quel que soit le champ de gravitation considéré. *Dans un seul et même champ gravitationnel tous les corps tombant en chute libre acquièrent la même accélération.* Cette proposition connue sous le nom de loi de Galilée généralisée a été utilisée à partir du § 65. Nous voyons que *par sa signification la loi de Galilée généralisée est parfaitement équivalente au principe de l'égalité des masses grave et d'inertie.*

Les expériences de Galilée étaient peu précises. Newton et plus tard Bessel (1784-1846), dans leurs expériences sur les oscillations du pendule, ont obtenu des données beaucoup plus précises. Nous avons établi pour la période des petites oscillations du pendule simple la formule

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{70.3}$$

Si les masses grave et d'inertie n'étaient pas égales, on aurait dû remplacer dans cette formule la quantité g par l'accélération a définie par (70.2) et on aurait obtenu

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\,\frac{m^{(i)}}{m^{(g)}}}. \tag{70.4}$$

La formule (70.4) ne s'identifie à la formule (70.3) que si $m^{(i)} = m^{(g)}$. Newton et Bessel ont établi que la période des oscillations du pendule simple ne dépend pas des matériaux avec lesquels il était réalisé. Ce résultat confirme que la masse grave est égale à la masse d'inertie. La précision relative des expériences de Bessel était de 1/60 000.

3. Pendant longtemps le record de précision des mesures fut détenu par le physicien hongrois Eötvös (1848-1919) dont les expériences commencées en 1887 durèrent jusqu'à sa mort. L'égalité de la masse grave à la masse d'inertie y fut établie à $5\cdot10^{-9}$ près. Cette précision relative est près de 100 000 fois meilleure que dans les expériences de Newton et près de 10 000 fois meilleure que dans celles de Bessel. L'idée des expériences de Eötvös était la suivante. Le poids d'un corps est formé par l'addition de deux forces diffé-

rentes: la force d'attraction gravitationnelle terrestre et la force d'inertie centrifuge. La première force est proportionnelle à la masse grave, la deuxième est égale à $m^{(i)}\omega^2 r_\perp$, i.e. proportionnelle à la masse d'inertie $m^{(i)}$. Si ces masses n'étaient pas rigoureusement proportionnelles l'une à l'autre, la direction d'un fil à plomb aurait dépendu de la nature du corps. Les expériences de Eötvös avaient pour objectif de déceler l'existence de cet effet et à la précision indiquée elles ont conduit à un résultat négatif, ce qui démontra la validité de la loi de l'égalité des deux masses. Pour arriver à une telle

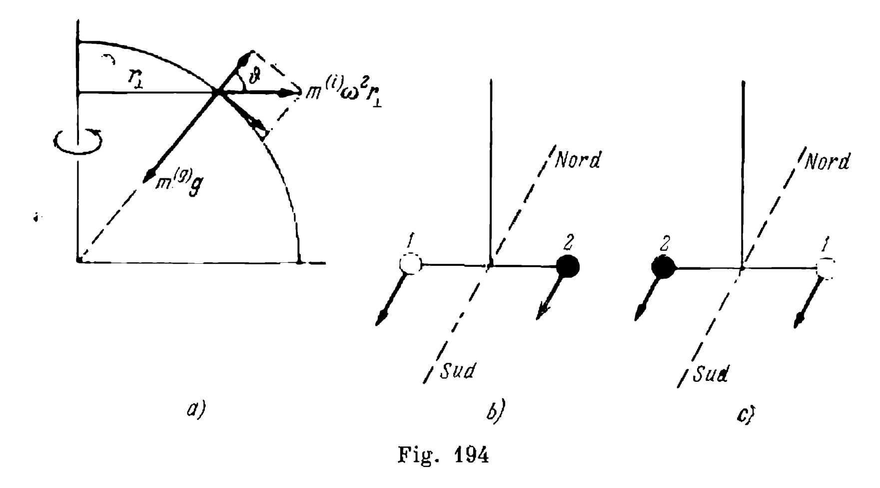


Fig. 194

précision il fallait évaluer les variations de la direction d'un fil à plomb de $1{,}5\cdot10^{-6}$ seconde d'arc. Sous un tel angle un observateur terrestre verrait un objet de 3 mm de longueur se trouvant sur la surface de la Lune. Cette précision fut obtenue grâce à l'utilisation de la *balance de torsion* et du *variomètre gravimétrique*. Bien que les expériences décisives aient été réalisées avec des variomètres gravimétriques, nous allons donner une description schématique des expériences fondées sur l'utilisation de la balance de torsion, car l'interprétation en est plus simple.

On attache à un fil fin et long une tige aux extrémités de laquelle on peut suspendre des poids *1* et *2* (fig. 194, *b*) faits en des matériaux différents, le platine et le cuivre par exemple. La tige est ajustée à angle droit par rapport au méridien du lieu. Désignons par $\boldsymbol{g}$ l'intensité du champ de la gravitation terrestre qui est la force exercée par le champ sur l'unité de masse grave. Chacun des poids se trouve soumis à deux forces: la force gravitationnelle $m^{(g)}\boldsymbol{g}$ et la force centrifuge $m^{(i)}\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$. Cette dernière possède une composante verticale $m^{(i)}\omega^2 r_\perp \cos\vartheta$ (fig. 194, *a*), ϑ étant la latitude géographique du lieu. Dans le cas où la tige est un levier à bras égaux, l'une des conditions

d'équilibre des poids est

$$m_1^{(g)} g - m_1^{(i)} \omega^2 r_\perp \cos \vartheta = m_2^{(g)} g - m_2^{(i)} \omega^2 r_\perp \cos \vartheta,$$

soit

$$m_1^{(i)} (\alpha_1 g - \omega^2 r_\perp \cos \vartheta) = m_2^{(i)} (\alpha_2 g - \omega^2 r_\perp \cos \vartheta),$$

où α_1 et α_2 sont respectivement les rapports des masses graves aux masses d'inertie pour les poids *1* et *2*. Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ on aurait $m_1^{(i)} \neq \neq m_2^{(i)}$. Dans ce cas les forces centrifuges appliquées aux poids et donc leurs composantes horizontales (fig. 194, *b* et *c*) pointant vers le sud seraient différentes, ce qui ferait apparaître un couple

$$M_1 = (m_1^{(i)} - m_2^{(i)}) \frac{l}{2} \omega^2 r_\perp \sin \vartheta,$$

qui aurait tordu le fil (l est la longueur de la tige). A l'état d'équilibre l'angle de torsion $\varphi_1 = (1/f) M_1$, où f est le module de torsion. Si on fait tourner de 180° tout le dispositif, ce qui le fait passer de la position *b* à la position *c* (cf. fig. 194), le couple de torsion et l'angle de torsion changent de signe ($M_2 = -M_1$, $\varphi_2 = -\varphi_1$). L'angle de torsion du fil devient alors égal à $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -(2/f) M_1$. Les résultats de ces expériences furent négatifs, c'est-à-dire $\varphi = 0$, quels qu'aient été les matériaux utilisés pour fabriquer les poids *1* et *2*. Il en résulte que $\alpha_1 = \alpha_2$, ce qui démontre la loi de l'égalité de la masse grave et de la masse inerte.

4. *Une des principales conséquences de la théorie de la relativité est l'existence d'une corrélation entre la masse et l'énergie* $E = mc^2$, où m représente la masse d'inertie. Toute énergie possède donc une masse d'inertie. La loi de l'équivalence de la masse grave et de la masse d'inertie permet d'étendre cette assertion à la masse grave. *Toute énergie possède aussi une masse grave.* La haute précision des expériences de Eötvös a permis de vérifier cette dernière proposition. Southerns reprit les expériences de Eötvös avec des substances radioactives, mais le résultat fut le même : on n'arriva à déceler aucune différence entre la masse grave et la masse d'inertie. Etant donné que lors des transformations radioactives l énergie et la masse d'inertie diminuent, il en résulte que la masse grave diminue en proportion. Ainsi l'égalité des deux masses est toujours vérifiée.

5. Sous une version améliorée, les expériences de Eötvös ont été reprises par le physicien américain R. Dicke dans les années 1961-1964. Il réussit à accroître de plus de 100 fois la précision des mesures de Eötvös. Il comparait des poids en cuivre et en plomb, en or et en aluminium. A $3 \cdot 10^{-11}$ près il constata l'égalité des coefficients de proportionnalité entre la masse grave et la masse inerte de ces substances.

Le principe des expériences de Dicke est plus simple que celui du dispositif de Eötvös. Ce dernier cherchait à déceler des effets dus à l'action conjointe de l'attraction terrestre et des forces d'inertie

résultant de la rotation de la Terre. Dans les expériences de Dicke le Soleil remplaça la Terre. Les poids à comparer *1* et *2* étaient toujours fixés aux extrémités d'un fléau rectiligne suspendu à un fil fin (fig. 195, *a*). Pour réduire au maximum toutes les perturbations l'équipage était placé dans un récipient où régnait un vide poussé, puis l'ensemble était disposé dans un puits de mine éloigné de tout bâtiment. Le puits était ensuite obturé et le dispositif était télécommandé à partir d'un poste de commande pendant plusieurs mois de suite.

Dans les expériences de Dicke ni la force gravitationnelle de la Terre ni la force centrifuge résultant de la rotation axiale de la Terre ne jouent un rôle et on peut les négliger, car en un point donné du globe elles sont invariables et ne déterminent que la position d'équilibre que cherche à atteindre le fléau. Les forces qui importent sont la force d'attraction gravitationnelle du Soleil et la force d'inertie de translation assurant le mouvement accéléré du centre de la Terre en direction du Soleil (on peut négliger l'effet correspondant dû à la Lune). Désignons cette accélération par $\boldsymbol{a}$. Par définition même de la masse grave, la force d'attraction gravitationnelle émanant du Soleil et rapportée à l'unité de masse grave est la même pour tous les corps. Cette force est l'intensité du champ gravitationnel du Soleil, qui ne dépend que de ce dernier ; nous la désignerons par $\boldsymbol{g}$. Si la loi de l'équivalence de la masse grave et de la masse d'inertie était en défaut, la force d'attraction gravitationnelle émanant du Soleil et rapportée à l'unité de masse d'inertie aurait été différente pour différents corps. Dans ce cas l'appareil de mesure aurait été le siège d'un couple qui aurait tordu le fil de suspension du fléau de la balance de torsion. En désignant par h_1 et h_2 les bras du fléau suspendu par son centre de masse C (fig. 195, *a*) le couple moteur rapporté à C sera

$$M = (m_1^{(g)}g - m_1^{(i)}a)\,h_1 + (m_2^{(i)}a - m_2^{(g)}g)\,h_2.$$

Par définition du centre de masse (on devrait préciser en disant centre des masses d'inertie) on a $m_1^{(i)}h_1 = m_2^{(i)}h_2$. En utilisant les notations α_1 et α_2 définies plus haut, on obtient

$$M = m_1^{(i)}h_1 g\alpha_1 - m_2^{(i)}h_2 g\alpha_2 = m_1^{(i)}h_1 g\,(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Du fait du mouvement du Soleil sur la sphère céleste, qui est bien visible, les bras du fléau varient périodiquement. Par suite le couple M doit lui aussi varier périodiquement, la période étant égale à un jour, avec pour résultat l'apparition d'oscillations forcées du fléau de même période qui pourraient être décelées à l'aide d'un appareillage sensible. En présence des perturbations fortuites inévitables auxquelles était soumis l'appareil, on n'a pas réussi à déceler ces oscillations. On en a conclu qu'à la précision des mesures près $\alpha_1 = \alpha_2$, ce qui implique que la loi de l'équivalence des deux masses est vérifiée.

6. L'expérience de Dicke fut reprise en 1971 par V. Braguinski et V. Panov qui remplacèrent le fléau unique par un pendule à torsion qui était équivalent à quatre fléaux combinés comme indiqué sur la figure 195, *b*. La précision des mesures s'est accrue de 30 fois. On comparait l'aluminium et le platine. L'égalité des coefficients de proportionnalité entre la masse grave et la masse d'inertie fut

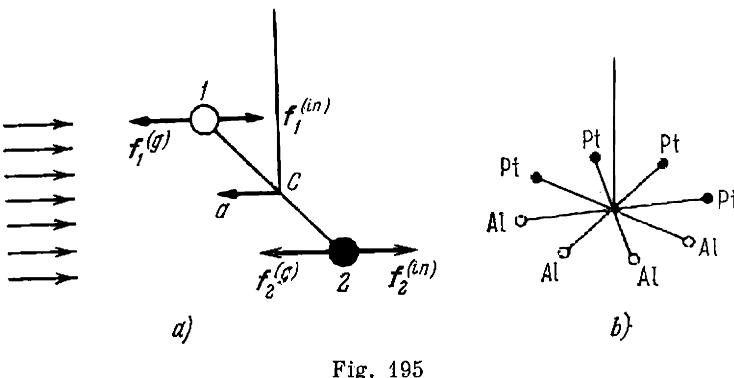


Fig. 195

confirmée avec une précision relative de 10^{-12}. C'est la précision que l'on peut atteindre en effectuant la pesée d'un navire d'un tonnage de 10 000 tonnes à 0,01 g près.

7. La Physique prérelativiste n'attachait pas beaucoup d'importance au problème de l'égalité de la masse grave et de la masse d'inertie des corps et estimait que c'était là une coïncidence fortuite. L'importance primordiale de l'équivalence des deux masses fut bien comprise par Einstein. Ce fut pour lui le fondement de la *théorie de la relativité générale*, appelée encore *théorie relativiste de la gravitation*. La loi de l'équivalence des masses grave et d'inertie est le principal fait expérimental de cette théorie. La théorie de la relativité générale aurait été en défaut si on avait décelé le moindre écart à l'équivalence de ces deux masses. C'est pour cela que tout accroissement de la précision des mesures, déjà exceptionnelle, présente une importance de principe et ne constitue nullement une simple course vers un record mondial de la précision.

§ 71. Principe d'équivalence des forces de gravitation et des forces d'inertie

1. Nous avons signalé à maintes reprises que dans un champ gravitationnel donné tous les corps acquièrent la même accélération, quelles qu'en soient les masses et la composition chimique. Aussi dans un champ donné tous les corps se meuvent de façon identique si les conditions initiales sont les mêmes. Les corps en mouvement libre

se comportent de même si leurs mouvements sont rapportés à un système non inertiel. Cela signifie que cette propriété est également inhérente aux forces d'inertie. Cette analogie entre les forces de gravitation et les forces d'inertie constitue le point de départ de la théorie de la relativité générale ou théorie relativiste de la gravitation d'Einstein.

Voyons, comme l'a fait Einstein, ce qui se passe dans un ascenseur en marche. Supposons d'abord que l'ascenseur est immobile suspendu à son câble ou en mouvement uniforme par rapport à la Terre. Tous les corps se trouvant dans l'ascenseur sont soumis à l'action du champ de la gravitation terrestre. Le passager sent son propre poids, exerce une pression sur le plancher de l'ascenseur qui exerce sur lui une contre-pression égale et opposée. Un poids suspendu à un ressort l'allonge par la force de sa pesanteur. Tous les corps abandonnés à eux-mêmes tombent avec la même accélération g par rapport à l'ascenseur. On pourrait multiplier les exemples.

Imaginons maintenant un ascenseur tellement éloigné de la Terre et de tout autre corps céleste que ces corps n'exercent sur lui pratiquement aucune action gravitationnelle. Supposons que quelqu'un tire le câble de l'ascenseur et communique à ce dernier une accélération $a = -g$. Dans l'ascenseur, il n'y a pas de champ de gravitation, mais s'y manifeste la force d'inertie $-ma = mg$. Sous l'action de cette force d'inertie tous les corps se trouvant dans l'ascenseur et abandonnés à eux-mêmes « tomberont » avec la même accélération g que dans le premier cas. Un poids attaché à un ressort lui communique le même allongement que s'il avait un poids égal à mg. Le passager exercera sur le plancher la même pression, etc. Autrement dit, *tous les effets mécaniques et tous les mouvements se manifestant dans l'ascenseur seront exactement les mêmes que dans un ascenseur immobile mais suspendu dans un champ de gravitation*. Einstein a étendu cette assertion non seulement aux effets mécaniques mais à tous les *phénomènes physiques*, comme il l'avait déjà fait avec le principe de la relativité de Galilée. Une telle hypothèse reposait sur des bases solides. *Il n'existe pas dans la Nature de phénomènes purement mécaniques.* A la base de tout effet mécanique on trouve une multitude d'autres effets classés dans différentes sections de la Physique. Ainsi le choc des billes de billard est présenté comme un exemple typique d'effet mécanique. Or l'existence même des billes ainsi que leur structure interne sont régies par des *lois quantiques*, tandis que les forces élastiques qui apparaissent lors du choc se ramènent aux forces d'*interaction électrostatique* des particules chargées constituant les corps.

Ainsi, *dans un ascenseur en mouvement uniformément accéléré, tous les phénomènes physiques évolueront exactement de la même manière que dans un ascenseur immobile suspendu dans un champ de pesanteur uniforme.* Or la physique prérelativiste considérait les

deux cas cités comme étant essentiellement différents. Dans le premier cas les effets observés étaient interprétés comme résultant de l'action du champ de gravitation et dans le second ces mêmes effets étaient attribués à l'action des forces d'inertie. Dans le premier cas l'ascenseur constitue un référentiel d'inertie où règne un champ de gravitation uniforme. Dans le second cas il n'y a pas de champ de gravitation, mais il y a des forces d'inertie, puisque l'ascenseur est un système non inertiel.

Si l'ascenseur monte ou descend avec une accélération $\boldsymbol{a}$ dans un champ de gravitation uniforme, tout corps se trouvant dans l'ascenseur est soumis à la force de pesanteur $m\boldsymbol{g}$ et à la force d'inertie $-m\boldsymbol{a}$. La force résultante $m\,(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a})$ est composée de ces deux forces composantes dont la nature physique est différente. Or tout se passe comme si à l'intérieur de l'ascenseur régnait un champ de gravitation uniforme d'intensité $\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$. Dans le cas particulier d'un ascenseur en chute libre $\boldsymbol{g}' = 0$, ce qui correspond à un « état d'apesanteur ». Supposons que le passager ne peut expérimenter qu'avec les corps qui se trouvent dans l'ascenseur sans pouvoir observer ce qui se passe à l'extérieur. Il remarquera que tous les corps abandonnés à eux-mêmes tombent avec la même accélération ; ne disposant que de cette donnée, il ne pourra décider de l'origine de cette accélération: champ de gravitation uniforme, mouvement de translation accéléré de l'ascenseur ou enfin combinaison de ces deux causes. Aucune expérience sur la chute libre des corps dans l'ascenseur ne permettra de dissocier l'effet dû au champ de gravitation uniforme et celui dû au champ de forces d'inertie uniforme. Einstein supposa qu'aucune expérience physique ne permettra d'en faire la distinction et érigea cette hypothèse en postulat connu comme le *principe d'équivalence des forces gravitationnelles et des forces d'inertie.*

Selon ce principe *tous les phénomènes physiques évoluent exactement de la même manière dans un champ gravitationnel et dans un champ de forces d'inertie à condition que leurs intensités soient les mêmes dans des points correspondants de l'espace et que les conditions initiales soient identiques pour tous les corps d'un système fermé.*

2. *Le principe d'équivalence n'affirme nullement que n'importe quel champ de gravitation pourrait être simulé par des forces d'inertie, c'est-à-dire être reproduit par un mouvement convenablement accéléré du référentiel. Il n'affirme pas non plus que n'importe quelles forces d'inertie pourraient être remplacées dans tout l'espace par des forces gravitationnelles. D'une façon générale, ces deux assertions ne sont vérifiées que pour les champs homogènes, i.e. les champs dont l'intensité est la même en tout point de l'espace.* Pour préciser ces considérations, reprenons l'exemple de l'ascenseur. Supposons qu'il reste suspendu et immobile dans le champ de pesanteur terrestre. Disposant d'un gravimètre précis, le passager notera qu'en différents points de l'ascenseur les directions du fil à plomb ne sont pas rigou-

reusement parallèles et qu'elles se recoupent toutes approximativement au centre de la Terre. Il constatera aussi que le champ de gravitation terrestre croît dans le sens du centre de la Terre. Bref le passager d'un ascenseur immobilisé pourra constater que le champ de gravitation terrestre *n'est pas homogène*. Par contre le champ de forces d'inertie apparaissant lorsque l'ascenseur est animé d'un mouvement de translation accéléré est, lui, *homogène*. Ce champ ne peut donc se substituer en tout point de l'ascenseur au champ newtonien terrestre qui est inhomogène. On peut créer dans la cabine de l'ascenseur un champ de forces d'inertie inhomogène en le mettant en rotation. Mais ce champ croîtrait à mesure qu'on s'éloignerait de l'axe de rotation ; il se comporterait donc tout autrement que le champ terrestre. Le champ de gravitation newtonien d'une masse ponctuelle décroît en raison inverse du carré de la distance à cette masse. Le champ de forces centrifuges $\omega^2 r_\perp$ croît proportionnellement à la distance jusqu'à l'axe de rotation. Il est évident qu'un *champ de gravitation newtonien ne peut être simulé par aucune rotation du référentiel.*

Cependant, dans des régions limitées de l'espace où le champ de gravitation peut être considéré comme pratiquement homogène, ce champ peut être simulé par un mouvement accéléré du référentiel. Lorsqu'on veut préciser cette limitation, on dit que le principe d'équivalence présente un *caractère local.*

3. En outre il existe une différence essentielle entre les forces d'attraction gravitationnelle de Newton et les forces d'inertie lorsque ces dernières apparaissent dans les référentiels en rotation. *Les forces gravitationnelles newtoniennes ne dépendent pas de la vitesse des corps sur lesquels elles s'exercent. Cela s'applique également aux forces d'inertie de translation et centrifuges et d'une manière générale à toutes les forces d'inertie d'entraînement.* Les actions physiques des forces d'inertie d'entraînement sont parfaitement équivalentes à celles des forces de gravitation newtoniennes. Il est impossible de distinguer univoquement les champs de ces deux types de forces. Par contre, *les forces de Coriolis se distinguent essentiellement des forces gravitationnelles newtoniennes en ce qu'elles n'agissent pas sur des corps au repos relativement au référentiel considéré. Les forces de Coriolis n'apparaissent que si le corps est en mouvement et sont proportionnelles à sa vitesse.* Néanmoins du fait de l'équivalence de la masse grave et de la masse d'inertie, il est utile d'associer le champ gravitationnel et le champ de toutes les forces d'inertie en un *champ unique*. C'est ce que l'on fait en théorie de la relativité générale. Le champ unique conserve le nom de *champ gravitationnel*. La force d'inertie est un cas particulier des forces du champ gravitationnel ainsi généralisé. La théorie de la relativité générale ou théorie relativiste de la gravitation établit les équations du champ gravitationnel qui sont connues sous le nom d'*équations d'Einstein*. La loi de la gravitation uni-

verselle de Newton est contenue dans les équations d'Einstein, mais n'est vérifiée que de façon approchée. Le caractère approché de cette loi découle tout naturellement de ce que cette loi est fondée sur l'idée de la propagation instantanée des interactions. Or cette conception n'a qu'une validité limitée.

4. Maintenant que nous avons développé ces considérations, il est utile de revoir la question des référentiels d'inertie. Soit un corps A se trouvant éloigné du Soleil à une distance suffisamment grande pour que l'on puisse négliger son champ gravitationnel. On ne peut cependant affirmer que le corps A n'est soumis à aucun champ de gravitation, puisque nous ne pouvons pas affirmer qu'il n'existe pas dans l'Univers de corps distants pouvant créer au lieu où se trouve le corps A un champ de gravitation $\boldsymbol{g}$ d'intensité finie. La décroissance du champ de gravitation avec la distance jusqu'à ces corps célestes peut être compensée par l'accroissement de leurs masses. Si on étudie les phénomènes dans une région limitée S de l'espace et que cette région ne soit pas trop grande, on peut admettre que le champ $\boldsymbol{g}$ y est homogène. Dans ces conditions, pendant la chute libre du corps A dans ce champ de gravitation $\boldsymbol{g}$, ce dernier sera *exactement compensé par les forces d'inertie de translation.* Si le corps A ne tourne pas (par rapport aux masses se trouvant à grande distance), il ne sera pas soumis à l'action des autres forces d'inertie. Le référentiel lié au corps A en chute libre et non animé d'un mouvement de rotation sera un référentiel d'inertie. Dans tout référentiel A' animé d'un mouvement de rotation ou d'un mouvement accéléré par rapport au référentiel A apparaîtront des forces d'inertie. Mais ce mouvement n'est pas un mouvement dans « l'espace absolu », c'est un *mouvement par rapport à des corps distants de l'Univers.* De ce point de vue, exprimé par E. Mach (1838-1916), les forces d'inertie résultent des rotations ou des mouvements accélérés des systèmes de coordonnées par rapport à des corps distants de l'Univers. Cette assertion porte le nom de *principe de Mach.* Pendant quelque temps les conceptions de Mach trouvaient audience. Ainsi Einstein, dans ses premières publications, partageait, du moins en principe, le point de vue de Mach, qu'il abandonna plus tard. Les théories cosmogoniques modernes ne font pas appel au principe de Mach, car il est incompatible avec la théorie des champs qui affirme que la vitesse de propagation de toutes les interactions est finie. Les corps célestes éloignés et le milieu interstellaire ne peuvent influencer les processus terrestres qu'au bout du temps nécessaire pour que la lumière émise par ces corps parvienne jusqu'à la Terre. On pourrait donc penser que le référentiel d'inertie se trouve directement défini non par les positions des corps célestes mais par leurs champs gravitationnels.

§ 72. Déplacement gravitationnel des raies spectrales

1. Comme exemple d'application du principe d'équivalence des forces gravitationnelles et des forces d'inertie, considérons le *déplacement gravitationnel des raies spectrales*, qui fut prévu par la théorie d'Einstein. Nous allons raisonner en considérant la lumière comme des ondes se propageant dans le vide à la vitesse $c \approx 300\,000$ km/s. La lumière correspondant à une raie spectrale donnée est caractérisée par une fréquence bien déterminée ν, c'est-à-dire par un nombre déterminé d'oscillations par seconde. Une telle lumière est dite *monochromatique*. Supposons qu'une lumière monochromatique nous parvienne d'une source

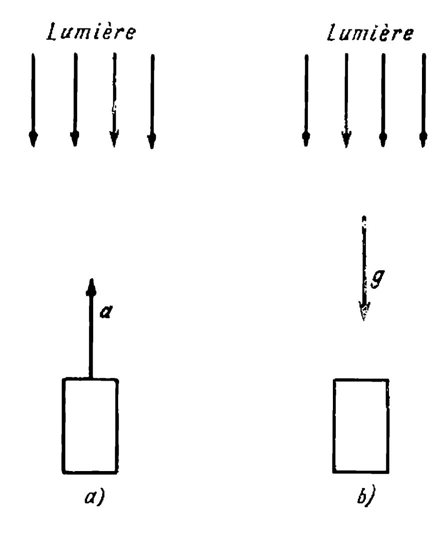


Fig. 196

éloignée et qu'il n'existe pas de champ gravitationnel dans l'espace que parcourt cette lumière. Désignons par ν_0 la fréquence de l'onde lumineuse enregistrée par un observateur au repos dans un référentiel d'inertie. Si l'observateur se met en mouvement à la rencontre des rayons lumineux avec une accélération constante $\boldsymbol{a}$ (fig. 196, *a*), la fréquence de la lumière qu'il enregistrera se trouvera accrue (effet Doppler).

Un calcul simple montre qu'aux termes de l'ordre de $(v/c)^2$ près la variation relative de la fréquence enregistrée est donnée par la formule

$$\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}=\frac{v}{c},$$

où v est la vitesse de déplacement de l'observateur. Adoptons pour sens positif de $\boldsymbol{v}$ et de $\boldsymbol{a}$ le sens contraire à celui de la propagation de la lumière. Si l'observateur était en mouvement pendant un temps t, sa vitesse $v = at$. Pendant ce temps t la lumière parcourt un chemin $l = ct = cv/a$; par suite la variation que subit dans ce temps la fréquence de la lumière est

$$\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}=\frac{al}{c^2}.$$

2. Supposons maintenant que l'observateur est au repos par rapport au référentiel d'inertie, mais qu'il y règne un champ gravitationnel uniforme d'intensité $\boldsymbol{g}$ (fig. 196, *b*). Si la valeur de $\boldsymbol{g}$ est rendue égale à $-\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{a}$), en vertu du principe d'équivalence le champ gravitationnel provoquera exactement la même variation de la fréquence de la lumière que dans le cas précédent. *Lorsque la lumière se propage dans le sens du champ gravitationnel* $\boldsymbol{g}$ *sa fréquence doit augmenter et lorsque la lumière se propage dans le sens opposé à celui du champ, sa fréquence doit diminuer.* C'est en cela que consiste l'effet du déplacement gravitationnel des raies spectrales qui avait été prévu par Einstein. Ce déplacement est donné par

$$\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}=\frac{gl}{c^2}, \tag{72.1}$$

l étant le chemin parcouru par la lumière dans le champ de gravitation.

La formule (72.1) avait été établie en supposant que le champ gravitationnel était constant et homogène. Le résultat obtenu se laisse généraliser au cas d'un champ non homogène mais constant. Pour ce faire, subdivisons le trajet du rayon lumineux en intervalles infiniment petits $d\boldsymbol{r}$. Le long de chaque trajet infinitésimal le champ gravitationnel peut être considéré comme homogène. En désignant par $d\nu$ la variation que subit la fréquence du rayon lumineux parcourant un chemin infinitésimal $d\boldsymbol{r}$, nous obtenons à l'aide de la formule (72.1)

$$\frac{d\nu}{\nu}=\frac{\boldsymbol{g}\,d\boldsymbol{r}}{c^2},$$

puisque la composante du vecteur $\boldsymbol{g}$ orthogonale à la direction de propagation de la lumière n'intervient pas dans la variation de la fréquence. Si la lumière parcourt un chemin fini entre la position initiale *1* et la position finale *2*, la variation correspondante de sa fréquence sera trouvée par l'intégration de l'expression obtenue, i.e. par la formule

$$\ln\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{1}{c^2}\int \boldsymbol{g}\,d\boldsymbol{r}. \tag{72.2}$$

Il n'est pas obligatoire d'intégrer le long du chemin parcouru par la lumière, on peut fort bien choisir un trajet arbitraire reliant les points *1* et *2*. Dans des champs constants les forces gravitationnelles sont conservatives, de sorte que la valeur de l'intégrale ne dépend pas de la forme du chemin. Cette intégrale représente le travail qu'auraient effectué les forces du champ gravitationnel pour déplacer l'unité de masse de la position *1* à la position *2*. Ce travail est dit *différence des potentiels gravitationnels* $\varphi_1-\varphi_2$ entre les points *1* et *2*. Avec ces notations

$$\ln\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}. \tag{72.3}$$

Si la différence des potentiels est petite:

$$|\varphi_1-\varphi_2| \ll c^2,$$

la formule précédente devient

$$\frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_1}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}. \tag{72.4}$$

Lorsque la lumière se propage en allant d'un potentiel gravitationnel plus grand vers un potentiel plus petit, sa fréquence augmente, et lorsqu'elle se propage en sens inverse, sa fréquence diminue.

Actuellement on a réussi à déceler avec sûreté le déplacement gravitationnel des raies spectrales même dans le champ terrestre (grâce à la mise en œuvre de l'*effet Mössbauer*). Le chemin parcouru le long de la verticale descendante n'était que de 20 m. Le déplacement que l'on doit avoir dans le champ terrestre n'est que de $\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \sim 2 \cdot 10^{-14}$.

Les mesures ont donné le résultat attendu, de sorte que ces études apportèrent une nouvelle confirmation de la validité du principe d'équivalence des forces gravitationnelles et des forces d'inertie.

CHAPITRE X

MÉCANIQUE DES CORPS ÉLASTIQUES

§ 73. Corps parfaitement élastiques

1. Tous les corps réels sont *déformables*. Sous l'action des forces qui leurs sont appliquées, ils modifient leur forme ou leur volume. Ces modifications de forme ou de volume sont appelées des *déformations*. Dans le cas de corps solides on distingue deux cas limites: les *déformations élastiques* et les *déformations plastiques*. Les déformations sont dites *élastiques* si elles disparaissent dès que cesse l'action des forces appliquées. Les déformations sont dites *plastiques* ou *résiduelles* si elles subsistent, au moins partiellement, dans le corps après suppression des forces appliquées. Les déformations plastiques sont à la base de la transformation à froid des métaux (emboutissage, forgeage, etc.). La nature des déformations (élastiques ou plastiques) dépend non seulement de la nature du matériau, mais aussi de l'*intensité des forces appliquées*. Tant que la force appliquée (plus exactement la force rapportée à l'unité de surface qu'on appelle contrainte ou tension) est inférieure à une certaine valeur désignée sous le nom de *limite d'élasticité*, les déformations résultantes sont élastiques. La limite d'élasticité dépend de la nature du matériau mais n'est jamais parfaitement définie. Si la contrainte appliquée est supérieure à la limite d'élasticité, les déformations seront plastiques. La classification des corps en corps élastiques et plastiques est somme toute assez conventionnelle. En toute rigueur, après suppression des contraintes imposées, les déformations ne disparaissent jamais en totalité, de sorte qu'elles sont toujours plastiques. Si les déformations résiduelles sont petites, on peut les négliger dans de nombreux cas, mais cela dépend des conditions concrètes. Parfois on peut négliger les déformations résiduelles si elles ne dépassent pas 0,1 % de la déformation maximale sous contrainte. Dans d'autres cas elles ne doivent pas être supérieures à 0,01 % de la valeur maximale.

2. Dans ce chapitre nous n'étudierons que les déformations élastiques et nous n'en considérerons que l'aspect purement mécanique sans nous attaquer à la physique de l'effet. En mécanique, on décrit les propriétés élastiques des corps à l'aide de *constantes élastiques*

que l'on introduit empiriquement et dont les valeurs dépendent de la nature des corps et de leur état physique (la température du corps par exemple). L'approche physique est plus substantielle car elle étudie les déformations du point de vue atomistique; c'est là le domaine de la *théorie du solide* qui permet non seulement d'établir les équations fondamentales de la mécanique des corps déformables en partant de considérations atomistiques, mais encore d'établir des corrélations entre les constantes élastiques des substances et les autres propriétés physiques.

Nous admettrons que les corps sont *parfaitement élastiques* ou sont des corps idéalisés ne subissant que des déformations élastiques sans jamais subir de déformations plastiques. Ce modèle ne peut être utilisé que si les forces appliquées aux corps réels sont inférieures à leurs limites d'élasticité. *Pour les corps parfaitement élastiques on peut établir une dépendance univoque entre les forces appliquées et les déformations.* Dans le cas de déformations plastiques on ne peut établir une telle corrélation ne serait-ce que pour la raison qu'avant et après déformation plastique la forme du corps est différente en l'absence de toute contrainte extérieure. Nous nous limiterons au cas des *petites déformations*, c'est-à-dire aux déformations vérifiant la loi de Hooke. C'est une loi approchée selon laquelle *les déformations sont proportionnelles aux forces qui les ont provoquées.*

3. On subdivise tous les corps solides en corps *isotropes* et en corps *anisotropes*. Un corps est dit *isotrope* si ses propriétés ne dépendent pas de la direction, et *anisotrope* si ses propriétés changent avec la direction. Les *cristaux* sont des corps typiquement anisotropes. Ces définitions ne sont pas bien nettes puisqu'elles ne précisent pas de quelles propriétés physiques il s'agit. En effet, *un même corps peut se comporter comme isotrope vis-à-vis de certaines propriétés et comme anisotrope vis-à-vis d'autres propriétés.* Ainsi tous les cristaux du *système cubique* sont isotropes vis-à-vis de la propagation de la lumière, mais à l'égard de leurs propriétés élastiques ils sont anisotropes. Dans ce chapitre c'est l'isotropie ou anisotropie des propriétés élastiques des corps qui nous intéresse. Nous nous limiterons ici au cas le plus simple des corps isotropes. Les métaux présentent généralement une *structure polycristalline* et sont donc constitués par une multitude de petits cristaux orientés de façon désordonnée. Chacun de ces petits cristaux est anisotrope, mais un morceau de métal renfermant un grand nombre de petits cristaux orientés au hasard se comporte comme un corps isotrope. Par déformation plastique le caractère aléatoire des orientations des cristaux peut être perturbé et le métal se comportera comme un corps anisotrope. C'est ce que l'on observe à la suite d'un allongement ou d'une torsion des fils métalliques.

§ 74. Contraintes élastiques

1. Les différentes parties d'un corps déformé entrent en interaction les unes avec les autres le long de leurs surfaces de séparation. Considérons un corps ou un milieu qui a été déformé d'une manière arbitraire et subdivisons-le par la pensée en deux parties que nous désignerons corps I et corps II, séparés l'un de l'autre par la surface AB (fig. 197). Puisque le corps I est déformé, il exerce une force sur le corps II qui à son tour, et pour la même raison, applique au corps I une force égale et opposée. Pour déterminer les déformations qui apparaissent, il ne suffit pas de connaître les forces totales appliquées à la section AB, il importe de préciser la répartition de ces forces dans cette section. Considérons sur la surface AB une aire dS infiniment petite et soit $d\boldsymbol{F}$ la force qu'applique, sur cet élément de surface, le corps II sur le corps I. *La force rapportée à l'unité de surface*, soit dF/dS, *est dite contrainte* agissant sur le corps I en un point correspondant de la surface AB. La contrainte agissant en ce même point sur le corps II sera égale en grandeur mais de sens opposé.

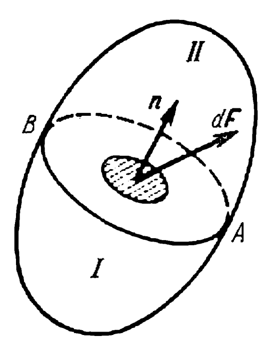


Fig. 197

2. On peut définir l'orientation de l'élément de surface dS en indiquant la direction de la normale à dS. Par convention cette normale doit pointer *vers l'extérieur* de la surface du corps auquel est appliquée la force $d\boldsymbol{F}$. Désignons par $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire de cette normale et par $\boldsymbol{\sigma}_n$ la contrainte correspondante. $\boldsymbol{\sigma}_{-n}$ désignera alors la contrainte appliquée à la surface AB du corps II adjacent au corps I. Du fait de l'égalité de l'action et de la réaction $\boldsymbol{\sigma}_n = -\boldsymbol{\sigma}_{-n}$. On peut décomposer le vecteur $\boldsymbol{\sigma}_n$ en une composante portée par la normale $\boldsymbol{n}$ et en une composante contenue dans le plan tangent à l'élément de surface dS. La première composante est la contrainte *normale* et la seconde est la contrainte *tangentielle* les deux appliquées à dS. Comme tout autre vecteur la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_n$ peut être définie par ses trois composantes le long des axes X, Y, Z d'un système de coordonnées rectangulaires. Désignons-les par σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz}. Le premier indice indique la direction de la normale extérieure à la surface du corps où se trouve l'élément de surface dS et le second indique la direction de l'axe sur lequel on projette la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_n$. En particulier, $\boldsymbol{\sigma}_x$ désigne la contrainte appliquée à un élément de surface dont la normale extérieure est parallèle au sens positif de l'axe X. Les quantités σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz} désignent les projections du vecteur $\boldsymbol{\sigma}_x$ sur les trois axes de coordonnées.

3. Pour déterminer la contrainte s'exerçant sur un élément de surface arbitrairement orienté, en un point quelconque d'un milieu,

il suffit de se donner les contraintes s'exerçant sur trois éléments de surface orthogonaux passant par ce point. Ce procédé est valable tant pour les milieux au repos que pour les milieux animés d'un mouvement accéléré. Pour le démontrer nous ferons coïncider l'origine des coordonnées avec le point considéré du milieu et nous y construirons un élément de volume infiniment petit $OABC$ délimité par les trois plans de coordonnées et par le plan ABC coupant ces trois plans de coordonnées (fig. 198). Soit n la normale extérieure au plan du triangle ABC. La force appliquée par le milieu sur la face ABC et agissant sur l'élément de volume délimité sera alors $\sigma_n S$, S étant l'aire de la face ABC. De même les forces qu'applique le milieu ambiant sur les trois faces latérales seront : $\sigma_{-x} S_x$, $\sigma_{-y} S_y$, $\sigma_{-z} S_z$, où S_x, S_y, S_z sont les aires de ces trois faces. En plus de ces forces, l'élément de volume ainsi défini peut être soumis à des forces *massiques* ou *spatiales*, telle la force de la pesanteur. Désignons par f la résultante de toutes ces forces. La force f est proportionnelle au volume de l'élément de volume considéré. Si la masse de l'élément est m et son accélération est a, on doit avoir

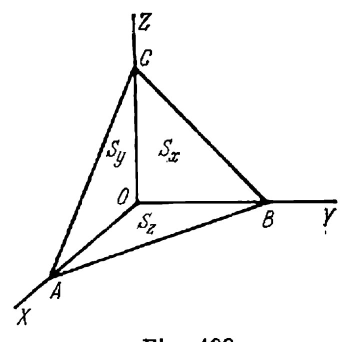


Fig. 198

$$ma = f + \sigma_n S + \sigma_{-x} S_x + \sigma_{-y} S_y + \sigma_{-z} S_z.$$

Passons à la limite en réduisant l'élément de volume $OABC$ à un point. Lors de ce passage à la limite on peut rejeter les termes ma et f puisqu'ils sont proportionnels au volume de l'élément $OABC$ et sont donc des infiniment petits d'*ordre supérieur* par rapport aux autres termes qui, eux, sont proportionnels à la surface de l'élément. On démontre en géométrie que les projections de l'aire S sur les plans des coordonnées s'expriment par les relations

$$S_x = Sn_x, \quad S_y = Sn_y, \quad S_z = Sn_z.$$

En remarquant que $\sigma_{-x} = -\sigma_x$, $\sigma_{-y} = -\sigma_y$, $\sigma_{-z} = -\sigma_z$ et en passant à la limite on obtient

$$\sigma_n = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z. \qquad (74.1)$$

Cette relation démontre le théorème puisqu'on peut choisir arbitrairement les axes de coordonnées X, Y, Z.

Ainsi *la contrainte en tout point d'un corps élastique déformé peut être définie à l'aide des trois vecteurs* σ_x, σ_y, σ_z *ou à l'aide de leurs neuf projections*

$$\begin{matrix} \sigma_{xx}, & \sigma_{xy}, & \sigma_{xz}, \\ \sigma_{yx}, & \sigma_{yy}, & \sigma_{yz}, \\ \sigma_{zx}, & \sigma_{zy}, & \sigma_{zz}. \end{matrix} \qquad (74.2)$$

L'ensemble de ces neuf quantités porte le nom de *tenseur des contraintes élastiques*.

En règle générale ces quantités varient d'un point du milieu à l'autre et sont donc des fonctions des coordonnées. Ce n'est qu'à l'état statique et en l'absence de forces massiques que le tenseur des contraintes élastiques a partout la même valeur.

4. *Le tenseur des contraintes élastiques est un tenseur symétrique*, c'est-à-dire

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = x, y, z). \tag{74.3}$$

Pour le démontrer considérons un parallélépipède élémentaire de côtés dx, dy, dz d'une substance donnée (fig. 199). Le moment M_z des forces par rapport à l'axe Z appliqué à ce parallélépipède vaut

$$M_z = (\sigma_{xy}\,dy\,dz)\,dx - \\ -(\sigma_{yx}\,dx\,dz)\,dy = (\sigma_{xy} - \sigma_{yx})\,dV,$$

où dV est le volume du parallélépipède élémentaire. D'après l'équation des moments

$$(\sigma_{xy} - \sigma_{yx})\,dV = I_z \frac{d\omega_z}{dt},$$

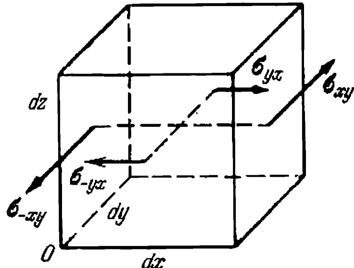


Fig. 199

où I_z et ω_z sont respectivement le moment d'inertie et la vitesse angulaire relativement à l'axe Z. Or le moment d'inertie I_z est proportionnel au produit de la masse par le carré des dimensions linéaires du parallélépipède; c'est donc un infiniment petit d'*ordre plus grand* que le volume dV. Aussi par réduction du parallélépipède à l'état d'un point, le second membre $I_z \frac{d\omega_z}{dt}$ tend vers zéro plus rapidement que ne le fait le premier membre de l'équation. A la limite on obtient $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$. On démontre de même que $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ et $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$.

5. On démontre que *le système des coordonnées X, Y, Z peut être choisi tel que tous les éléments non diagonaux du tenseur des contraintes élastiques s'annulent*, soit $\sigma_{ij} = 0$ avec $i \neq j$. Sans nous attarder à la démonstration de cette proposition, nous remarquerons que ce résultat tient à ce que le tenseur des contraintes élastiques σ_{ij} est un tenseur symétrique. Aussi dans un tel système de coordonnées en tout point les contraintes élastiques ne sont caractérisées que par trois quantités σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}. Pour alléger l'écriture on n'utilise qu'un seul indice, i.e. σ_x, σ_y et σ_z. Les axes de coordonnées correspondants sont dits *axes principaux* du tenseur des contraintes élastiques.

§ 75. Traction et compression des tiges

1. Appliquons aux deux bases d'une tige homogène des forces de tension ou de compression F (fig. 200, *a* et *b*). La tige subira alors une déformation de traction ou de compression. Considérons dans la tige une section droite C; pour que la partie de la tige AC reste en équilibre, il faut qu'à sa base inférieure C soit appliquée une force $F_1 = F$. C'est la force de traction ou de compression qu'applique la partie BC de la tige à sa partie AC. Cette force apparaît parce que la partie inférieure BC de la tige est déformée. La partie supérieure AC de la tige étant elle aussi déformée exerce sur la partie inférieure une force F_1 égale et opposée. Dans toute section droite d'une tige allongée ou comprimée agissent des forces de ce genre. On en conclut que la déformation de la tige fait apparaître des forces élastiques que chaque partie de la tige applique à la partie contiguë. Nous avons désigné par le terme contrainte la force rapportée à l'unité de surface de la section droite de la tige. Dans le cas considéré la contrainte est orthogonale à la section droite de la tige. *Si la tige est allongée, la contrainte s'appelle tension* que l'on définit par l'expression

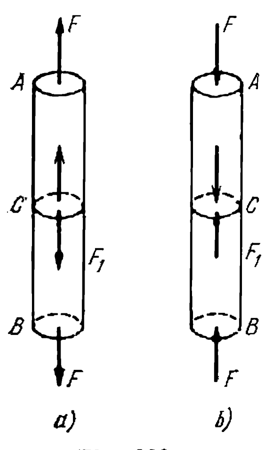


Fig. 200

$$T = \frac{F}{S}, \tag{75.1}$$

où S est l'aire de la section droite. *Si la tige est comprimée, la contrainte porte le nom de pression* dont la valeur numérique s'exprime par la même formule

$$P = \frac{F}{S}. \tag{75.2}$$

La pression peut être considérée comme une tension négative et vice versa, i.e.

$$P = -T. \tag{75.3}$$

Cette remarque nous dispense de la nécessité de considérer séparément l'extension et la compression des tiges.

2. Soit l_0 la longueur de la tige non déformée. Après application de la force F, la tige s'allonge de Δl et sa longueur devient $l = l_0 + \Delta l$. Le rapport

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{75.4}$$

porte le nom d'*allongement relatif de la tige*. L'allongement est positif pour les forces de traction et négatif dans le cas des forces de com-

pression. L'allongement relatif changé de signe est la *compression relative*. Ainsi par définition la compression relative est la quantité $-(\Delta l)/l_0$. Elle est positive pour les forces de compression et négative pour les forces de traction.

L'expérience montre que tant que les déformations élastiques ne sont pas très grandes, la tension T (ou la pression P) est proportionnelle à l'allongement relatif (à la compression relative)

$$T = E\frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{ou} \quad P = -E\frac{\Delta l}{l_0}, \tag{75.5}$$

où E est une constante dont la valeur ne dépend que du matériau de la tige et de son état physique. Cette constante s'appelle le *module de Young* (1773-1829). Les formules (75.5) expriment la *loi de Hooke* (1635-1703) *pour les déformations de traction ou de compression des tiges*. C'est une loi approchée qui peut ne plus être vérifiée si les déformations sont importantes. Les déformations pour lesquelles la loi de Hooke est approximativement vérifiée sont dites *petites*. Si dans la formule (75.5) on pose $\Delta l = l_0$, on obtient $T = E$. C'est pour cette raison que l'on définit souvent le module de Young comme la tension qu'il faudrait appliquer à une tige pour l'allonger du simple au double en supposant que dans ces conditions la loi de Hooke serait encore vérifiée. Le défaut majeur de cette définition réside en ce que pour des allongements aussi importants la loi de Hooke devient inapplicable pour presque tous les matériaux: on observe soit une rupture des corps, soit une déformation qui cesse d'être proportionnelle à la tension appliquée.

3. D'une généralité plus grande que la loi de Hooke est l'assertion que *dans le cas de déformations élastiques la tension T est une fonction univoque de l'allongement relatif* ε: $T = T(\varepsilon)$. Cette fonction doit s'annuler pour $\varepsilon = 0$, car lorsque les déformations ε disparaissent, la tension T doit disparaître. Il s'ensuit que dans le développement en série de la fonction $T(\varepsilon)$ suivant les puissances de ε, il ne doit pas y avoir de terme de puissance zéro. Le développement doit être de la forme

$$T = E\varepsilon + A\varepsilon^2 + B\varepsilon^3 + \ldots,$$

les coefficients $E, A, B, \ldots$ sont des constantes dont les valeurs ne dépendent que de la nature et de l'état physique du matériau. Si l'allongement relatif ε est petit, on peut négliger les puissances supérieures de ε et on aboutit à la loi de Hooke (75.5). L'erreur relative que l'on commet alors est de l'ordre de $\frac{A\varepsilon^2}{E\varepsilon} \sim \varepsilon$. Ces considérations générales montrent que *la loi de Hooke et les calculs qui l'utilisent sont vérifiés avec une erreur relative de l'ordre de* ε. Il s'ensuit que dans ces calculs on doit rejeter tous les termes qui vis-à-vis des termes principaux sont des quantités de l'ordre de ε, ε^2, etc. Par exemple, l'allongement relatif ε peut être défini aussi bien par (75.4)

que par l'expression $(\Delta l)/l$. En effet la différence de ces deux expressions

$$\frac{\Delta l}{l_0} - \frac{\Delta l}{l} = \frac{(l-l_0)\,\Delta l}{ll_0} = \frac{(\Delta l)^2}{ll_0} \sim \varepsilon^2$$

est du deuxième ordre de petitesse en ε et on doit donc la rejeter. La loi de Hooke peut donc être présentée sous la forme

$$T = E\frac{\Delta l}{l}, \quad P = -E\frac{\Delta l}{l}, \tag{75.6}$$

ou

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{T}{E}, \quad \frac{\Delta l}{l} = -\frac{P}{E}. \tag{75.7}$$

Ces remarques concernant la précision des calculs s'appliquent non seulement aux déformations de traction et de compression, mais aussi à toutes les petites déformations dont il sera question dans ce qui suit.

4. Soit une tige où on aura créé une tension T_1. Cette tension fait apparaître un allongement relatif $\frac{\Delta_1 l}{l_0} = \frac{T_1}{E}$, de sorte que la longueur de la tige devient égale à $l_1 = l_0 + \Delta_1 l$. En général les propriétés des matériaux changent du fait des déformations. On peut donc s'attendre à une variation du module de Young. Mais si les déformations sont petites (et ce n'est que dans ce cas que l'on peut parler de module de Young), on peut négliger sa variation. Désignons par E_1 le module de Young de la tige déformée. Si nous lui appliquons une tension supplémentaire T_2, sa longueur s'accroîtra de $\Delta_2 l$, avec $\frac{\Delta_2 l}{l_1} = \frac{T_1}{E_1}$. Compte tenu du degré de précision de la loi de Hooke, on peut poser $\frac{\Delta_2 l}{l_1} = \frac{\Delta_2 l}{l_0}$ et comme l'allongement total est $\Delta l = \Delta_1 l + \Delta_2 l$, on obtient

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{T_1}{E} + \frac{T_2}{E_1}.$$

Or il n'est pas nécessaire de décomposer Δl en ses constituants $\Delta_1 l$ et $\Delta_2 l$ et on peut fort bien considérer Δl comme l'allongement produit par la tension résultante $T = T_1 + T_2$. On peut écrire alors en vertu de la loi de Hooke

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{T}{E} = \frac{T_1}{E} + \frac{T_2}{E}.$$

En comparant avec l'expression précédente on voit que $E = E_1$, ce qu'il fallait démontrer.

Ces considérations s'appliquent non seulement aux déformations de traction et de compression mais aussi à n'importe quelles petites déformations. *Si les déformations sont petites, les constantes élastiques des corps ne changent pas du fait des déformations.* Il s'ensuit que

si le corps est soumis à l'action de plusieurs forces, on calculera sa déformation totale en calculant d'abord les déformations produites par chacune des forces appliquées (comme si les autres forces n'existaient pas) *et en additionnant les déformations partielles.* C'est le *principe de la superposition des petites déformations.*

5. Pour déformer un corps il faut accomplir un travail. Le corps déformé peut à son tour effectuer un travail, car il possède alors une réserve d'énergie potentielle qui porte le nom d'énergie *élastique.* Elle est égale au travail qui a été dépensé pour déformer le corps, à condition que tout ce travail ait été utilisé pour accroître l'énergie élastique du corps, sans accroître son énergie cinétique. Pour éviter l'apparition de l'énergie cinétique au cours de la déformation du corps, celle-ci doit s'effectuer lentement par augmentation progressive des forces appliquées au corps afin qu'à tout instant toute partie du corps se trouve pratiquement à l'état d'équilibre. Autrement dit lors de la déformation les forces extérieures doivent être à tout instant équilibrées par les forces des contraintes intérieures. Si cette condition est réalisée on dit que le corps est soumis à un *processus quasi statique.*

Pour illustrer cette proposition prenons comme modèle de corps déformable un ressort à boudin. Suspendons-le par son extrémité supérieure et attachons une charge à son extrémité inférieure, tout en la maintenant dans la main pour qu'elle n'allonge pas le ressort. Si on abandonne subitement le poids à lui-même, on verra apparaître des oscillations. Le travail produit par la force de pesanteur est utilisé non seulement pour allonger le ressort, mais encore pour augmenter l'énergie cinétique de la charge et du ressort. Ce processus n'est donc pas quasi statique et ne peut servir au calcul de l'énergie élastique du ressort. Remplaçons le poids par un récipient de faible masse où l'on fera lentement couler du sable. Dans ces conditions aucune oscillation n'apparaîtra et le ressort s'allongera progressivement avec l'augmentation de la charge. Tout le travail produit par la force de pesanteur sera utilisé pour accroître l'énergie potentielle du ressort déformé. Un tel processus est quasi statique et on pourra donc l'utiliser pour calculer l'énergie élastique du ressort.

6. Nous pouvons maintenant passer au calcul de l'énergie élastique d'une tige allongée. Appliquons à la tige une force de traction $f(x)$ en l'augmentant lentement depuis la valeur initiale $f = 0$ jusqu'à la valeur finale $f = F$. L'allongement de la tige variera de la valeur $x = 0$ à la valeur finale $x = \Delta l$. Selon la loi de Hooke $f(x) = kx$, où k est le *coefficient d'élasticité* qui se laisse aisément exprimer par le module de Young. Tout le travail produit dans ce processus est utilisé pour accroître l'énergie élastique U; on écrira donc

$$U = \int_0^{\Delta l} f(x)\,dx = k\int_0^{\Delta l} x\,dx = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \qquad (75.8)$$

Comme dans l'état final $x = \Delta l$, on a $F = f(\Delta l) = k\Delta l$ et

$$U = \frac{1}{2} F\Delta l. \tag{75.9}$$

Si on avait appliqué d'un seul coup une force constante F à la tige non déformée, à son allongement Δl aurait correspondu un travail deux fois plus grand $A = F\Delta l$. Comme l'énergie élastique accumulée dans la tige aurait été la même, il est clair que la moitié seulement du travail A dépensé aurait été utilisée à accroître l'énergie élastique de la tige. L'autre moitié de ce travail aurait été dépensée pour accroître l'énergie cinétique des oscillations élastiques et des ondes qui sont toujours générées dans la tige lors de processus qui ne sont pas quasi statiques. Dans les processus quasi statiques on ne voit apparaître ni ondes ni oscillations ; c'est pour cela que dans les formules (75.8) et (75.9) figure le facteur $^1/_2$.

Calculons la *densité spatiale de l'énergie élastique qui est l'énergie élastique u revenant à l'unité de volume de la tige allongée* (*ou comprimée*). Elle est égale au quotient de l'expression (75.9) par le volume $V = Sl$ de la tige :

$$u = \frac{1}{2} \frac{F}{S} \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} T\varepsilon. \tag{75.10}$$

En utilisant la loi de Hooke on ramène aisément cette formule à la forme

$$u = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{T^2}{2E} = \frac{P^2}{2E}. \tag{75.11}$$

7. L'expérience montre que *sous l'action d'une force de traction ou de compression F varient aussi bien les dimensions longitudinales que transversales de la tige. Si la force F est une force de traction, les dimensions transversales de la tige diminuent et si c'est une force de compression, elles augmentent.* Désignons par a_0 l'épaisseur de la tige avant déformation et par a son épaisseur après déformation. Pour une tige cylindrique on peut prendre pour épaisseur le diamètre de sa section droite et pour une tige rectangulaire le côté de sa base rectangulaire, etc. Dans le cas d'une force de traction la quantité $-\frac{\Delta a}{a_0} \approx -\frac{\Delta a}{a}$ porte le nom de *contraction latérale relative* de la tige ($\Delta a = a - a_0$). Le rapport de la contraction latérale relative à l'allongement longitudinal relatif est dit *coefficient de Poisson* (1781-1840) :

$$\mu = -\frac{\Delta a}{a} : \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta a}{\Delta l} \cdot \frac{l}{a}. \tag{75.12}$$

La valeur du coefficient de Poisson ne dépend que de la nature du matériau ; c'est l'une des plus importantes constantes servant à caractériser les propriétés élastiques des matériaux. Il n'est pas néces-

saire de considérer séparément le cas des forces de compression puisqu'on peut les assimiler à des forces de traction négatives.

Le module de Young E et le coefficient de Poisson μ caractérisent pleinement les propriétés élastiques d'un matériau isotrope. Toutes les autres constantes élastiques peuvent s'exprimer en fonction de E et de μ.

8. Une dernière remarque est nécessaire. Tous les modules et tous les coefficients d'élasticité auxquels nous aurons affaire devraient être appelés *modules* et *coefficients isothermiques*. Ils caractérisent les déformations d'un corps se trouvant à température constante. C'est ce qui se produit généralement dans le cas des déformations statiques. Mais si les déformations sont dynamiques (ondes dans les milieux élastiques), elles peuvent être tellement rapides que les différences de température qui apparaissent n'ont pas le temps de s'éga liser par échange thermique. Le cas limite le plus important est celui où il n'y a aucun échange thermique entre les parties du corps se trouvant à des températures différentes. Ces processus, ainsi que les modules et les coefficients élastiques correspondants sont dits *adiabatiques*. Nous étudierons dans le volume II de notre cours les relations existant entre les modules d'élasticité isothermiques et adiabatiques.

PROBLÈMES

1. Calculer l'allongement relatif d'une tige suspendue en position verticale sous l'action de son propre poids P. L'aire de la section droite de la tige est S.

Réponse. $\frac{l-l_0}{l_0}=\frac{P}{2SE}$.

2. Une tige élastique de masse m, de longueur l et de section droite S se meut avec une accélération a (la même pour tous les points de la tige) dans la direction longitudinale. Calculer l'énergie élastique de déformation apparaissant du fait de ce mouvement accéléré.

Réponse. $U=\frac{m^2a^2l}{6ES}$.

3. Quelle est l'énergie cinétique maximale que peut avoir un volant d'un volume $V = 1$ m³ si la résistance à la rupture du matériau $T = 10^{10}$ dynes/cm²? Admettre que toute la masse du volant est concentrée dans sa jante (qui est mince par rapport au rayon du volant). Montrer que si la résistance à la rupture du matériau du volant est invariable, l'énergie cinétique maximale ne dépend que du volume du volant, et non de sa masse.

Réponse. $K = {}^1/_2\ TV = 5\cdot10^8$ J.

4. Une tige fine de longueur $2l$ est en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour d'un axe perpendiculaire passant par le centre de la tige. Montrer que la tension T qui apparaît dans la tige du fait de cette rotation vérifie l'équation

$$\frac{dT}{dx}=-\rho\omega^2x,$$

où ρ est la densité du matériau de la tige et x la distance jusqu'à l'axe de rotation. Par intégration de cette équation, déterminer la répartition des tensions dans la tige. En quel point de la tige la tension est-elle maximale et quelle est sa valeur? Montrer que l'énergie cinétique maximale que l'on peut communiquer

à la tige, dont la résistance à la rupture reste constante, dépend de son volume V et non de sa masse. Calculer l'énergie cinétique maximale pour $V = 3 \cdot 10^4$ cm^3 si la tension maximale que peut supporter la tige est $T_{max} = 10^{10}$ dynes/cm^2.

Réponse. $T = {}^1/_2\rho\omega^2 (l^2 - x^2)$. La tension est maximale au centre de la tige et vaut $T_{max} = {}^1/_2\rho\omega^2 l^2$.

$$K_{max} = {}^1/_3 V T_{max} = 10^7 \text{ J}.$$

(Comparer avec le problème 3 du § 19.)

5. Une tige de section droite S est soumise à une force de traction F parallèle à l'axe de la tige. Quel est l'angle d'inclinaison α, par apport à l'axe, de la section où la contrainte tangentielle τ est maximale ? Calculer cette contrainte.

Réponse. $\alpha = 45°$, $\tau = \frac{F}{2S}$.

6. Un cylindre en caoutchouc de hauteur h, de poids P et de base S est placé sur un plan horizontal. Calculer l'énergie de déformation élastique du cylindre apparaissant sous l'action de son propre poids. De combien de fois variera l'énergie de déformation élastique du cylindre considéré si on place sur sa base supérieure un cylindre identique?

Réponse. $U = \frac{P^2 h}{6ES}$. Dans le second cas l'énergie élastique augmentera de 7 fois.

§ 76. Déformations d'un parallélépipède droit sous l'action de trois forces rectangulaires

1. Soit un corps isotrope et homogène ayant la forme d un parallélépipède droit; on applique à ses faces opposées les forces F_x, F_y, F_z normales à ces faces. Désignons par T_x, T_y, T_z les tensions correspondantes (fig. 201) et calculons les déformations que déterminent ces forces. En supposant que les déformations sont petites, nous pourrons utiliser le principe de superposition des petites déformations.

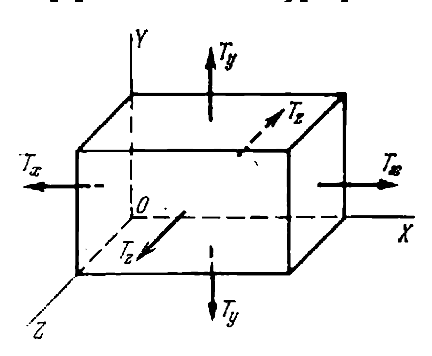


Fig. 201

Orientons les axes de coordonnées parallèlement aux arêtes du parallélépipède. Soient x, y, z les longueurs des arêtes. Si la force F_x était la seule active, l'arête x aurait reçu un accroissement $\Delta_1 x$ défini par la relation $\frac{\Delta_1 x}{x} = \frac{T_x}{E}$. Si la seule force active était F_y, les dimensions du parallélépipède normales à l'axe Y se seraient contractées. Ainsi l'arête x aurait subi un accroissement négatif $\Delta_2 x$ que l'on peut calculer par la formule $\frac{\Delta_2 x}{x} = -\mu \frac{T_y}{E}$. Enfin l'accroissement relatif que prendrait l'arête x sous l'action de la seule

force F_z serait égal à $\frac{\Delta_3 x}{x} = -\mu \frac{T_z}{E}$. Lorsque les trois forces agissent ensemble, selon le principe de superposition des petites déformations l'allongement résultant de l'arête x doit être égal à $\Delta x = \Delta_1 x + \Delta_2 x + \Delta_3 x$. On calcule de la même façon les allongements du parallélépipède le long des directions Y et Z. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &\equiv \frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E}(T_y + T_z), \\ \varepsilon_y &\equiv \frac{\Delta y}{y} = \frac{T_y}{E} - \frac{\mu}{E}(T_z + T_x), \\ \varepsilon_z &\equiv \frac{\Delta z}{z} = \frac{T_z}{E} - \frac{\mu}{E}(T_x + T_y). \end{aligned} \tag{76.1}$$

2. Lorsqu'on soumet le parallélépipède à une extension quasi statique le long de l'axe X on effectue un travail $A_1 = {}^1/_2 S_x T_x \, \Delta x$, où $S_x = yz$ est l'aire de la face normale à l'axe X. On peut écrire $A_1 = {}^1/_2 xyz \cdot T_x \frac{\Delta x}{x} = {}^1/_2 V T_x \varepsilon_x$, où $V = xyz$ est le volume du parallélépipède. Les travaux correspondant aux extensions quasi statiques le long des axes Y et Z seront donnés par des formules analogues. En additionnant tous ces travaux et en divisant le résultat par le volume du parallélépipède, nous obtenons pour la densité de l'énergie élastique du corps considéré la formule suivante:

$$u = \frac{1}{2}(T_x \varepsilon_x + T_y \varepsilon_y + T_z \varepsilon_z). \tag{76.2}$$

A l'aide de (76.1) cette formule devient

$$u = \frac{1}{2E}[T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 - 2\mu(T_x T_y + T_y T_z + T_z T_x)]. \tag{76.3}$$

Si une seule des trois tensions T_x, T_y, T_z est différente de zéro, ces formules se ramènent aux formules plus simples (75.10) et (75.11). D'après (75.11) *la densité de l'énergie élastique u est proportionnelle au carré de la tension T (ou de la pression P)*. La formule (76.3) montre que dans le cas général la densité de l'énergie élastique est une fonction quadratique homogène des tensions T_x, T_y, T_z (ou des pressions P_x, P_y, P_z). Si les tensions (ou les pressions) sont données, la densité de l'énergie élastique est inversement proportionnelle au module d'élasticité E. Plus la rigidité du ressort est grande, plus petite est son énergie élastique sous une tension constante. Les corps solides absolument rigides (pour lesquels $E = \infty$) n'acquièrent aucune énergie élastique quelles que soient les forces de tension ou de pression appliquées.

Conformément à (76.1) les tensions T_x, T_y, T_z sont linéaires en ε_x, ε_y, ε_z. Par suite la densité de l'énergie élastique est une fonction quadratique homogène des déformations ε_x, ε_y, ε_z. Dans le cas par-

ticulier où $\varepsilon_x = \varepsilon$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ elle est proportionnelle au *carré de la déformation*. Si les déformations ε_x, ε_y, ε_z sont données, la densité de l'énergie élastique u est proportionnelle au module d'élasticité E. Plus la rigidité du ressort est grande, plus son énergie élastique est grande (pour la même déformation).

PROBLÈME

Calculer la variation relative du volume d'une sphère creuse en laiton, de rayon $R = 5$ cm, contenant de l'air sous une pression de 11 atm (pression extérieure de 1 atm). Epaisseur de l'enveloppe sphérique $d = 1$ mm. Module de Young du laiton $E = 10^{12}$ dynes/cm², coefficient de Poisson $\mu = 0,3$.

Solution. Par raison de symétrie la contrainte tangentielle τ agissant dans l'enveloppe est la même suivant toutes les directions. Considérons un petit élément rectangulaire de l'enveloppe. Dans le calcul de la variation relative de l'aire de cet élément sous l'action des contraintes tangentielles τ on peut négliger sa courbure et l'assimiler à une plaquette rectangulaire. On obtient alors

$$\frac{\Delta S}{S} = 2(1-\mu)\frac{\tau}{E}$$

(on a négligé la variation d'aire due à la pression normale). Comme l'aire S est proportionnelle à $V^{2/3}$, la variation relative du volume sera $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{\Delta S}{S}$. Comme la surface est courbe, la tension τ fait apparaître une différence des pressions normales qui est égale à $2\tau d/R$ (voir dans le tome II la *formule de Laplace* pour la tension superficielle). Cette différence de pression doit être équilibrée par la différence ΔP des pressions du gaz se trouvant de part et d'autre de l'enveloppe. On trouve finalement

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{(1-\mu)R}{Ed}\Delta P \approx 5\cdot 10^{-4}.$$

§ 77. Traction et compression uni- et triaxiales

1. Considérons d'abord le cas particulier où toutes les tensions T_x, T_y, T_z sont égales et négatives. Le parallélépipède est alors soumis de tous les côtés à une pression constante $P = -T_x = -T_y = -T_z$. D'après la formule (76.1) les trois déformations relatives ε_x, ε_y, ε_z sont égales à

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E}(1-2\mu). \tag{77.1}$$

On les exprime aisément en fonction de la variation relative du volume du parallélépipède résultant de la déformation. En effet en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de l'égalité $V = xyz$ on obtient

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z},$$

soit

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{77.2}$$

On peut mettre la formule (77.1) sous la forme

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{K}, \tag{77.3}$$

où la constante K est donnée par

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \tag{77.4}$$

Cette constante est dite *module de compression triaxiale.* La formule (77.3) est applicable aux corps de n'importe quelle forme. Pour le démontrer il suffit de remarquer qu'un corps de forme arbitraire peut être subdivisé en petites parties, chacune ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Chacune de ces petites parties est soumise à une pression extérieure constante. Les variations relatives de leurs volumes et par suite celle du corps tout entier sont données par la formule (77.13).

Pour une *déformation due à la compression triaxiale* l'expression (76.3) de la densité de l'énergie élastique prend la forme

$$u = \frac{3(1-2\mu)}{2E} P^2 = \frac{P^2}{2K}. \tag{77.5}$$

Comme la quantité u est essentiellement positive, on doit avoir $1 - 2\mu > 0$, c'est-à-dire

$$\mu < \frac{1}{2}. \tag{77.6}$$

2. Un autre cas particulier important est celui d'une *déformation due à la traction ou à la compression uniaxiale.* Considérons une tige homogène pouvant être librement étirée ou comprimée le long de son axe (que nous choisirons pour axe de coordonnées X) sans que ses dimensions transversales varient. Ce cas présente une grande importance dans la théorie de la propagation des ondes longitudinales dans un milieu élastique illimité (cf. § 83). Dans le milieu considéré on peut délimiter en pensée une « tige » dont la direction axiale coïncide avec celle de la propagation de l'onde. Une telle « tige » peut s'allonger et se comprimer suivant son axe longitudinal; mais le milieu ambiant s'opposera à toute variation de ses dimensions transversales. Comme la forme de la section droite de la tige importe peu, nous prendrons une tige de section droite rectangulaire afin de pouvoir utiliser les formules (76.1). Supposons que le long de la tige s'exerce une tension constante T_x. On calculera les tensions transversales T_y et T_z à partir de la condition d'invariabilité des dimensions de la tige le long des axes Y et Z. En posant dans les formules (76.1) $\Delta y =$

$= \Delta z = 0$, nous obtenons

$$T_y - \mu (T_z + T_x) = 0, \quad T_z - \mu (T_x + T_y) = 0.$$

D'où

$$T_y = T_z = \frac{\mu}{1-\mu} T_x, \tag{77.7}$$

$$\varepsilon_x = \frac{T_x}{E} \left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}\right). \tag{77.8}$$

Introduisons la notation

$$E' = E \frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2} = E \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \tag{77.9}$$

ou

$$E' = \left[\frac{2}{3(1+\mu)} + \frac{1}{3(1-2\mu)}\right] E. \tag{77.10}$$

Nous obtenons alors

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E'}. \tag{77.11}$$

Cette relation est analogue aux relations (75.7). La constante E' est le *module de traction uniaxiale.*

PROBLÈME

Une plaquette rectangulaire est bloquée entre deux plans verticaux perpendiculaires à l'axe X, de sorte qu'aucun déplacement de matière ne peut avoir lieu le long de cet axe (fig. 202). Le long de l'axe Z la plaquette est soumise à une pression uniaxiale uniforme P. Calculer la pression P_x qu'exercent les plans verticaux sur la plaquette. Trouver l'expression de la densité de l'énergie élastique u, la compression relative de la plaquette le long de l'axe Z et l'allongement relatif le long de l'axe Y.

Réponse. $P_x = \mu P$, $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\mu P}{E} \times (1 + \mu)$, $\frac{\Delta z}{z} = -\frac{P}{E}(1 - \mu^2)$, $u = \frac{P^2}{2E}(1 - \mu^2)$.

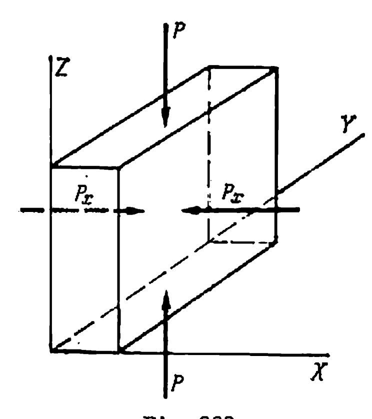


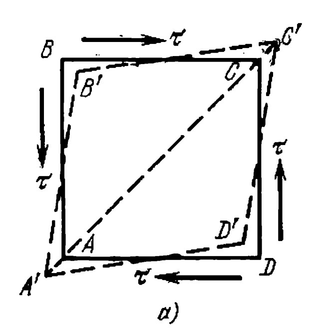
Fig. 202

§ 78. Le glissement

1. Prenons un cube d'une substance homogène et isotrope et appliquons à deux faces opposées AD et BC des forces tangentielles égales mais orientées en sens inverses (fig. 203, *a*). Ces deux forces forment un couple sous l'action duquel le cube se mettra en rotation. Pour bloquer la rotation on appliquera des forces tangentielles iden-

tiques à ses faces AB et CD. Dans ces conditions le cube ne tournera plus mais subira des déformations. La symétrie du tenseur des contraintes élastiques (cf. § 74) implique d'ailleurs qu'il est nécessaire d'appliquer aux faces AB et CD des contraintes tangentielles.

L'expérience montre que sous l'action des contraintes appliquées le carré $ABCD$ se transforme en losange $A'B'C'D'$; la diagonale AC s'allonge et la diagonale BD se raccourcit. Comme nous le démontrerons plus loin, le volume du corps déformé ne varie pratiquement pas.



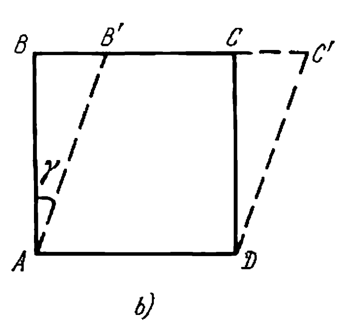


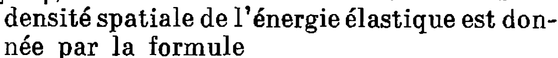
Fig. 203

Les variations relatives de volume résultant de ces déformations seront des quantités de plus grand ordre de petitesse que les variations relatives des longueurs des diagonales AC et BD. En théorie des petites déformations on néglige les quantités d'ordre de petitesse supérieur ; aussi pourra-t-on négliger les variations des longueurs des côtés du carré $ABCD$. Il s'ensuit qu'après déformation on pourra retourner le cube de manière que la nouvelle base $A'D'$ coïncide avec la base initiale AD (fig. 203, *b*). On en conclut que ce type de déformation est tel que toutes les couches du cube parallèles à la base AD glissent parallèlement à la direction AD. C'est pour cela que cette déformation s'appelle *glissement*. Le glissement est proportionnel à la distance entre la couche concernée et la base AD. On appelle *angle de glissement* l'angle γ formé par la face AB du cube non déformé avec cette même face AB' après déformation. Il est évident que la même déformation du cube peut résulter d'un glissement parallèlement à la face AB ou à la face CD, l'angle de glissement γ étant le même. Nous supposons bien entendu que l'angle γ est petit ($\gamma \ll 1$) afin de pouvoir utiliser la loi de Hooke. Pour une déformation de glissement cette loi peut s'écrire sous la forme

$$\tau = G\gamma, \qquad (78.1)$$

où τ est la contrainte tangentielle s'exerçant sur les faces du cube. La constante G est le *module de glissement* ; sa valeur dépend de la nature du matériau du cube.

2. Calculons la densité de l'énergie élastique accumulée dans le matériau lors d'une déformation de glissement. Ayant fixé la base AD (fig. 203, b), nous produirons un glissement quasi statique afin que tout le travail dépensé serve à accroître l'énergie élastique du corps. Le travail produit est $A = {}^1/_2\tau S\Delta x$, où Δx est le déplacement de la face BC résultant du glissement et S l'aire de cette face. En désignant par a la longueur de l'arête du cube, on a $\Delta x = a\gamma$ et par suite $A = {}^1/_2\tau Sa\gamma = {}^1/_2V\tau\gamma$, V étant le volume du cube. Aussi la densité spatiale de l'énergie élastique est donnée par la formule



$$u = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G}. \qquad (78.2)$$

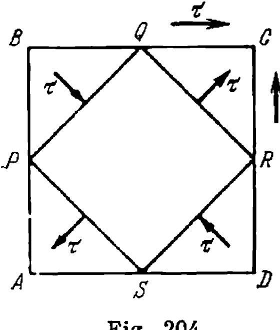


Fig. 204

3. Les contraintes tangentielles qui s'exercent parallèlement aux faces du cube se laissent ramener à un ensemble de contraintes et de pressions égales en valeur absolue mais appliquées suivant des directions orthogonales. Effectuons une coupe diagonale du cube suivant la trace AC (par un plan normal au plan de la figure 203, a). La force F agissant sur la partie ACD du cube dans le plan AC sera normale à ce plan et orientée vers l'intérieur de la partie ACD du cube. C'est donc une force de pression normale. Calculons cette pression. Si a est la longueur de l'arête du cube, la force F est évidemment égale à

$$F = a^2 (\tau \sin 45^\circ + \tau \cos 45^\circ) = \sqrt{2}a^2\tau.$$

L'aire de la section diagonale AC vaut $a^2\sqrt{2}$. En divisant F par cette aire nous trouvons la pression cherchée $P = \tau$. Donc dans la section diagonale AC, ainsi que dans tout plan qui lui est parallèle, la contrainte se réduit à une pression normale de valeur τ. On démontre par un raisonnement analogue que dans la section diagonale BD et dans tout plan parallèle s'exerce une tension normale T numériquement égale à τ.

4. D'après ce qui vient d'être dit il apparaît clairement que *le glissement est équivalent à une extension du corps suivant une certaine direction et à une compression suivant une direction orthogonale à la précédente.* Délimitons en pensée, dans notre cube, un parallélépipède rectangle de section droite $PQRS$ (fig. 204). Le long de la diagonale AC du cube, ce parallélépipède sera allongé par une tension $T = \tau$ et le long de la direction orthogonale BD il sera comprimé par une pression $P = \tau$. Suivant la direction perpendiculaire au plan de la figure, les dimensions du parallélépipède restent inchangées. Orientons l'axe X parallèlement aux arêtes PQ et SR et l'axe Y parallèlement aux arêtes QR et PS. En portant dans les formules (76.1)

$T_x = \tau$, $T_y = -\tau$ et $T_z = 0$, nous obtiendrons $\varepsilon_z = 0$, $\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0$. D'après (77.2) $\Delta V = 0$, ce qui signifie que la déformation du corps ne modifie pas son volume.

5. En utilisant le même raisonnement nous tirons de la formule (76.3) l'expression suivante pour la densité de l'énergie élastique accumulée lors du glissement:

$$u = \frac{1+\mu}{E}\tau^2. \tag{78.3}$$

Cette quantité doit coïncider avec (78.2) puisque la valeur de u ne peut dépendre du mode de calcul. En identifiant les deux formules, nous trouvons

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{78.4}$$

Cette formule établit une corrélation entre le module de Young E, le coefficient de Poisson μ et le module de glissement G. En utilisant (78.4) on tire des formules (77.10), (77.4)

$$E' = K + \frac{4}{3}G. \tag{78.5}$$

§ 79. La torsion

1. Toutes les déformations dont il a été question plus haut étaient des déformations *homogènes*, c'est-à-dire telles que tous les éléments infinitésimaux du corps étaient déformés également. *Les déformations de torsion et de flexion* que nous allons étudier maintenant *ne sont pas homogènes*, ce qui signifie qu'à l'intérieur du corps les déformations sont différentes d'un point à l'autre.

Prenons un fil homogène, fixons son extrémité supérieure et appliquons à son autre extrémité des forces de torsion créant un couple de torsion M relativement à l'axe longitudinal du fil. Le fil sera tordu, ce qui signifie que chaque rayon de sa base inférieure aura tourné d'un angle φ autour de l'axe longitudinal du fil. Cette déformation est dite *torsion*. Pour une déformation de torsion, la loi de Hooke s'écrit

$$M = f\varphi, \tag{79.1}$$

où f est une quantité constante pour un fil donné, portant le nom de *module de torsion*. A la différence des modules E, K, E', G et du coefficient μ, *le module de torsion dépend non seulement de la nature du matériau, mais aussi des dimensions géométriques du fil.*

2. Etablissons la formule du module de torsion f. Commençons par un tube cylindrique de rayon r et de longueur l en supposant que l'épaisseur δr de la paroi du tube est très petite devant le rayon r. L'aire de la base du tube est $2\pi r\delta r$. Le moment des forces appliquées à cette base est $M = 2\pi r\delta r \cdot \tau r$, τ étant la contrainte tangentielle

s'exerçant dans cette base. Lors de la torsion quasi statique du fil d'un angle φ, on effectue un travail $A = {}^1/_2 M\varphi = \frac{M^2}{2f}$. En divisant ce travail par le volume du tube $V = 2\pi r l \delta r$, nous obtenons la densité de l'énergie élastique accumulée pendant la déformation de torsion:

$$u = \frac{\pi \tau^2 r^3 \delta r}{fl}. \qquad (79.2)$$

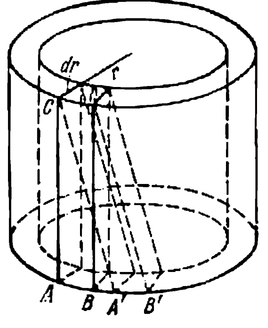


Fig. 205

On peut calculer cette densité en procédant comme suit. Dans le tube découpons en pensée un élément infiniment court (fig. 205). A la suite d'une déformation de torsion, l'élément infinitésimal $ABDC$ du tube occupera la position $A'B'DC$. Or c'est un glissement. On peut donc considérer les déformations de torsion comme des glissements non homogènes. La densité de l'énergie élastique lors du glissement est donnée par (78.2). En identifiant (78.2) à (79.2) nous trouvons la relation cherchée

$$f = \frac{2\pi G r^3 \delta r}{l}. \qquad (79.3)$$

Si l'épaisseur de la paroi du tube est finie, le module f se calcule en intégrant (79.3) par rapport à r:

$$f = \frac{\pi G}{2l}(r_2^4 - r_1^4), \qquad (79.4)$$

où r_1 est le rayon interne du tube et r_2 son rayon externe. Pour un fil massif de rayon r, on aura

$$f = \frac{\pi G}{2l} r^4. \qquad (79.5)$$

3. On peut déterminer expérimentalement le module de torsion en étudiant les oscillations de torsion d'un corps massif suspendu à l'extrémité inférieure du fil étudié. Ces oscillations seront harmoniques de période (cf. § 42)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}. \qquad (79.6)$$

Si on connaît le moment d'inertie I du corps, la mesure de la période T permet de calculer le module de torsion f.

PROBLÈMES

1. Soient deux fils d'un même matériau, de même longueur, le diamètre de l'un étant double de l'autre. Dans une première expérience on a tordu d'un même angle les bases inférieures des deux fils (par rapport aux bases supérieures).

Dans une seconde expérience on a soudé les bases des deux fils, de manière qu'ils aient un axe longitudinal commun; puis on a tordu la base inférieure du fil composé d'un certain angle par rapport à la base supérieure. Déterminer le rapport des énergies élastiques dans les deux expériences.

R é p o n s e. 1) $\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{16}$. 2) $\frac{U_1}{U_2} = 16$.

2. Une boule suspendue à un fil exécute autour d'un axe vertical des oscillations de torsion de période T. Calculer la période T' des oscillations de cette même boule lorsqu'on aura remplacé son fil de suspension par un tube cylindri-

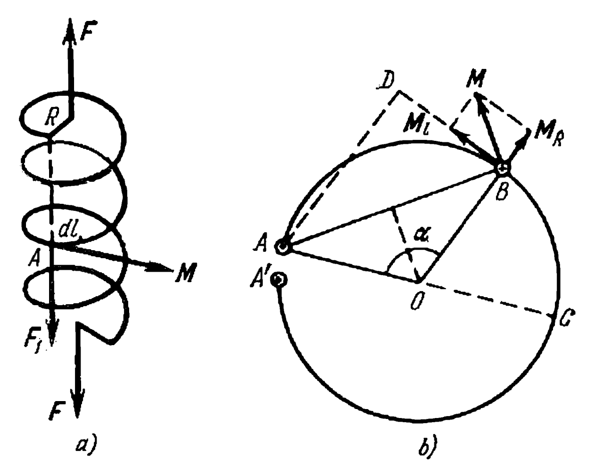


Fig. 206

que de même masse et de même longueur, de rayon extérieur R et de rayon intérieur r; le matériau du fil et du tube est le même.

R é p o n s e. $T' = T\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}}$.

3. Calculer l'allongement d'un ressort à boudin soumis à des forces de traction dirigées suivant son axe. Considérer que le pas de l'hélice est très petit par rapport au rayon R des spires et que le module de torsion du fil utilisé pour fabriquer le ressort est connu.

S o l u t i o n. Imaginons que l'on ait coupé le fil du ressort en un point quelconque A par un plan contenant l'axe du ressort (fig. 206, *a*). Soit F_1 la force qu'exerce au point A la partie inférieure du ressort sur sa partie supérieure. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que $F_1 = -F$, où F est la force de traction agissant sur la partie supérieure du ressort. Comme les forces F et F_1 forment un couple, le moment de ce couple ne dépend pas du point auquel on le rapporte. Ce moment est perpendiculaire au plan de coupe et vaut $M = FR$. Le pas de l'hélice étant petit, on peut admettre qu'au point A ce moment est dirigé suivant l'axe du fil. Pour que cette partie du ressort soit en état d'équilibre, il faut qu'apparaisse une torsion du fil autour de son axe afin de compenser le moment M. Lorsque les forces de traction F sont dirigées suivant l'axe du ressort, le module du moment M ne change pas le long du fil et la torsion de celui-ci sera donc uniforme. Soit dl un élément de longueur du fil. Sous l'action du moment M, cet élément se tordra d'un angle $d\varphi = M/f_1$, f_1 étant le module de torsion de l'élément considéré. Désignons par f le module de torsion du fil tout entier (si on l'a redressé). Comme le module de torsion est inversement proportionnel à la longueur

l_0 du fil, on a $f = f_1 \frac{dl}{l_0}$ et $d\varphi = \frac{M}{f}\frac{dl}{l_0}$. Par torsion de l'élément dl d'un angle $d\varphi$ l'extrémité inférieure du fil s'abaissera de $dx = R\,d\varphi = \frac{MR}{f}\frac{dl}{l_0} = \frac{FR^2}{f}\frac{dl}{l_0}$. En intégrant sur toute la longueur du fil, nous trouverons l'allongement du ressort

$$x = \frac{FR^2}{f}. \tag{79.7}$$

Introduisons le coefficient d'élasticité du ressort par la formule $F = kx$. Alors

$$k = \frac{f}{R^2}. \tag{79.8}$$

4. Traiter le problème précédent pour le cas où les forces de traction, au lieu d'être dirigées suivant l'axe du ressort, sont dirigées suivant l'une des génératrices de la surface cylindrique sur laquelle le ressort est enroulé.

S o l u t i o n. Considérons un segment arbitraire AB du fil (fig. 206, *b*). Les forces qui agissent sur ses extrémités sont normales au plan de la figure (donc parallèles à l'axe longitudinal du ressort). Chacune de ces forces est égale à la force extérieure F appliquée au ressort. La force qui pointe vers le lecteur sera indiquée par un point et celle de sens contraire par une croix. Le moment M des forces appliquées au segment considéré est perpendiculaire à la corde AB et vaut $M = 2FR \sin(\alpha/2)$. Décomposons ce moment en une composante M_l dirigée le long du fil et en une composante M_R perpendiculaire au fil. Si le ressort comporte un grand nombre de spires, on peut négliger la composante M_R, car elle détermine la torsion du fil autour d'un axe parallèle au rayon OB. Or ce moment tord la partie AC dans un sens et la partie CA' dans le sens opposé; si le nombre de spires est grand, cette torsion n'exerce pratiquement aucune influence sur l'allongement du ressort. Le moment M_l est égal à $M \sin(\alpha/2) = 2FR \sin^2(\alpha/2)$. Il tord un élément dl du fil d'un angle $d\varphi = \frac{M_l}{f_1} = \frac{M_l}{f}\frac{dl}{l_0}$ et déplace l'extrémité libre du ressort d'une distance

$$dx = AD \cdot d\varphi = AB \sin\frac{\alpha}{2} \cdot d\varphi = \frac{4FR^2}{fl_0} \sin^4\frac{\alpha}{2}\,dl = \frac{4FR^3}{fl_0} \sin^4\frac{\alpha}{2}\,d\alpha.$$

A la différence du cas précédent la torsion du fil n'est pas homogène. En intégrant sur toute la longueur du ressort et en supposant un nombre entier de spires on obtient

$$x = \frac{3}{4}\frac{FR^2}{f}.$$

§ 80. La flexion

1. Considérons la flexion d'une poutre homogène, de section droite arbitraire qui reste la même sur toute la longueur de la poutre. Supposons qu'avant déformation la poutre était rectiligne. Soient AB et $A'B'$ deux sections normales à l'axe de la poutre; imaginons que l'on découpe dans la poutre un élément $AA'B'B$ infiniment petit (fig. 207, *a*) de longueur l_0. Cet élément étant infiniment petit, on peut admettre qu'à la suite de la flexion les droites AA', NN', BB' et toutes les droites qui leur sont parallèles deviendront des cercles dont les centres se trouvent sur l'axe O normal au plan de la figure (fig. 207, *b*). Cet axe est l'*axe de flexion*. Les fibres extérieures se trouvant au-dessus de la ligne NN' s'allongent à la flexion et celles qui se trouvent au-dessous de cette ligne raccourcissent. La longueur de la ligne NN' reste constante. C'est la *ligne neutre*.

La section par un plan normal au plan de la figure 207, *a* et contenant la ligne neutre s'appelle *section neutre*. Ainsi toutes les fibres extérieures sont en extension et toutes les fibres intérieures en compression. Soit R le rayon de courbure de la ligne neutre NN'. Alors $l_0 = R\alpha$, α étant l'angle au centre s'appuyant sur l'arc NN'. Considérons une fibre se trouvant à une distance ξ de la section neutre. (ξ est positif si la fibre se trouve au-dessus de NN' (fig. 207, *b*) et négatif si elle se trouve au-dessous.) Si la poutre n'est pas trop grosse, c'est-à-dire $|\xi| \ll R$, la longueur de la fibre considérée sera égale à $l = (R + \xi)\alpha$ et son

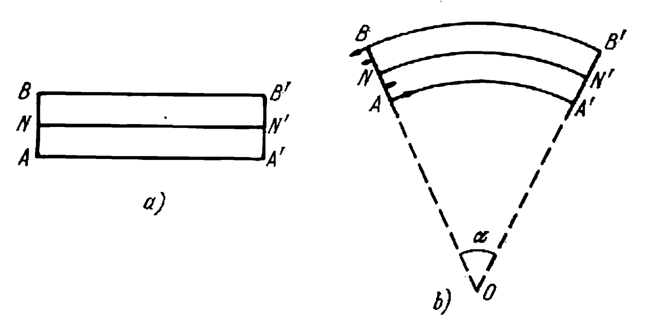


Fig. 207

allongement sera égal à $\Delta l = l - l_0 = \xi\alpha$. Il s'ensuit que la tension qui agit le long de la fibre considérée est $\tau = E\frac{\Delta l}{l_0} = E\xi\frac{\alpha}{l_0}$, soit

$$\tau = E\frac{\xi}{R}. \qquad (80.1)$$

On voit que la tension varie linéairement avec la distance ξ. Au-dessous de la section neutre elle est négative et correspond donc à une pression. La somme des forces de traction et de pression s'exerçant dans la section AB peut être différente de zéro, mais dans ce cas à la flexion de la poutre se superpose une extension ou une compression qui est la même pour toutes les fibres. On peut en tenir compte et l'exclure des calculs dans l'étude de la flexion pure. Nous admettrons donc que la somme de toutes les forces de traction s'exerçant dans toutes les sections droites de la poutre est nulle, i.e. $\int \tau\, dS = 0$, soit en vertu de (80.1) $\int \xi\, dS = 0$, dS est l'élément de surface de la section droite considérée. L'intégration est étendue à toute la surface de la section droite considérée. Il en découle que la ligne neutre et la section neutre passent par le centre de gravité de la section droite de la poutre. Comme $\int \tau\, dS = 0$, le moment des forces de traction M_τ s'exerçant dans la section AB ne dépend pas de l'axe auquel on le rapporte. Pour le calcul de M_τ il est commode de choisir l'axe normal au plan de la figure et passant par le point N. Il est évident que

$$M_\tau = \int \xi\tau\, dS = \frac{E}{R}\int \xi^2\, dS,$$

soit

$$M_\tau = \frac{E}{R} I. \qquad (80.2)$$

où

$$I=\int \xi^2\, dS. \tag{80.3}$$

La quantité I porte le nom de *moment d'inertie* de la section droite de la poutre, ceci par analogie avec la quantité correspondante introduite lors de l'étude de la rotation d'un corps autour d'un axe fixe. A la différence de cette dernière quan-

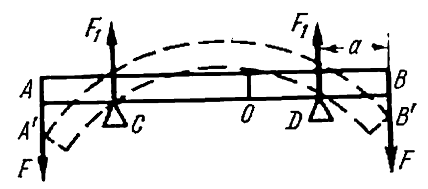


Fig. 208

tité ayant la dimension du produit de la masse par le carré de la longueur, le moment (80.3) est une quantité géométrique dont la dimension est une longueur élevée à la puissance quatre.

On peut utiliser ici les formules des moments d'inertie du § 36 à condition d'y remplacer la masse m par l'aire S de la section droite. Si la section droite est rectangulaire, de largeur a et de hauteur b, on a

$$I=\frac{ab^3}{12}. \tag{80.4}$$

Pour une section droite circulaire, de rayon r

$$I=\frac{\pi r^4}{4}. \tag{80.5}$$

Pour un tube cylindrique de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2

$$I=\frac{\pi}{4}(r_2^4-r_1^4). \tag{80.6}$$

Faisons coïncider l'axe X avec la ligne neutre de la poutre non déformée. Dirigeons l'axe Y suivant la normale à la poutre dans le plan de la flexion. L'équation de la ligne neutre de la poutre fléchie sera $y = y(x)$. Selon la formule connue

$$\frac{1}{R}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Si la flexion est petite ($y' \ll 1$), on peut négliger le carré de la dérivée et dans cette approximation

$$M_\tau = EIy''. \tag{80.7}$$

2. Imaginons qu'on découpe une partie arbitraire de la poutre (finie ou infiniment petite) en y pratiquant deux sections droites. A l'équilibre le moment des forces élastiques de traction s'exerçant sur les deux bouts de la partie découpée doit être équilibré par les moments de sens opposé de toutes les autres forces extérieures appliquées à cette partie de la poutre. Cette proposition suggère une méthode de résolution des problèmes sur la flexion que nous illustrons par les exemples ci-dessous, ainsi que par les problèmes proposés à la fin de ce paragraphe.

E x e m p l e 1. Une tige homogène AB repose sur deux supports C et D symétriques (fig. 208). On applique aux extrémités A et B de la tige des forces F

égales et de même sens. Calculons la forme que prend la tige à l'état d'équilibre en négligeant son poids propre. Par raison de symétrie, les supports C et D exercent sur la tige des forces identiques F_1 et F_1 toutes deux égales à F. Considérons une section droite passant par un point arbitraire O de la tige. Il nous suffit de connaître les conditions d'équilibre de l'une des parties de la tige, la partie OB par exemple. Les tensions élastiques créent dans la section O un moment de rotation M_τ donné par la formule (80.2). Le couple des forces F_1 et F crée un moment $M = Fa$ dirigé en sens inverse ; a est la distance entre les points d'application des forces F_1 et F. Aucun des moments M_τ et M ne dépend de la position de l'axe par rapport auquel on les définit. En outre le moment M ne dépend pas de la position du point O et conserve sa valeur tout le long de la tige. L'équation d'équilibre $M_\tau = M$ prend la forme $IE/R = Fa$ qui montre que le rayon de courbure R est le même en tout point de la ligne neutre de la tige. Il en résulte qu'à l'état d'équilibre la tige sera incurvée en forme d'arc de cercle, comme indiqué en pointillé sur la figure 208.

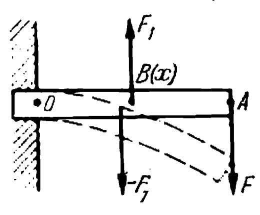


Fig. 209

A titre d'expérience prenons une planche de bois et enfonçons des clous aux points A', B', C, D. Si on dispose entre ces clous une règle d'acier flexible, elle prendra dans les conditions décrites la forme d'un arc de cercle. C'est un procédé pratique pour tracer des cercles lorsque le compas ne convient pas (cercle de très grand rayon).

E x e m p l e 2. Calculer la flèche d'une poutre encastrée à un bout dans un mur (fig. 209). L'autre extrémité de la poutre est soumise à l'action d'une force concentrée F. On négligera le poids propre de la poutre. On appelle flèche le déplacement de l'extrémité libre de la poutre déterminé par l'action d'une force appliquée F.

Plaçons l'origine des coordonnées au point O où la ligne neutre de la poutre est coupée par le plan du mur. Faisons passer une section droite par un point arbitraire B (x) (de coordonnée $x = OB$). Pour qu'il y ait équilibre il faut que la force F_1 qu'applique la partie OB sur la partie BA de la poutre soit dirigée vers le haut et égale à F. Les forces F_1 et F forment un couple de moment $M = F(l - x)$, où l est la longueur de la poutre. Le moment des forces de traction peut s'exprimer par la formule approchée (80.7) si la flèche est petite. On arrive ainsi à l'équation

$$EIy'' = F(l - x).$$

(L'axe y pointe vers la concavité, c'est-à-dire vers le bas. La dérivée seconde y'' est alors positive et les deux membres de cette relation sont de même signe.) Une première intégration donne

$$y' = \frac{F}{EI}\, x \left(l - \frac{x}{2}\right) + C.$$

La constante d'intégration C est nulle puisque pour $x = 0$, c'est-à-dire au point O, la tangente à la ligne neutre est horizontale. En intégrant encore une fois et en remarquant qu'au point O $(x = 0)$ $y = 0$, on obtient

$$y = \frac{Fx^2}{2EI}\left(l - \frac{x}{3}\right). \qquad (80.8)$$

En posant $x = l$ nous trouvons la flèche

$$\lambda = \frac{Fl^3}{3EI}. \qquad (80.9)$$

E x e m p l e 3. Calculons la flèche au centre d'une poutre reposant sur deux supports et chargée en son centre O par une force concentrée F dirigée

vers le bas (fig. 210). On néglige le poids propre de la poutre. Par raison de symétrie la force F se répartira également entre les deux supports. Plaçons l'origine des coordonnées au point A sur la ligne neutre situé au-dessus du support de gauche. Tranchons en pensée la partie gauche de la poutre le long d'une section droite passant par un point C (x) (de coordonnée x) situé à gauche du centre O ($x < l/2$, où l est la longueur de la poutre). Sur cette partie de la poutre l'autre

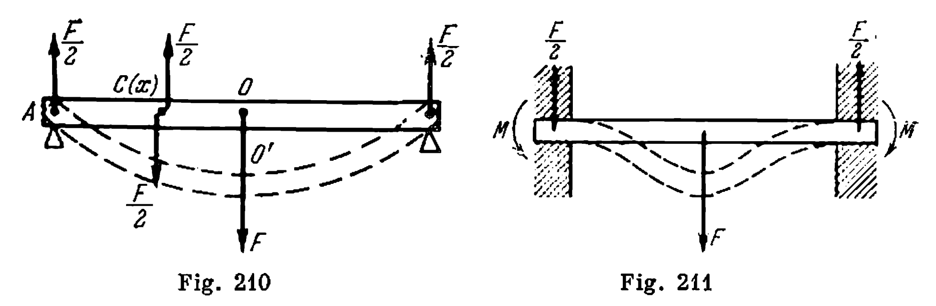


Fig. 210 Fig. 211

partie exercera une force $F/2$ pointant vers le bas. Le moment des forces extérieures agissant sur la partie tranchée est $M = (F/2)\, x$. L'équation de l'équilibre est

$$EIy'' = -\frac{F}{2}\, x \quad \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right). \tag{80.10}$$

L'axe Y pointe vers le bas dans le sens de la convexité de la poutre. La dérivée y'' étant négative, le deuxième membre de l'équation est affecté du signe moins. Intégrons l'équation (80.10) ; en remarquant que $y' = 0$ pour $x = l/2$, $y = 0$ pour $x = 0$, nous obtenons

$$y = \frac{Fx}{48EI}(3l^2 - 4x^2) \quad \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right). \tag{80.11}$$

En posant $x = l/2$ nous trouvons la flèche

$$\lambda = \frac{Fl^3}{48EI}. \tag{80.12}$$

Ce résultat peut également être obtenu à partir de la formule (80.9) puisqu'au point O' la tangente à la ligne neutre de la poutre infléchie est horizontale (fig. 210). Si on fait passer la section de coupe par le point O', la poutre sera sectionnée en deux parties égales et chacune de ces parties sera équivalente à une poutre encastrée à une extrémité au point O' ; les extrémités libres de ces parties sont soumises à l'action de la force concentrée $F/2$ dirigée vers le haut. Il s'ensuit que la flèche du centre de la poutre peut être calculée à l'aide de la formule (80.9) en y effectuant les substitutions: $F \to F/2$, $l \to l/2$. On obtient alors

$$\lambda = \frac{1}{3EI}\,\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{Fl^3}{48EI},$$

donc le résultat (80.12).

E x e m p l e 4. Calculons la flèche au centre d'une poutre homogène encastrée aux deux bouts, cette flèche étant déterminée par l'action d'une force F concentrée en son centre (fig. 211). On néglige de nouveau le poids propre de la poutre. Dans l'exemple précédent, lorsque la poutre reposait librement sur deux supports (fig. 210) chacun de ceux-ci opposait à la poutre une force de pression $F/2$. Dans le cas d'une poutre encastrée aux deux bouts la résultante des

forces de réaction du support agissant sur chaque extrémité de la poutre est toujours égale à $F/2$. Mais les forces de réaction créent encore un moment de rotation M auquel est soumise la poutre. A la place de l'équation (80.10) on aura maintenant

$$EIy''=-\frac{F}{2}x+M \quad \left(x\leqslant\frac{l}{2}\right). \tag{80.13}$$

On suppose que le moment M est inconnu et doit être calculé. L'équation (80.13) doit être résolue en respectant les conditions suivantes: 1) $y'=0$ pour $x=0$; 2) $y'=0$ pour $x=l/2$, 3) $y=0$ pour $x=0$. Nous obtenons alors

$$M=\frac{Fl}{8},$$

$$y=\frac{Fx^2}{16EI}\left(l-\frac{4}{3}x\right), \tag{80.14}$$

$$\lambda=\frac{Fl^3}{192EI}.$$

Exemple 5. Considérons maintenant la flexion d'une poutre sous l'action de son propre poids P dans le cas où elle est encastrée à un bout, l'autre étant libre (fig. 212). Pour que la poutre tout entière soit en équilibre, il faut que le mur applique à l'extrémité O de la poutre une force égale au poids P et dirigée de bas en haut. Considérons une section droite passant par un point $B(x)$ de la ligne neutre (de coordonnée $OB=x$). Dans l'exemple 2 où on avait traité un problème analogue, nous avons adopté la condition d'équilibre de la partie BA de la poutre. On pourrait fort bien utiliser ici ce procédé, mais nous préférons utiliser la condition d'équilibre de l'autre partie (OB) de la poutre pour bien montrer la marche à suivre. Soit F la force qu'applique la partie BA sur l'extrémité droite de la partie OB de la poutre. Le poids de la partie OB est Px/l. Pour que la partie OB soit en équilibre il faut que soit vérifiée l'égalité $P=F+Px/l$ ou $F=P(1-x/l)$. Un élément $d\xi$ de la poutre est soumis à la force de pesanteur $P\frac{d\xi}{l}$. Le moment M_1 de toutes les forces verticales agissant sur la partie OB ne dépend pas de la position de l'axe auquel on le rapporte. On peut donc le rapporter à un axe passant par le point O. Nous obtenons

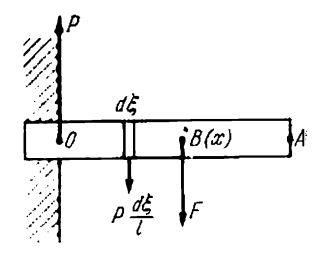


Fig. 212

$$M_1=Fx+\int_0^x P\xi\frac{d\xi}{l}=Px-P\frac{x^2}{2l}.$$

On doit ajouter encore le moment des forces horizontales des contraintes élastiques qui sont appliquées à l'extrémité encastrée O. En désignant ce moment par M_2, nous trouvons le moment total des forces appliquées sur la partie OB de la poutre:

$$M=Px-P\frac{x^2}{2l}+M_2. \tag{80.15}$$

Le moment constant M_2 se laisse déterminer à partir de la condition d'équilibre de la poutre tout entière OA. Comme sur l'extrémité libre de la poutre n'agit aucune force et aucune contrainte élastique, en posant $x=l$ dans (80.15) nous

trouvons le moment total des forces actives. A l'équilibre il doit être nul, c'est-à-dire $Pl - P\frac{l^2}{2l} + M_2 = 0$. D'où $M_2 = -Pl/2$. Ainsi

$$M = Px - P\frac{x^2}{2l} - P\frac{l}{2}. \tag{80.16}$$

L'équation caractérisant l'équilibre de la partie OB de la poutre est donc

$$EIy'' = -Px + P\frac{x^2}{2l} + P\frac{l}{2}.$$

Avec les conditions: 1) $y' = 0$ pour $x = 0$, 2) $y = 0$ pour $x = 0$, nous obtenons

$$y = \frac{P}{4EI}lx^2 - \frac{P}{6EI}x^3 + \frac{P}{24EI}\frac{x^4}{l}. \tag{80.17}$$

En y posant $x = l$ nous trouvons la flèche à l'extrémité libre de la poutre

$$\lambda = \frac{P}{8EI}l^3. \tag{80.18}$$

Si on fait agir sur l'extrémité libre de la poutre une force extérieure F dirigée de haut en bas, à la place des formules (80.16) et (80.18) on obtiendra aisément

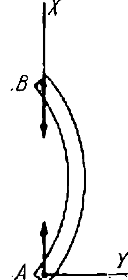


Fig. 213

$$M = F(x-l) + Px - P\frac{x^2}{2l} - \frac{Pl}{2}, \tag{80.19}$$

$$\lambda = \frac{l^3}{EI}\left(\frac{F}{3} + \frac{P}{8}\right). \tag{80.20}$$

La flèche qui en résulte est donc égale à la somme des flèches calculées pour une action indépendante des forces F et P. Ce résultat est vérifié pour n'importe quelles petites déformations et non seulement pour les déformations de flexion, ce qui est immédiat d'après le principe de superposition.

E x e m p l e 6. Une tige élastique AB de longueur l est comprimée par application à ses deux bouts de deux forces F égales et opposées portées par la même droite (fig. 213). Les extrémités de la tige sont fixées à des articulations, ce qui leur permet de se déplacer librement suivant la direction d'application des forces. A partir d'une certaine charge F la tige commence à s'infléchir de côté. Ce fait indique qu'outre l'état comprimé il existe d'autres états d'équilibre de la tige. La figure 213 illustre l'état de la tige infléchie. Orientons l'axe X le long de l'axe longitudinal de la tige non déformée et l'axe Y le long d'une direction rectangulaire dans le sens de l'incurvation. L'équation d'équilibre de la tige incurvée est de la forme

$$y'' + k^2y = 0, \tag{80.21}$$

où

$$k^2 = \frac{F}{EI}. \tag{80.22}$$

La solution générale de cette équation est

$$y = C\cos kx + D\sin kx,$$

où C et D sont les constantes d'intégration. Si on place l'origine des coordonnées à l'une des extrémités de la tige, on doit avoir $C = 0$, puisque pour $x = 0$ l'ordonnée doit s'annuler. A l'autre extrémité de la tige où $x = l$, l'ordonnée

y doit également être nulle. Par suite $D \sin kl = 0$ *). Si $\sin kl \neq 0$, alors $D = 0$ et par suite $y = 0$. Dans ce cas la tige ne peut être que comprimée sans aucune incurvation. Mais lorsque $\sin kl = 0$, i.e. $kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, la forme d'équilibre rectiligne de la tige bien qu'étant encore possible en théorie, ne saurait être stable ; la tige s'incurve alors en forme d'arc de sinusoïde conformément à l'équation $y = D \sin kx$, où la constante D dépend de la flèche, donc en fin de compte de la charge imposée. Les valeurs de l et de F correspondant à la plus petite racine ($kl = \pi$)

$$l = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{EI}{F}} \quad \text{et} \quad F = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \qquad (80.23)$$

portent respectivement le nom de *longueur critique* et de *charge limite* d'une flexion longitudinale. Ces quantités peuvent être considérées comme les valeurs limites de la longueur ou de la charge à partir desquelles la tige commence à s'incurver, à moins qu'elle ne soit détruite avant par les forces appliquées.

Dans le cas où les deux bouts de la tige sont encastrés (fig. 214), on devra encore tenir compte des moments complémentaires des forces qui agissent aux deux bouts de la tige, comme dans l'exemple 4. A la place de l'équation (80.21) on devra alors résoudre l'équation

$$y'' + k^2 y = k^2 C,$$

où C est une constante qu'il faut calculer. La solution générale de cette équation est :

$$y = A \cos kx + B \sin kx + C.$$

Fig. 214

La condition $y = 0$ pour $x = 0$ conduit à $A + C = 0$. La deuxième condition $y' = 0$ pour $x = 0$ impose $B = 0$, de sorte que

$$y = A (\cos kx - 1).$$

On doit encore exiger que y et y' s'annulent également à l'autre extrémité de la tige. Ceci donne deux nouvelles conditions: 1) $\cos kl = 1$, 2) $\sin kl = 0$. On en tire $kl = 2\pi, 4\pi, \ldots$ Dans ce cas la longueur critique est deux fois plus grande et la charge limite quatre fois plus grande que dans le cas précédent :

$$l = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{EI}{F}}, \qquad F = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}. \qquad (80.24)$$

Dans le cas où une extrémité de la tige est encastrée et l'autre fixée à une charnière, on obtient pour les mêmes quantités

$$l = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{F}}, \qquad F = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}. \qquad (80.25)$$

PROBLÈMES

1. Calculer la flèche formée au centre d'une poutre homogène sous l'action de son propre poids P lorsque ses deux extrémités reposent sur des supports.

*) En toute rigueur on doit entendre par l non pas la longueur de la tige elle-même, mais la distance linéaire entre les extrémités de la tige incurvée. Cette distance doit évidemment varier avec la charge et est une grandeur à calculer. Cependant, les déformations étant petites, cette correction est petite, c'est pourquoi on identifie l à la longueur de la tige elle-même.

Réponse. $\lambda = \frac{5}{384}\frac{Pl^3}{EI}$.

2. Même question dans le cas d'une poutre encastrée aux deux bouts dans les murs.

Réponse. $\lambda = \frac{1}{384}\frac{Pl^3}{EI}$.

3. Calculer la répartition du poids P d'une poutre reposant sur trois supports A, B, C (fig. 215). Le support moyen C se trouve au milieu de la distance AB et est décalé de λ vers le bas par rapport au plan horizontal contenant les points d'appui des supports A et B.

Solution. A l'équilibre $F_1 + F_2 + F_3 = P$; pour des raisons de symétrie $F_1 = F_2$. Imaginons qu'on enlève les supports et qu'on les remplace

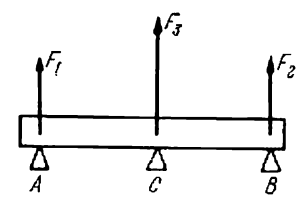


Fig. 215

par les forces F_1, F_2, F_3 égales aux forces de réaction que les supports appliquaient à la poutre. De plus nous fixerons la poutre par son milieu. En procédant ainsi nous ne modifierons pas les déformations de la poutre. Utilisons les formules (80.9) et (80.18). Sous l'action de la force F_1 l'extrémité gauche de la poutre se relèvera, par rapport au niveau du support du milieu, d'une longueur $y_1 = \frac{F_1}{3EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3$. Sous l'action de son propre poids cette même extrémité de la poutre s'affaissera d'une longueur $y_2 = \frac{P}{2}\frac{1}{8EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3$. La longueur de relèvement résultante est donc $y_1 - y_2$. D'après l'énoncé du problème elle doit être égale à λ. On obtient finalement

$$F_1 = F_2 = \frac{3}{16}P + \frac{24EI\lambda}{l^3}, \quad F_3 = \frac{5}{8}P - \frac{48EI\lambda}{l^3}.$$

Si les trois supports se trouvent tous au même niveau, on a

$$F_1 = F_2 = \frac{3}{16}P, \quad F_3 = \frac{5}{8}P.$$

Dans ce cas la répartition du poids de la poutre entre les trois supports ne dépend pas de ses propriétés élastiques, bien que si on n'en tenait pas compte le problème serait indéterminé (cf. § 44). Ce résultat est dû à ce que nous n'avons pas tenu compte des déformations des supports eux-mêmes.

4. Même problème que ci-dessus, à cette différence près que le support C (fig. 215) ne se trouve pas au milieu de la distance AB ($AC = a$, $CB = b$).

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées dans la section neutre au-dessus du support A en orientant l'axe X à droite et l'axe Y suivant la verticale descendante. En écrivant les équations d'équilibre pour les parties AC ($x \leqslant a$) et CB ($x \geqslant a$) et en les intégrant sous les conditions: $y = 0$ pour $x = 0$

et $x = a + b \equiv l$, et $y = \lambda$ pour $x = a$, on obtient

$$y = \frac{\lambda}{a} x + \frac{F_1 x}{6EI} (a^2 - x^2) - \frac{Px}{24EIl} (a^3 - x^3) \qquad (x \leqslant a),$$

$$y = \frac{\lambda}{b} (l - x) + \frac{F_2 (l - x)}{6EI} [b^2 - (l - x)^2] - \frac{P (l - x)}{24EIl} [b^3 - (l - x)^3] \quad (x \geqslant a).$$

On doit aussi exiger qu'il n'y ait pas de cassure de la poutre au point C, ce qui impose que les dérivées premières de ces deux expressions coïncident pour $x = a$. On doit encore prendre en considération qu'à l'équilibre la somme de toutes les forces extérieures et de leurs moments agissant dans la poutre tout entière soit nulle. Le résultat est le suivant:

$$F_1 = \frac{3EI}{a^2 b} \lambda + \frac{P}{8} \frac{3a^2 + ab - b^2}{a (a + b)},$$

$$F_2 = \frac{3EI}{ab^2} \lambda + \frac{P}{8} \frac{3b^2 + ab - a^2}{b (a + b)},$$

$$F_3 = -\frac{3EI (a + b)}{a^2 b^2} \lambda + \frac{P}{8} \frac{3ab + a^2 + b^2}{ab}.$$

5. Une tige cylindrique et un tube fabriqués en un même matériau, ayant même masse et même longueur, reposent par leurs extrémités sur deux supports et s'incurvent sous l'action de leurs propres poids. Calculer le rapport λ_1/λ_2 de leurs flèches si le rayon de la tige est r et le rayon du tube est R.

Réponse. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2R^2 - r^2}{r^2}$.

6. Lorsqu'on place sur deux supports une feuille de papier plat, elle s'incurve et tombe sous l'action de son propre poids. Mais si on la roule pour en faire un cylindre compact ou un tube et que l'on colle le bord de la feuille, ces corps se comportent comme des solides. On peut même les charger sans qu'ils s'incurvent notablement. Expliquer ce comportement après avoir calculé les moments d'inertie I_1, I_2, I_3 des sections droites correspondantes. La longueur de la feuille (la distance entre les supports) est l, sa largeur est a et son épaisseur h.

Réponse. $I_1 = \frac{1}{12} ah^3$, $I_2 = \frac{1}{4\pi} (ah)^2$, $I_3 = \frac{1}{8\pi^2} a^3 h$.

7. Disposant d'un rondin de diamètre D, on doit en faire une poutre de section droite rectangulaire dont la flexion soit aussi petite que possible. Calculer la largeur a et l'épaisseur b de cette poutre.

Réponse. $a = \frac{D}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2} D$. Le problème consiste à étudier les extrémums de l'expression ab^3 avec la condition supplémentaire $a^2 + b^2 = \text{const}$.

§ 81. Vitesse de propagation des perturbations élastiques longitudinales dans les tiges

1. Lorsqu'une déformation apparaît en un point quelconque d'un milieu élastique et qu'aussitôt après on supprime la contrainte, cette déformation ne reste pas sur place mais se propage dans le milieu en toutes directions. On dit alors qu'il se produit dans le milieu une propagation des *perturbations* ou *ondes élastiques*. Comme exemple nous citerons les ondes sonores générées dans les corps solides, liqui-

des ou gazeux. Fixons par exemple une longue tige de fer en position horizontale. Si on donne un coup de marteau sur une extrémité de la tige, on y voit apparaître une déformation de compression qui se propagera à grande vitesse le long de la tige. Pour déceler la propagation de cette déformation, enfilons sur la tige une bobine dont les extrémités sont connectées aux bornes d'un oscillographe (fig. 216). La tige en fer est toujours aimantée ne serait-ce que sous l'action du champ magnétique terrestre. Tant qu'il n'y a pas de perturbation, le flux magnétique à travers la bobine est constant et aucun courant

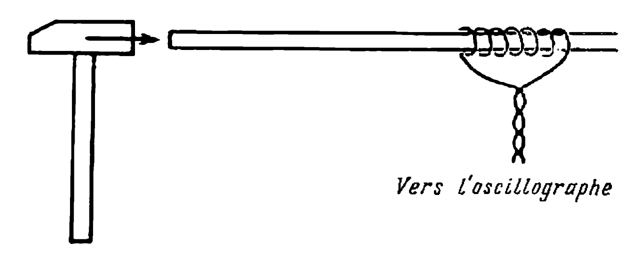


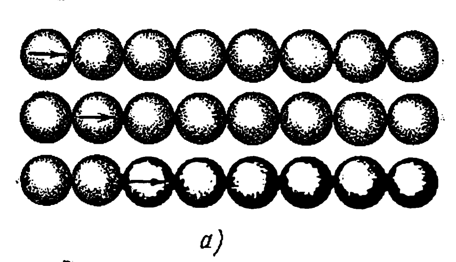
Fig. 216

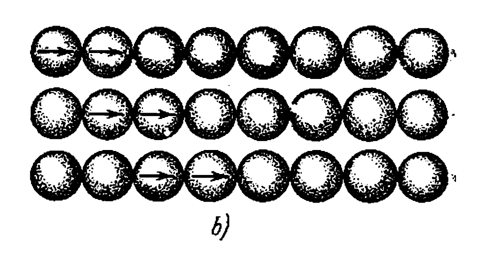
électrique n'y circule. Mais si la perturbation parvient jusqu'à la partie de la tige où est enfilée la bobine, le flux magnétique qui la traverse varie et un courant induit est détecté par l'oscillographe.

Il est généralement difficile d'étudier la propagation d'une perturbation élastique le long d'une tige étant donné sa grande vitesse et la petitesse de la perturbation. Mais on y parvient très bien en utilisant un modèle constitué par un ressort à boudin de grande longueur fabriqué avec un fil métallique doux et suspendu horizontalement par des fils de suspension. Si on applique une légère percussion à l'un de ses bouts, on voit la déformation de compression se propager le long du ressort. Si le bout du ressort était étiré, on verrait apparaître une *déformation de traction* qui se propagerait elle aussi à une vitesse déterminée le long du ressort.

2. Une question importante est celle de la *vitesse de propagation des perturbations élastiques*. Etudions-la d'abord pour les perturbations élastiques se propageant le long d'une tige. Commençons par un modèle. Soit une rangée rectiligne de billes solides identiques et parfaitement élastiques en contact les unes avec les autres. Supposons que cette rangée se prolonge indéfiniment vers la droite (fig. 217). Ce modèle n'a pas été spécialement conçu pour l'étude de la propagation des perturbations élastiques dans les tiges, mais permet de se faire très simplement une idée sur la répartition de la vitesse du mouvement de la substance dans une tige où se propage une perturbation créée par l'action d'une force déterminée. En frappant la première bille on lui communique une vitesse v (fig. 217 *a*). Cette

bille ira percuter la bille adjacente. On sait (cf. § 28) que si le choc est élastique, il se produit un simple échange de vitesse, de sorte que la première bille s'arrêtera et la deuxième sera mise en mouvement à la même vitesse v. Ensuite la deuxième bille transmettra par choc son mouvement à la troisième, puis s'arrêtera, et ainsi de suite, le mouvement se transmettant d'une bille à la suivante. C'est ainsi qu'apparaît une perturbation se propageant de proche en proche le long de la rangée de billes. Désignons par c la vitesse de propagation de cette perturbation en remarquant bien qu'elle n'a rien à voir avec la vitesse v du mouvement qu'effectue une des billes à l'instant considéré. Modifions maintenant les conditions de l'expérience. A l'instant où la première bille percute la deuxième et s'arrête, frappons-la de nouveau de manière à lui communiquer la même vitesse v. A l'instant considéré les deux premières billes de la rangée posséderont la même vitesse v. Lorsqu'ensuite la deuxième bille percutera la troisième et s'arrêtera en lui communiquant sa vitesse v, la première percutera la deuxième et s'arrêtera. Ainsi le mouvement sera transmis des deux premières billes aux deuxième et troisième billes; ensuite le mouvement sera transmis à la troisième et à la quatrième bille et ainsi de suite. Autrement dit, la rangée de billes sera parcourue par une perturbation telle qu'à tout instant deux billes en contact mutuel seront en mouvement, toutes les autres étant au repos (fig. 217,*b*). Supposons maintenant qu'à chaque fois que la première bille transmet son mouvement à la deuxième, elle reçoit une nouvelle percussion qui rétablit sa vitesse v. L'état de ce mouvement est représenté par les schémas de la figure 217,*c*. Toutes les billes se trouvant à un instant donné à gauche d'une certaine frontière se meuvent à la vitesse v et les billes qui se trouvent


a)


b)

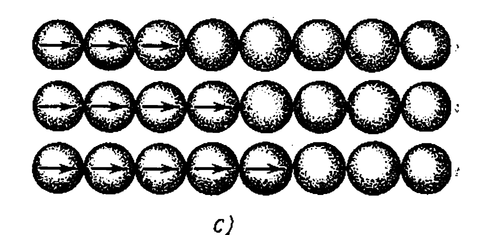

c)

Fig. 217

à droite de cette frontière sont au repos. La frontière elle-même se déplace à droite à la vitesse c entraînant dans son mouvement de nouvelles billes.

Il est évident que l'on ne change rien à l'affaire si on remplace les billes par de petits cylindres élastiques en contact les uns avec les autres par leurs bases (fig. 218). Il ne reste plus qu'un pas à faire pour passer à un milieu continu. A mesure que les dimensions des cylindres diminuent et que leur nombre croît, la fréquence des chocs auxquels est soumis le premier cylindre ne cesse de croître et la force

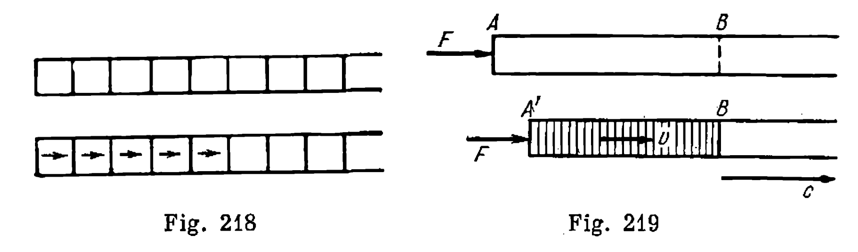


Fig. 218 Fig. 219

de percussion qui leur est appliquée diminue en proportion. A la limite on aboutit à une tige massive sur l'extrémité libre de laquelle est appliquée une force constante F (fig. 219). Notre modèle ne diffère d'une tige réelle qu'en ce qu'il ne présente aucune résistance à la rupture. Ce fait n'a aucune importance tant qu'il s'agit de la propagation d'une perturbation de compression, puisque notre modèle présente une résistance à la compression. On pourrait perfectionner notre modèle en disposant entre les cylindres des petits ressorts de masse négligeable qui relieraient les cylindres les uns aux autres. Mais c'est inutile pour une étude des perturbations de compression. L'état de mouvement instantané produit par l'application d'une force constante F à la tige peut être caractérisé comme suit. La substance de la tige se trouvant à gauche d'une certaine frontière B se meut à une vitesse constante v et la substance se trouvant à droite de cette frontière est au repos. La frontière B se déplace, elle, de gauche à droite à la vitesse constante c. En acoustique on a généralement affaire à de petites perturbations et dans ce cas la vitesse v de la substance est très petite par rapport à la vitesse de propagation de la perturbation c. Cette règle n'est en défaut que si les perturbations sont très fortes (elles sont dites *ondes de choc* et nous ne les examinerons pas ici). Nous nous limiterons au seul cas des petites perturbations.

3. Calculons la vitesse de propagation dans la tige des *petites perturbations longitudinales* produites à un instant donné par application d'une force de pression constante F à son extrémité libre (fig. 219). Cet instant sera pris pour instant initial. Dans la partie perturbée de la tige la substance se meut à tout instant t à une vites-

se constante v, la déformation de cette partie étant partout la même. En désignant par m la masse de la partie déformée de la tige à l'instant t, sa quantité de mouvement à cet instant sera mv. L'accroissement $d\,(mv)$ de la quantité de mouvement de la tige dans le temps dt est égal à l'impulsion $F\,dt$ de la force pendant ce même intervalle de temps. Par suite

$$\frac{d\,(mv)}{dt} = F\,^{*}). \tag{81.1}$$

Au cours du temps t la perturbation parcourt un chemin $l = ct$; la masse de la partie perturbée de la tige devient alors égale à $m = \rho Sct$, où S est l'aire de la section droite de la tige et ρ sa densité. En toute rigueur les valeurs de S et de ρ figurant dans cette expression devraient correspondre à la *tige non perturbée*. Néanmoins la précision de nos calculs est telle que la différence de valeurs de ces quantités pour la tige perturbée et non perturbée peut être négligée. Ce n'est que dans le cas de perturbations fortes que cette différence devient importante. En portant dans (81.1) $m = \rho Sct$, $F = PS$, P étant la pression dans la région perturbée de la tige, nous obtenons

$$P = \rho cv \tag{81.2}$$

La pression P est liée à la compression relative de la tige par la relation $P = E\varepsilon$. Pour calculer ε on remarquera qu'à l'instant t l'extrémité droite B de la partie comprimée de la tige n'a pas encore eu le temps de se déplacer tandis que son extrémité libre A' était en mouvement pendant tout ce temps et s'est déplacée de vt. Il en résulte que par rapport à sa longueur initiale la partie perturbée de la tige s'est raccourcie de $\Delta l = vt$. On écrira donc

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{v}{c}, \tag{81.3}$$

$$P = E\frac{v}{c}. \tag{81.4}$$

En éliminant P entre les formules (81.2) et (81.4) on trouve

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{81.5}$$

---

*) Si on calcule la dérivée, on obtient

$$m\frac{dv}{dt} = F - v\frac{dm}{dt}. \tag{81.1a}$$

Cette relation est un cas particulier de l'équation (21.2). On peut considérer en effet la partie perturbée de la tige comme un corps de masse variable, avec $v_{\text{rel}} = -v$. On peut déduire de (81.1a) la formule (81.2) en remarquant que dans le cas considéré

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dm}{dt} = S\rho c.$$

Cette formule définit la vitesse de propagation des perturbations élastiques dans le cas considéré.

4. La force F produit dans le temps t un travail $A = Fvt = PS\varepsilon ct = P\varepsilon V$, V étant le volume de la partie perturbée de la tige. L'énergie potentielle emmagasinée pendant la compression est $U = {}^1/_2 P\varepsilon V$. Ainsi $U = {}^1/_2 A$. La moitié seulement du travail produit est utilisée à accroître l'énergie potentielle de la tige, l'autre moitié étant dépensée pour augmenter son énergie cinétique. *A tout instant l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle.* Nous démontrerons dans le paragraphe suivant que toute perturbation si elle est petite et se propage dans un *seul sens* jouit de cette propriété.

5. Si la force F cesse d'agir à un certain instant, la tige comportera une région perturbée limitée des deux côtés. Pour s'en rendre compte

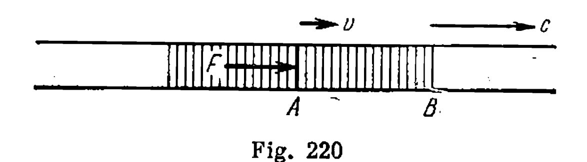


Fig. 220

il suffit de reprendre le modèle de la rangée rectiligne de billes élastiques contiguës (fig. 217) et de passer à la limite d'une tige continue. A l'aide de ce même modèle on se rendra compte que les deux frontières de la région perturbée doivent se propager dans le même sens et à la même vitesse donnée par (81.5). Pour le démontrer considérons dans la partie perturbée une section droite (fig. 220) constituée par les mêmes particules pendant tout le temps de l'étude. Il est évident que cette section se déplacera de gauche à droite à la vitesse v et qu'elle joue le rôle de l'extrémité libre de la tige. La partie restante de la région déformée, située à gauche de la section considérée, exerce sur cette section une force de pression $F = PS$. Nous pouvons donc appliquer à la partie de la tige se trouvant à droite de cette section le raisonnement que nous avons mis en œuvre ci-dessus. On en conclut que la frontière B de la région perturbée se déplace de gauche à droite à la vitesse c définie par (81.5).

6. Nos raisonnements ne seront pas sensiblement modifiés si à un instant donné on applique à l'extrémité de la tige une force de traction constante. Par rapport au cas d'une force de pression, la seule différence est que la tige sera parcourue non pas par une perturbation de compression, mais par une *perturbation de dilatation*. La vitesse de propagation est donnée par la même formule (81.5). Il est évident que dans ce cas le modèle de la rangée de billes élastiques est inutilisable, mais on peut fort bien utiliser un modèle où les billes sont reliées entre elles par des ressorts infiniment courts et de masses négligeables.

7. Dans nos raisonnements nous avons admis que la perturbation qui se propage dans la tige était produite par une *force constante* appliquée à un certain instant à son extrémité. Il est facile de généraliser au cas d'une *force variable*. Reprenons notre modèle d'une rangée de billes élastiques mais reliées les unes aux autres par de petits ressorts de masse négligeable. Si à des instants déterminés on applique à la première bille des chocs de forces différentes, on lui communique des vitesses différentes. La répartition des vitesses peut être illustrée par les schémas de la figure 217, à cette différence près que la vitesse v varie d'une bille à l'autre. En passant à la limite d'une tige continue nous arrivons à une perturbation se propageant

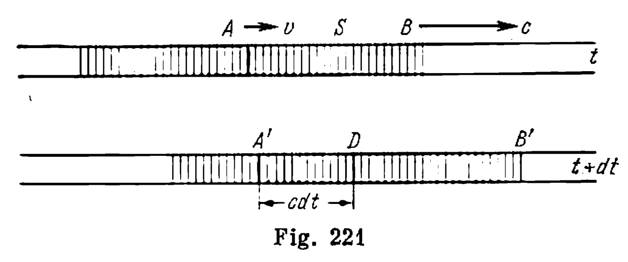


Fig. 221

dans un sens déterminé mais où la vitesse de la substance varie d'un point à l'autre. Même le sens de la vitesse v peut s'inverser si le sens d'application de la force vient à varier. La région perturbée sera délimitée des deux côtés si la durée d'application de la force est limitée. Nous allons démontrer que les formules (81.2), (81.3) et donc (81.5) restent valables pour la perturbation considérée. Sur la figure 221 la région perturbée est hachurée et représentée à deux instants infiniment proches t et $t + dt$. Au cours du temps dt la région perturbée se déplace de $c\,dt$. Considérons dans la région perturbée un plan normal A constitué par les mêmes particules de la substance. Ce plan se déplace de gauche à droite à la vitesse v qui est celle des particules du plan A à l'instant t. Au bout du temps dt les particules se déplaceront dans la position A' après avoir parcouru un chemin très court $v\,dt$ que nous pouvons négliger. La perturbation elle-même se déplace d'une distance beaucoup plus grande égale à $c\,dt$. Calculons l'accroissement de la quantité de mouvement de la substance se trouvant à droite du plan A. La perturbation se déplace du point A au point D en parcourant un chemin $c\,dt$. Le mouvement de la substance se trouvant à droite du plan D sera à l'instant $t + dt$ exactement le même que celui qu'avait à l'instant t la substance se trouvant à droite du plan A. Il est évident que l'accroissement cherché de la quantité de mouvement doit être égal à la quantité de mouvement comprise entre les plans A' et D, donc égal à $Sc\,dt\,\rho v$. Il est égal à l'impulsion des forces de pression $PS\,dt$ s'exerçant dans le plan A pendant le temps dt. En égalant les deux expressions on ob-

tient la formule (81.2). Il est tout aussi facile d'arriver à la formule (81.3). Considérons une tranche infiniment petite comprise entre les plans A' et D (fig. 221). Sa longueur initiale était égale à $l = c\,dt$. Mais comme la perturbation arrive au plan A' plus tôt (de dt) qu'au plan D, le chemin parcouru par la substance liée au plan A' sera de $v\,dt$ plus long que celui de la substance liée au plan D. Il en résulte que la contraction de la tranche $A'D$ due à sa déformation est $\Delta l = v\,dt$. En formant le rapport $\frac{\Delta l}{l}$ on obtient la formule (81.3).

La densité de l'énergie cinétique dans la région perturbée est $w_{\text{cin}} = {}^1/_2\rho v^2$. La densité de l'énergie potentielle y est $w_{\text{pot}} = {}^1/_2 E\varepsilon^2 = \frac{E}{2}\frac{v^2}{c^2}$. En portant dans cette dernière équation la valeur de c tirée de (81.5) on trouve $w_{\text{pot}} = {}^1/_2\rho v^2$. Ainsi $w_{\text{cin}} = w_{\text{pot}}$. *Dans toute perturbation élastique progressive, c'est-à-dire dans toute perturbation se propageant dans une direction et un sens déterminés, l'énergie totale se répartit également entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique.*

§ 82. Application du principe de superposition

1. Nous avons déjà utilisé le *principe de superposition en statique*. La *propagation des petites perturbations* obéit également à ce principe. Soit une perturbation se propageant dans un milieu donné. Nous désignerons par $\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{r}_0, t)$ l'élongation d'une particule du milieu perturbé par rapport à sa position d'équilibre. Le vecteur $\boldsymbol{r}_0$ est le rayon vecteur du point considéré à l'état de repos, donc à un instant précédant l'apparition de la perturbation. Soit $\boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{r}_0, t)$ le déplacement de cette particule provoqué dans le même milieu par une seconde perturbation. Quelle sera la perturbation du milieu en présence de ces deux ébranlements? Le principe de superposition affirme que le déplacement résultant sera

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}_0, t) = \boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{r}_0, t) + \boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{r}_0, t).$$

Cela signifie que *toute perturbation préexistant dans un milieu n'affecte pas la propagation d'une autre perturbation. Chacune des perturbations se propage comme si elle était seule.* Comme exemple on peut citer les ondes à la surface de l'eau. Si on jette deux pierres dans l'eau calme d'un étang on verra se propager à partir de leurs points d'impact des ondes circulaires. Là où elles se superposent on voit apparaître un mouvement résultant compliqué. Mais après avoir franchi la région où elles se superposent, chacune des ondes est exactement de la même forme que si elle était seule. Le principe de superposition est naturellement vérifié pour un nombre quelconque de per-

turbations se superposant les unes aux autres. Il faudrait appeler ce principe, tel qu'énoncé ci-dessus, *principe de superposition des petits mouvements* (ou *des petits déplacements*). Mais il est tout aussi bien vérifié pour les *vitesses des particules* puisque les vitesses s'obtiennent par dérivation des déplacements par rapport au temps. Il est également vérifié pour les *contraintes élastiques* puisque celles-ci sont des fonctions linéaires des déformations, donc des déplacements. On peut considérer le principe de superposition comme un fait expérimental. Il est aussi la conséquence du *caractère linéaire* (par rapport aux déplacements) des équations décrivant les petites perturbations. *Il est en défaut si les perturbations sont fortes.*

2. Nous avons montré au paragraphe précédent que l'énergie totale d'une *perturbation mobile* se répartissait également entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. L'application du principe de superposition démontre que ce résultat est inéluctable. Pour fixer les idées considérons des perturbations se propageant dans une tige, cet exemple n'étant nullement limitatif, car nos considérations ont une portée générale. Supposons qu'à l'instant initial une tranche de la tige subit une déformation, la substance comprise dans cette tranche étant encore au repos. Toute l'énergie initiale E de la tige est alors de l'énergie potentielle. Si on supprime les forces extérieures qui ont créé la déformation initiale, deux perturbations issues de la région déformée se propageront en sens opposés. Si la perturbation initiale était symétrique, l'énergie totale E se partagera également entre les deux perturbations générées. Il nous faut démontrer que dans chacune de ces perturbations mobiles l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle. Considérons les deux perturbations à l'instant initial où elles se recouvrent complètement. En désignant par P_1 et P_2 les pressions et par v_1 et v_2 les vitesses de la substance dans les deux perturbations, en vertu du principe de superposition on a à l'instant initial $P_1 + P_2 = P$, $v_1 + v_2 = 0$, P étant la pression dans la région perturbée au même instant. Par raison de symétrie $P_1 = P_2 = P/2$. Cette même corrélation des pressions existera à tout instant ultérieur en des points correspondants. Elle subsistera notamment lorsque les deux perturbations se sépareront et il sera alors opportun de parler d'une subdivision de l'énergie totale entre les deux perturbations générées dans la région de la perturbation initiale. Comme l'énergie potentielle est proportionnelle au carré de la pression, sa valeur sera égale à $E/4$ dans chacune des perturbations mobiles; l'énergie potentielle des deux perturbations sera donc égale à $E/2$. En vertu de la conservation de l'énergie, l'autre moitié de l'énergie totale doit être convertie en énergie cinétique. Il est évident que l'énergie cinétique se répartira elle aussi également entre les deux perturbations mobiles. Ainsi dans chaque perturbation mobile les énergies cinétique et potentielle seront identiques et égales à $E/4$.

3. Ce raisonnement fondé sur des considérations de symétrie n'est correct que si la répartition initiale de la déformation présente la symétrie requise. Mais même si cette dernière condition n'est pas remplie, le raisonnement reste valable. Pour s'en rendre compte il suffit de subdiviser en pensée la région perturbée initiale en des régions infiniment petites. A l'intérieur de ces régions infinitésimales la pression pourra être considérée comme constante et sa répartition pourra être représentée par un rectangle infiniment étroit. C'est dire que dans chacune de ces régions infinitésimales perturbées la répartition initiale de la pression aura une symétrie convenable. Selon le principe de superposition les perturbations issues de chaque région infinitésimale ne dépendent pas de l'état de toutes les

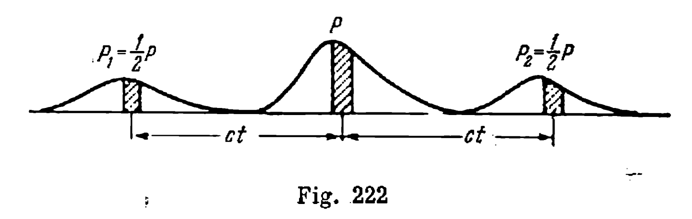


Fig. 222

autres. On peut donc appliquer le raisonnement ci-dessus. Au cours du temps t les perturbations issues de la région infinitésimale considérée se propagent à une distance ct. Si les perturbations générées dans toute la région perturbée ne se recouvrent plus à l'instant t, celles qui sont issues des différentes petites régions perturbées ne se recouvriront pas non plus (fig. 222). On a pour elles $P_1 = P_2 = {}^1/_2P$. Il en découle que *dans chacune des perturbations mobiles issues de la région perturbée les énergies potentielles et cinétiques totales sont égales et, de plus, sont égales les densités de ces énergies.*

4. Il a été supposé dans ce qui précède que les deux perturbations mobiles avaient été générées dans une région déformée initiale qui était *immobile*. On peut fort bien utiliser le raisonnement ci-dessus pour les perturbations issues des régions non déformées dont les particules sont animées à l'instant initial de vitesses arbitrairement réparties dans ces régions.

5. On en conclut que *pour qu'une perturbation soit mobile il faut que les densités de ses énergies cinétique et potentielle soient égales.* Pour décider du sens de propagation d'une perturbation on aura recours à des considérations énergétiques. Soit le cas où la région perturbée AB se propage de gauche à droite (fig. 221). Choisissons une section droite S. Pour que la perturbation se déplace à droite il faut que la partie AS de la tige effectue un *travail positif* sur la partie SB, i.e. on doit avoir $Pv > 0$ si on convient de considérer comme positives les vitesses dirigées de gauche à droite. Si $v > 0$ on doit avoir $P > 0$, ce qui suppose que la contrainte s'exerçant dans

la section S est une *pression*. Si $v < 0$ on doit avoir $P < 0$, ce qui implique que la section S est le siège d'une *tension* $T = -P$. Pour assurer la propagation de la perturbation de droite à gauche il faut que $Pv < 0$.

Si l'égalité des énergies potentielle et cinétique n'est pas réalisée dans une perturbation, elle se divisera en *deux perturbations* se propageant en sens inverses. Dans le cas général ces perturbations emporteront des énergies différentes. Si, par exemple, en tout point de la région perturbée initiale $Pv > 0$, l'énergie emportée vers la droite

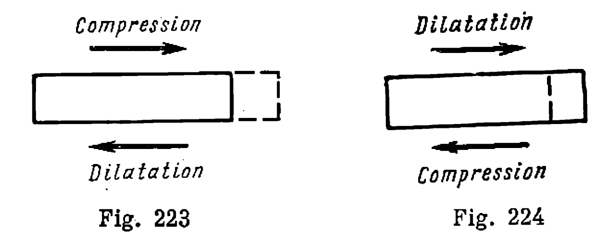


Fig. 223 Fig. 224

sera plus grande que celle qui part vers la gauche de la région perturbée. L'inverse sera vrai si $Pv < 0$ et si $Pv = 0$ les deux perturbations emporteront des énergies égales.

6. Il résulte des considérations ci-dessus que dans une onde de compression mobile les particules de la tige se meuvent *dans le sens même* du déplacement de la perturbation. Si la perturbation est de dilatation, les mouvements des particules de la substance et de la perturbation s'effectuent en sens opposés. Supposons que la perturbation est une compression qui se propage de gauche à droite dans la tige. Voyons ce qui se produira lorsqu'elle aura atteint l'extrémité droite de la tige. Si nous supposons que cette extrémité est libre, l'arrivée de la perturbation communiquera aux particules de la tige des vitesses dirigées dans le même sens, c'est-à-dire à droite. Comme l'extrémité de la tige n'est pas fixe, les particules mises en mouvement ne pourront s'arrêter que lorsqu'elles seront soumises de la part de la tige à des forces dirigées à gauche. Or cela n'est possible que si l'extrémité droite de la tige est dilatée. Cela signifie qu'à l'extrémité de la tige la compression se transforme en une dilatation. Cette dilatation fera apparaître dans la tige une perturbation de dilatation qui s'y propagera vers la gauche (fig. 223). Tout se passe comme si à un certain instant l'extrémité libre de la tige avait été soumise à une traction, y créant une déformation de dilatation. Dans la perturbation de dilatation qui se propage de droite à gauche, les vitesses des particules du milieu doivent être dirigées dans le sens opposé à celui de la perturbation. Ce sont les forces de tension qu'appliquent aux particules du milieu les régions dilatées de la tige se trouvant à droite des particules, qui leur communiquent les vites-

ses ainsi orientées. Nous voyons ainsi qu'*une perturbation de compression se réfléchit sur l'extrémité libre de la tige et se transforme en une perturbation de dilatation. Les perturbations de dilatation se comportent de même: elles subissent une réflexion sur l'extrémité libre de la tige en se transformant en perturbation de compression* (fig. 224). Dans les deux cas le signe de la déformation change à la réflexion, tandis que le signe de la vitesse v des particules de la substance se conserve.

Si l'extrémité de la tige est fixe, la réflexion conduit généralement à un partage de la perturbation incidente en deux perturbations dont l'une est réfléchie et se propage en sens inverse, tandis que l'autre passe dans le milieu qui est en contact avec l'extrémité fixe de la tige. Dans le cas limite où ce milieu est infiniment rigide, la perturbation est réfléchie en totalité. Considérons ce cas limite. Lorsque la perturbation atteint la frontière avec ce milieu infiniment rigide, la compression (ou la dilatation) ne se transforme pas puisque l'extrémité de la tige, étant fixe, ne peut se déplacer. Mais les forces qu'applique le milieu contigu déterminent l'inversion du sens des vitesses des particules. Les signes des déformations se conservent tandis que le sens des vitesses s'inverse. Ainsi, par réflexion d'une perturbation de compression (de dilatation), on obtient également une perturbation de compression (de dilatation).

PROBLÈMES

1. On crée dans une tige élastique une déformation de compression initiale telle que les vitesses des particules de la région déformée sont toutes de même sens (par exemple de la gauche vers la droite) et qu'en tout point de cette région la densité de l'énergie potentielle est α fois plus grande que la densité de l'énergie cinétique. Calculer les parts de l'énergie initiale qui sont emportées respectivement par la perturbation allant à droite de la région perturbée et par la perturbation allant à gauche de cette région.

S o l u t i o n. Pour simplifier utilisons des unités telles que les densités des énergies potentielle et cinétique s'expriment par les formules $w_{\text{cin}} = v^2$, $w_{\text{pot}} = P^2$. Ecrivons les valeurs initiales de P et de v sous la forme

$$P = P_1 + P_2, \quad v = v_1 + v_2.$$

Supposons que chacune des perturbations initiales P_1, v_1 et P_2, v_2 engendre une perturbation allant dans un seul sens. On aura alors $P_1^2 = v_1^2$, $P_2^2 = v_2^2$. Si la première perturbation se propage à droite et la seconde à gauche, on aura $P_1v_1 > 0$ et $P_2v_2 < 0$. On obtient alors

$$P_1 = v_1, \quad P_2 = -v_2$$

et

$$P_1 = v_1 = \frac{P+v}{2}, \quad P_2 = -v_2 = \frac{P-v}{2}.$$

Le rapport des énergies transportées par les perturbations est

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{P+v}{P-v}\right)^2 = \frac{1+2\frac{P}{v}+\left(\frac{P}{v}\right)^2}{1-2\frac{P}{v}+\left(\frac{P}{v}\right)^2},$$

soit

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{1+2\sqrt{\alpha}+\alpha}{1-2\sqrt{\alpha}+\alpha}=\left(\frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}-1}\right)^2.$$

2. Un cylindre d'acier d'une longueur l = 10 cm, en mouvement parallèle à son axe de révolution, à la vitesse v, vient heurter un deuxième cylindre identique au premier mais immobile et dont l'axe est dans le prolongement de l'axe du cylindre mobile. Par étude des perturbations élastiques engendrées par le choc, déterminer la durée du choc. Pour quelles valeurs de la vitesse v les défor-

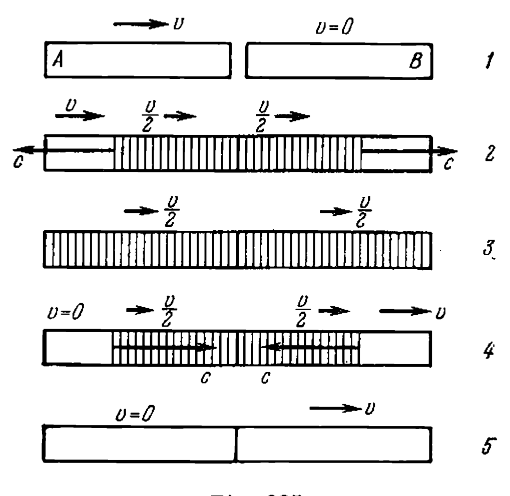


Fig. 225

mations des cylindres seront-elles plastiques et pour quelles autres les cylindres seront-ils écrasés? Pour l'acier $E = 2\cdot10^{12}$ dynes/cm², $\rho = 7{,}8$ g/cm³, limite d'élasticité $P_0 = 2\cdot10^{9}$ dynes/cm².

S o l u t i o n. A l'instant où les cylindres viennent en contact, la vitesse du cylindre A est égale à v, le cylindre B est au repos et aucun d'eux n'est déformé (fig. 225, position *1*). Aussitôt après collision, à partir de la zone de choc commencent à se propager des ondes de compression dont la vitesse par rapport aux cylindres est égale à c (position *2*). Dans la région de compression les particules des deux cylindres se meuvent dans le même sens avec la vitesse $v/2$. Ce résultat découle de la loi de conservation de l'impulsion. Lorsque les perturbations arriveront aux extrémités des cylindres, toute la substance sera en mouvement avec la même vitesse $v/2$ (position *3*). La masse de la substance en mouvement a doublé, tandis que sa vitesse a diminué de deux fois, de sorte que la loi de conservation de l'impulsion est respectée. Par rapport à sa valeur initiale, l'énergie cinétique a diminué de deux fois. La moitié de l'énergie s'est transformée en énergie potentielle — les deux cylindres sont uniformément comprimés et appliqués l'un contre l'autre. Dès lors commence la réflexion des perturbations par les extrémités libres des cylindres (position *4*). Les perturbations de compression se transforment en perturbations de dilatation. Sur l'extrémité gauche, la pression exercée par les régions adjacentes annule la vitesse des particules et sur l'extrémité droite elle les accélère. A l'extrémité gauche de la tige apparaît une région non déformée où la substance est au repos, tandis qu'à l'extrémité droite, dans la région non déformée, la substance se déplace à droite à la vitesse v.

Pour s'en rendre compte adoptons un référentiel se déplaçant à droite à la vitesse $v/2$. A l'instant initial (position *3*) les deux cylindres sont uniformément comprimés et au repos dans ce référentiel. Par réflexion sur les deux extrémités apparaissent des perturbations de dilatation: celle qui apparaît sur l'extrémité gauche se déplace à droite à la vitesse c et celle qui apparaît sur l'extrémité droite se déplace à gauche à la même vitesse. A proximité des extrémités libres des cylindres apparaissent des régions non déformées où les vitesses de la substance par rapport au référentiel mobile doivent pointer vers l'extérieur des cylindres puisque le mouvement correspondant résulte de l'action des forces de compression dirigées dans ce sens. Par raison de symétrie ces vitesses sont égales en valeur absolue, mais de sens contraires. Désignons par v' la vitesse de la substance dans la région non déformée située à droite (il est évident qu'elle est positive). La vitesse de la substance dans la région non déformée se trouvant à gauche sera $-v'$. Pour calculer v', revenons à notre référentiel fixe. Par rapport au référentiel fixe les vitesses de la substance dans les deux régions non déformées seront égales à $v/2 - v'$ et à $v/2 + v'$. Lorsque les perturbations se rencontrent au point de contact des cylindres, les déformations s'évanouissent et les deux cylindres se déplaceront ensemble à la vitesse $v/2 - v'$ et $v/2 + v'$. L'énergie cinétique de ce mouvement est

$$\frac{m}{2}\left(\frac{v}{2}-v'\right)^2+\frac{m}{2}\left(\frac{v}{2}+v'\right)^2=\frac{mv^2}{4}+mv'^2.$$

Or cette quantité doit être égale à $mv^2/2$. Il s'ensuit que $v'^2 = v^2/4$, et $v' = v/2$. Aussi lorsque les deux ondes de dilatation se rencontrent au milieu, le premier cylindre s'immobilise et ne sera pas déformé, tandis que le second se met en mouvement de gauche à droite à la vitesse v et ne sera pas déformé lui non plus (position *5*). Comme on pouvait s'y attendre, les cylindres ont échangé leurs vitesses. A partir de cet instant il n'y aura plus de contact entre les cylindres. La durée du choc est donc définie comme l'intervalle de temps requis pour un aller et retour de la perturbation le long de l'axe des cylindres (peu importe lequel):

$$\tau_{\text{choc}}=\frac{2l}{c}=2l\sqrt{\frac{\rho}{E}}\approx 4\cdot 10^{-5}\ \text{s}.$$

Calculons maintenant la compression relative des cylindres pendant la déformation. Après mise en contact, l'extrémité gauche du cylindre B a acquis une vitesse $v/2$, tandis que l'extrémité droite est restée au repos pendant un temps égal à $\frac{1}{2}\tau_{\text{choc}}$. Durant cet intervalle de temps son extrémité gauche se déplace de $x = \frac{1}{4}\tau_{\text{choc}}v$. La compression relative du cylindre sera donc

$$\frac{x}{l}=\frac{v}{2c},$$

et la pression correspondante $P = E\frac{v}{2c}$. Pour ne pas avoir de déformations plastiques ou d'écrasements, il faut que $P < P_0$, soit

$$v<\frac{2cP_0}{E}=\frac{2P_0}{\sqrt{E\rho}}\approx 10\ \text{m/s}.$$

§ 83. Vitesses de propagation des perturbations longitudinales et transversales dans un milieu illimité

1. Nous avons appelé les perturbations considérées au § 81 déformations longitudinales. Or ce n'est pas tout à fait exact puisqu- toute déformation de compression d'une tige s'accompagne d'une

augmentation de ses dimensions transversales. Lors d'une déformation de traction d'une tige, ses dimensions transversales diminuent. Pour caractériser quantitativement ces effets, on introduisit le coefficient de Poisson. Il s'ensuit que dans la tige les particules ne se déplacent pas de façon rigoureusement parallèle à son axe: à côté de la composante longitudinale de leurs vitesses elles possèdent une *composante transversale*. Pour rendre une perturbation purement *longitudinale* il faut empêcher les particules de la tige de se déplacer dans des directions perpendiculaires, ce qui revient à « fixer » la surface latérale de la tige. C'est ce qui se réalise lorsqu'une perturbation longitudinale se propage dans un milieu illimité. Si dans un tel milieu on découpe en pensée une « tige » dont l'axe est parallèle à la direction de propagation de la perturbation (qui dans le cas d'une perturbation longitudinale est parallèle au déplacement des particules), les particules situées sur la surface latérale de cette tige et bloquées par les particules voisines du milieu ne pourront plus se déplacer dans une direction transversale. Tous les déplacements seront alors parallèles à l'axe de la « tige ». On peut appliquer les raisonnements développés aux paragraphes précédents à ce nouveau cas. On doit cependant remplacer le module de Young E par le *module de traction uniaxiale* E'. La vitesse de propagation des perturbations longitudinales dans un milieu illimité s'exprime par

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} \qquad (83.1)$$

et en utilisant (77.9) et (78.5)

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{K+4/3G}{\rho}}. \qquad (83.2)$$

2. Dans un milieu illimité solide à côté des perturbations longitudinales, peuvent se propager des *perturbations transversales*. On appelle ainsi les perturbations où les particules du milieu se déplacent dans des directions *normales* à la direction de la propagation de la perturbation. On calcule la vitesse de propagation des perturbations transversales exactement comme on l'avait fait pour les perturbations longitudinales. Pour cela nous délimiterons par la pensée dans le milieu considéré une « tige » quelconque dont l'axe est parallèle à la direction de la propagation de la perturbation, i.e. normal aux déplacements des particules (fig. 226). Si à l'instant initial on applique à la base de cette « tige » une contrainte tangentielle constante τ, la tige sera le siège d'une *déformation de cisaillement* qui se propagera à une vitesse $c_{\perp}$. En raisonnant de même qu'au § 81, nous trouverons que la contrainte tangentielle τ est liée à la vitesse $c_{\perp}$ et à la vitesse v des particules de la tige par la relation

$$\tau = \rho c_{\perp} v. \qquad (83.3)$$

Ici $\tau = G\gamma$, γ est l'angle de cisaillement que l'on calcule comme suit, Au cours du temps t l'extrémité libre de la tige se déplace de vt.

tandis que la perturbation parcourt un chemin $c_\perp t$. Comme $v \ll c_\perp$, il en découle

$$\gamma = \frac{v}{c_\perp}. \tag{83.4}$$

D'où

$$c_\perp = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{83.5}$$

3. Si les perturbations transversales sont petites, on peut leur appliquer le principe de superposition. Il s'ensuit que dans toute perturbation transversale se propageant dans une direction déterminée, les densités des énergies cinétique et potentielle sont égales. Pour déterminer la direction de la propagation des perturbations transversales on fait appel aux considérations énergétiques exactement comme dans le cas des perturbations longitudinales.

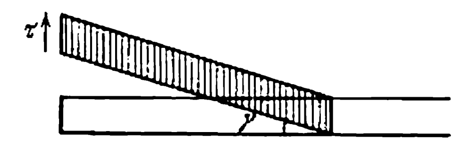


Fig. 226

4. Puisque $K > 0$, il résulte des formules (83.2) et (83.5) que

$$c_\parallel > c_\perp. \tag{83.6}$$

Il s'ensuit que toute perturbation apparaissant dans un milieu illimité se scinde en une perturbation transversale et une perturbation longitudinale, cette dernière parvenant au point d'observation plus rapidement que la perturbation transversale. La nécessité de cette subdivision résulte directement du principe de superposition des petites perturbations, selon lequel les perturbations longitudinales et transversales doivent se propager *indépendamment les unes des autres.*

Calculons, par exemple, les vitesses de propagation des perturbations élastiques dans le fer ou l'acier. L'expérience fournit les données suivantes: $E = 21{,}2\cdot10^{10}$ N/m², $G = 8{,}2\cdot10^{10}$ N/m², $\mu = 0{,}29$, $\rho = 7{,}8\cdot10^3$ kg/m³. En utilisant ces données on obtient

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5{,}2\cdot10^3 \text{ m/s},$$

$$c_\parallel = c\sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} = 6\cdot10^3 \text{ m/s},$$

$$c_\perp = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3{,}4\cdot10^3 \text{ m/s}.$$

PROBLÈMES

1. Montrer que la vitesse de propagation des oscillations de torsion le long d'une tige coïncide avec la vitesse de propagation $c_\perp$ des perturbations transversales.

Solution. Pour généraliser nous supposerons que la tige se présente sous la forme d'un tube cylindrique de rayon interne r_1 et de rayon externe r_2. Appliquons à la base du tube des contraintes tangentielles constantes produisant un moment de rotation M par rapport à l'axe géométrique du tube. Le tube est alors le siège de déformations de torsion dont la vitesse de propagation est c. Dans la région perturbée la substance tournera à une vitesse angulaire constante ω. Si la durée d'action du moment M est t, on a évidemment

$$Mt = I\omega,$$

ou I est le moment d'inertie de la région perturbée. D'autre part, $M = f\varphi = f\omega t$. D'où $ft^2 = I$. En y portant $I = {}^1/_2\pi\rho l\,(r_2^4 - r_1^4)$, $t = l/c$ (l est la longueur de la région perturbée) et en utilisant la relation (79.4) on obtient

$$\rho c^2 = G.$$

2. Etablir l'expression de la vitesse des perturbations sonores longitudinales se propageant dans une plaque illimitée bidimensionnelle mince. Montrer que cette vitesse est plus petite que celle des perturbations longitudinales dans un milieu illimité (voir problème au § 77).

Réponse. $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho\,(1-\mu^2)}}$.

§ 84. Vitesse de propagation des perturbations transversales dans une corde tendue

1. Les perturbations transversales se propagent dans les corps solides parce qu'ils présentent une élasticité transversale qui est la capacité de s'opposer à tout changement de forme sans modification

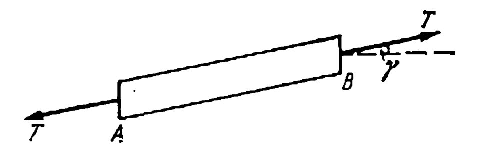


Fig. 227

de volume. L'élasticité transversale peut être créée artificiellement dans des corps qui n'en possèdent pas. Un exemple en est fourni par une corde flexible. Tant que la corde n'est pas tendue, elle ne peut transmettre des perturbations transversales. Si on fixe l'une des extrémités de la corde et si on suspend un poids à l'autre en faisant passer la corde par une poulie, la corde sera soumise à une tension constante T. La corde présente alors une élasticité de forme et elle peut transmettre des perturbations transversales dont la vitesse de propagation sera donnée par la formule (83.5). Il faut cependant déterminer quelle grandeur joue le rôle du module de cisaillement G dans la corde tendue. Considérons un petit segment AB d'une corde tendue et incurvée (fig. 227). Nous admettrons que les déformations

de la corde sous tension dues aux déplacements transversaux de ses particules sont petites. On peut alors négliger les variations de la tension T résultant des incurvations de la corde déterminées par de petites déformations. Dans cette approximation les tensions T appliquées aux extrémités du segment AB suivant son axe sont les mêmes. Leurs composantes tangentielles aux bases du segment AB sont égales à $T \sin \gamma \approx T\gamma$. Cela signifie que les bases de AB sont soumises à des contraintes tangentielles $\tau = (T/S)\,\gamma$, S étant l'aire de la section droite de la corde. On peut considérer que la déformation du segment AB est un cisaillement produit par ces contraintes tangentielles. Comparant la formule précédente avec la formule $\tau = G\gamma$, on peut conclure que le rôle de module de cisaillement est assumé par la quantité $G = T/S$. En portant cette expression dans la formule (83.5) et en introduisant la notation $\delta = \rho S$, on trouvera pour la vitesse de propagation des perturbations transversales dans la corde

$$c = \sqrt{\frac{T}{\delta}}. \qquad (84.1)$$

La quantité δ qui est égale à la masse par unité de longueur de la corde est dite *densité linéaire* de la corde.

2. Si dans une corde la perturbation se propage dans une seule direction les densités des énergies cinétique et potentielle y seront égales. La direction et le sens de la propagation d'une perturbation se laissent alors déterminer par

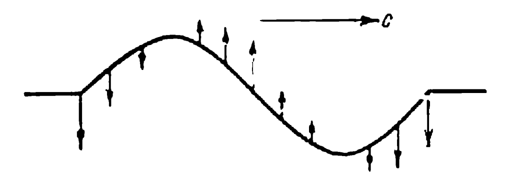


Fig. 228

des considérations énergétiques. Pour cela il faut connaître, en plus de la configuration de la corde, la vitesse de tous ses points à un instant donné. Ainsi la perturbation représentée sur la figure 228 se propage de gauche à droite. Les flèches verticales y représentent les vitesses des particules de la corde à l'instant considéré. Si on considère une section droite de la corde, l'angle que forme la force de tension s'exerçant sur la partie droite de la corde avec sa vitesse dans la section considérée sera aigu. Par contre la force de tension agissant sur la partie de la corde se trouvant à gauche du plan considéré forme avec la vitesse de cette partie de la corde un angle obtus. Cela signifie que le travail effectué par la force de tension dans la partie droite de la corde est positif et que celui effectué dans la partie gauche est négatif. C'est pour cette raison que la perturbation se déplace de gauche à droite. Si on inverse le sens des vitesses de toutes les particules de la corde, la perturbation se propagera de droite à gauche.

3. On peut établir la formule (84.1) par un procédé très révélateur. Soit une corde où on aura excité une perturbation transversale

se propageant de gauche à droite à la vitesse c (fig. 228). Etudions le phénomène dans un référentiel se déplaçant uniformément de gauche à droite à la même vitesse c. Dans ce référentiel la perturbation sera immobile et la corde se déplacera tout entière vers la gauche à la vitesse c. Dans la région perturbée, à ce mouvement viendront se superposer de petites oscillations transversales de la corde. L'axe de la corde est la trajectoire des particules mobiles se trouvant sur cet axe. Si on enfilait sur la corde un tube convenablement recourbé pour épouser la forme de la corde et qui serait immobile dans le référentiel mobile utilisé, la présence de ce tube n'affecterait en rien le mouvement de la corde. La corde glisserait à l'intérieur du tube sans frôler ses parois, à condition qu'on la tire à une vitesse bien déterminée c. Si les perturbations sont petites, les vitesses v des mouvements transversaux des particules de la corde seront petites par rapport à la vitesse c. Dans la formule de la vitesse résultante $\sqrt{c^2+v^2}$ des particules on pourra négliger alors le carré de la petite quantité v. Dans cette approximation la vitesse totale des particules de la corde devient égale à c sur toute la longueur de la corde. Cependant, dans les parties du tube où la corde est incurvée, ses particules ont un mouvement accéléré. Leurs accélérations sont normales à la trajectoire et sont définies par l'expression $a = c^2/R$. Pour créer ces accélérations il faut qu'il existe une force normale à la trajectoire. Cette force apparaît lorsque la corde s'incurve. Pour calculer le module de cette force, considérons un élément infiniment petit AB de la corde incurvée et désignons sa longueur par s (fig. 229). On peut l'assimiler à un arc infinitésimal d'un cercle de rayon R aux extrémités duquel sont appliquées les tensions longitudinales T_1 et T_2. A la précision de nos calculs on peut poser que leurs valeurs absolues sont égales: $T_1 = T_2 = T$. Mais comme leurs directions ne sont pas exactement les mêmes, il apparaît une force résultante normale à l'élément AB:

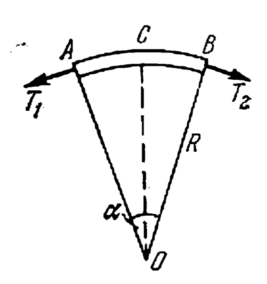


Fig. 229

$$F = 2T \sin\frac{\alpha}{2} \approx T\alpha = T\frac{s}{R}.$$

En égalant cette force au produit de la masse de l'élément AB par son accélération, on obtient

$$T\frac{s}{R} = s\delta\frac{c^2}{R},$$

d'où on tire la formule (84.1).

§ 85. Vitesse de propagation du son dans les liquides et les gaz

1. Les liquides et les gaz présentent une *élasticité volumique* sans posséder l'élasticité de forme. Il en résulte qu'ils ne peuvent transmettre que des perturbations longitudinales, les perturbations transversales ne pouvant s'y manifester. On peut calculer la vitesse de propagation des perturbations longitudinales dans un milieu liquide et gazeux à l'aide de la formule (81.5), à condition de préciser ce qu'il faut entendre ici par module de Young E. Imaginons que le milieu liquide ou gazeux est enfermé dans un tube rectiligne à parois lisses de section constante. Négligeons le frottement entre les parois et le milieu. Les parois du tube s'opposeront à tout mouvement transversal du milieu sans nuire à son mouvement longitudinal. Un gaz ou un liquide contenu dans un tel tube peut être assimilé à une tige le long de laquelle se propagent des perturbations longitudinales. A la différence des solides un gaz ne peut exister que *sous pression*, car s'il n'en était pas ainsi, il se dilaterait indéfiniment. On est donc conduit à supposer qu'en l'absence de toute perturbation la pression à l'intérieur du gaz est différente de zéro. Désignons cette pression par P_0. Nous admettrons la même chose pour les liquides. Si la pression dans le gaz s'accroît et devient égale à $P = P_0 + \Delta P$, le volume de la masse gazeuse considérée devra varier.

Déterminons la variation de volume ΔV du gaz accompagnant un accroissement ΔP de sa pression. Nous supposerons que ΔP est petit par rapport à P_0: $\Delta P \ll P_0$. Si le gaz est contenu dans un tube dont l'une des extrémités est fermée par un piston mobile, une variation de sa pression de ΔP donnera lieu à une variation de la longueur de la colonne gazeuse de Δl. La quantité $-\left(\frac{\Delta l}{l}\right)$ est la compression relative de la colonne gazeuse. Si les compressions sont petites

$$\Delta P = -A\frac{\Delta l}{l},$$

A étant une constante. D'autre part, on peut mettre la formule (75.7) pour la tige sous la forme $\Delta P = -E\,\frac{\Delta\,(\Delta l)}{l}$, où $\Delta\,(\Delta l)$ est l'accroissement de la longueur de la tige correspondant à une variation ΔP de la pression. Cet accroissement de longueur a la même signification que la quantité que nous avons désignée dans le cas présent par Δl. On peut donc définir le module de Young par la formule

$$\Delta P = -E\frac{\Delta l}{l}. \qquad (85.1)$$

On voit que dans le cas d'une colonne de gaz $A = E$. Comme la longueur l de la colonne de gaz est proportionnelle à son volume V, on

peut récrire la formule (85.1) sous la forme

$$\Delta P = -E\frac{\Delta V}{V}. \tag{85.2}$$

La formule (85.2) reste valable quelle que soit la forme du récipient renfermant le gaz, tandis que la formule (85.1) ne s'applique qu'aux gaz contenus dans des récipients cylindriques.

Admettons que la pression du gaz ne dépend que de son volume V. Pour de petites variations de volume on aura

$$\Delta P = \frac{dP}{dV}\Delta V$$

ou

$$\Delta P = \left(-V\frac{dP}{dV}\right)\cdot\left(-\frac{\Delta V}{V}\right).$$

En comparant cette formule avec la précédente, on voit que dans les gaz (ainsi que dans les liquides) le rôle du module de Young est assumé par la quantité

$$E = -V\frac{dP}{dV}. \tag{85.3}$$

Il est commode de remplacer le volume V du corps par sa densité ρ puisque la quantité $V\rho$ est la masse du corps qui reste invariable dans tous les cas. En dérivant on tire de la relation $V\rho$ = const

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho},$$

et par suite

$$E = \rho\frac{dP}{d\rho}. \tag{85.4}$$

En portant cette expression dans (81.5) on obtient pour la vitesse du son dans les gaz et les liquides

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \tag{85.5}$$

2. Appliquons la formule (85.5) au calcul de la vitesse du son dans les gaz, comme l'avait fait Newton. Il avait admis que dans une onde sonore les variations de pression et de densité des gaz satisfont à la *loi de Boyle-Mariotte*: $P = A\rho$, A = const, d'où $\frac{dP}{d\rho} = A = \frac{P}{\rho}$. On arrive ainsi à la *formule de Newton*

$$c_N = \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \tag{85.6}$$

La vitesse du son est désignée ici par le symbole c_N pour souligner qu'il s'agit de la vitesse du son calculée par la formule de Newton.

29—01433

Nous allons maintenant transformer la formule (85.6) pour la rendre plus commode pour des calculs numériques. On sait que pour les gaz parfaits, le volume, la pression et la température absolue sont reliés par la relation

$$PV = RT, \tag{85.7}$$

où R est une constante. Si on prend une mole d'un gaz, la constante R a même valeur numérique quelle que soit la nature des gaz. On l'appelle *constante universelle des gaz*: $R = 8{,}31 \cdot 10^7$ erg$\cdot$K$^{-1}\cdot$mole^{-1}. Rappelons qu'on appelle *mole* la quantité de substance dont la masse en grammes est numériquement égale au poids moléculaire de cette substance μ. Il s'ensuit que la densité ρ est liée au volume V d'une mole de gaz parfait par la relation $\mu = \rho V$. On arrive ainsi aux formules

$$P = \frac{RT}{\mu}\rho, \tag{85.8}$$

$$c_N = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}. \tag{85.9}$$

Utilisons cette formule pour calculer la vitesse du son dans l'air à 0 °C (273 K). L'air est constitué par un mélange de gaz dont les principaux constituants sont l'azote ($\mu = 28$) et l'oxygène ($\mu = 32$). Le poids moléculaire moyen de ce mélange est $\mu = 28{,}8$. En substituant dans la formule (85.9) les valeurs numériques, nous trouvons $c_N = 280$ m/s. Or l'expérience donne $c = 330$ m/s. Il y a donc un écart considérable entre théorie et expérience. Pendant longtemps l'origine de cette divergence demeura inexpliquée. Ce n'est qu'au début du XIXe siècle que Laplace (1749-1827) résolut le problème. La loi de Boyle-Mariotte ne concerne que les variations de volume et de pression s'effectuant à *température constante*. Or une onde sonore est constituée par une succession de *compressions* et de *détentes* de gaz. Les régions comprimées sont soumises à un travail effectué par des forces extérieures qui donne lieu à une *élévation de température*. Les régions dilatées effectuent elles-mêmes un travail et leur température s'abaisse. Comme la succession des compressions et des détentes est très rapide, les températures n'arrivent pas à s'égaliser et les régions comprimées sont toujours plus chaudes que les régions dilatées. L'existence de ces différences de température augmente encore les différences de pression entre les régions comprimées et les régions dilatées, ce qui accroît la vitesse du son dans les gaz. La formule de Newton n'en tient pas compte puisque dans la formule (81.5) figure le *module* d'élasticité E *isothermique*, tandis qu'il fallait utiliser le *module* d'élasticité *abiabatique* (cf. § 79). Une étude quantitative de cette question sera donnée dans le tome II de notre cours.

CHAPITRE XI

RAPPORTS DE SIMILITUDE ET DIMENSIONS

§ 86. Formules de dimensions et unités de mesure

1. Jusqu'ici nous n'avons rien dit au sujet des *dimensions des grandeurs physiques*. Nous avons utilisé ce concept en supposant que le lecteur possède quelques connaissances relatives à ces questions. Dans les problèmes qui avaient été donnés jusqu'ici ces quelques notions pouvaient suffire. Pour l'étude de problèmes plus compliqués, en hydrodynamique par exemple, où une interprétation théorique complète est trop ardue, on fait appel à la *méthode d'étude dimensionnelle*. A l'aide de considérations générales ou de données expérimentales, cette méthode permet d'obtenir, simplement et rapidement, des résultats préliminaires suffisants pour bien situer le problème étudié. Il est donc nécessaire de bien connaître cette méthode.

Le concept de dimensions apparaît dès qu'il s'agit de construire un *système d'unités*. En principe on pourrait fort bien choisir pour chaque grandeur physique son unité propre aucunement liée aux unités des autres grandeurs, ce que l'on faisait jadis. Dans ce cas on verrait apparaître dans les équations exprimant les lois de la Physique de nombreux coefficients numériques dont les valeurs ne constitueraient aucun système et ne dépendraient que du choix arbitraire des unités de mesure. Cette multitude de coefficients numériques aurait bien compliqué les formules et exigé un effort de mémoire bien inutile. En Physique on a renoncé depuis longtemps à l'arbitraire dans le choix des unités de mesure des grandeurs physiques et on a mis en vigueur des systèmes d'unités construits selon un principe bien défini.

2. Ce principe est le suivant. Certaines grandeurs physiques sont adoptées par convention comme grandeurs *fondamentales*; leurs unités de mesure sont alors choisies tout arbitrairement. Ainsi, par exemple, on utilise en mécanique le système LMT dans lequel les grandeurs fondamentales sont la longueur (L), la masse (M) et le temps (T). *Le choix des grandeurs de base et leur nombre sont arbitraires*, ce n'est qu'une question de convention. En mécanique appliquée on utilisait il n'y a pas longtemps encore le système LFT dont les

grandeurs de base étaient la longueur (L), la force (F) et le temps (T). Pour le *système international des unités de mesure* (SI) on a choisi six grandeurs fondamentales: longueur, masse, temps, température, intensité du courant électrique et intensité lumineuse. Les grandeurs qui ne font pas partie du groupe des grandeurs de base sont dites *grandeurs dérivées.* Les unités de mesure des grandeurs dérivées sont établies en se fixant d'avance les valeurs numériques des coefficients figurant dans les formules ou dans l'expression des lois physiques définissant ces grandeurs dérivées. Pour illustrer cette proposition prenons le cas de la vitesse d'un point matériel en mouvement uniforme; cette grandeur est proportionnelle au chemin parcouru s et inversement proportionnelle au temps t mis pour parcourir ce chemin. Si les unités de mesure de s, t et v avaient été choisies indépendamment les unes des autres, on aurait dû écrire $v = C\, s/t$, C étant un coefficient numérique dont la valeur dépend des unités choisies pour mesurer ces grandeurs. Si on se fixe la valeur de ce coefficient, les unités de mesure de s, t et v cessent d'être indépendantes. En posant pour simplifier $C = 1$, on écrira $v = s/t$. Si on choisit comme grandeurs fondamentales la longueur s et le temps t, la vitesse v devient une grandeur dérivée. On est alors obligé d'adopter pour unité de vitesse la vitesse d'un mouvement uniforme où le mobile parcourt l'unité de chemin par unité de temps. On dit alors que la dimension de la vitesse est une longueur divisée par le temps, ce que l'on écrit: $[v] = LT^{-1}$. De même tant que l'on choisit les unités de mesure indépendamment les unes des autres, on écrira pour l'accélération: $a = C\frac{dv}{dt}$. En posant $C = 1$, l'accélération a devient une unité dérivée ayant la dimension de la vitesse divisée par le temps ou la dimension de la longueur divisée par le carré du temps. L'unité d'accélération est donc l'accélération d'un mouvement uniformément accéléré où la vitesse augmente d'une unité par unité de temps. En unités arbitraires la deuxième loi de Newton s'écrit $F = Cma$. En fixant la valeur du coefficient C la force devient une grandeur dérivée et nous lui assignons une unité de mesure. Si on fait par exemple $C = 1$, on a $F = ma$ et la formule de dimensions de la force s'exprime par le produit de la masse par l'accélération: $[F] = [ma] = MLT^{-2}$. La formule $F = ma$ impose que l'unité de force soit égale à la force communiquant à l'unité de masse une accélération égale à l'unité.

3. Les dimensions d'une grandeur physique ne déterminent nullement la grandeur de son unité de mesure. Elles ne servent qu'à établir une corrélation entre les unités de mesure des différentes grandeurs physiques qui y figurent. *La connaissance des dimensions permet d'établir une règle permettant de déterminer la variation de l'unité de mesure d'une grandeur physique dérivée lorsqu'on fait varier l'échelle des unités fondamentales.* Les *formules de dimensions* des grandeurs physiques

sont l'expression mathématique de cette règle. Supposons, par exemple, que l'on ait adopté pour unité de longueur le kilomètre et pour unité de temps la minute. Dans ce système l'unité d'accélération sera le km/mn². Quelle sera l'unité d'accélération si on adopte pour unité de longueur le centimètre et pour unité de temps la seconde. La formule de dimension permet de résoudre facilement ce problème. Nous écrivons d'abord les égalités 1 km = 10^5 cm, 1 mn = 60 s et nous obtenons

$$1 \text{ km/mn}^2 = \frac{10^5 \text{ cm}}{60^2 \text{ s}^2} = \frac{1000}{36} \text{ cm/s}^2.$$

On voit ainsi que l'unité d'accélération 1 km/mn² est 1000/36 fois plus grande que l'unité 1 cm/s², et par suite la valeur numérique de l'accélération mesurée en km/mn² sera 1000/36 fois plus petite que la même accélération mesurée en cm/s².

§ 87. Formule de dimensions

1. Le terme « système d'unités » est utilisé dans deux sens différents. Dans son sens général, un système d'unités se caractérise par le choix des grandeurs fondamentales et par les formules définissant les grandeurs dérivées en fonction des grandeurs fondamentales, *l'échelle des unités de ces dernières grandeurs n'étant pas fixée.* Citons comme exemple le système *LMT* où les grandeurs fondamentales sont la longueur, la masse et le temps. Un autre exemple nous est fourni par le système électrotechnique *LMTI* où les grandeurs fondamentales sont la longueur, la masse, le temps et l'intensité *I* du courant électrique. Dans son sens restreint, un système d'unités de mesure est encore caractérisé par le *choix d'une échelle de grandeur des unités de mesure fondamentales.* Prenons pour exemple les systèmes CGS et MKSA. Le système CGS est un cas particulier du système *LMT* où les unités de longueur, de masse et de temps sont le centimètre, le gramme et la seconde. Le système MKSA appartient au système électrotechnique *LMTI* où on a choisi pour unités de mesure des grandeurs fondamentales le mètre, le kilogramme, la seconde et l'ampère. Dans la théorie des dimensions des grandeurs physiques le terme « système d'unités » est pris dans son acceptation la plus large.

La notion de dimension est apparue parce qu'on exige impérativement que dans un même système d'unités les rapports quantitatifs entre différentes grandeurs physiques s'expriment toujours par les *mêmes formules* quelles que soient les échelles des unités des grandeurs physiques fondamentales. C'est cette condition qui détermine la forme générale des « formules de dimensions » des grandeurs physiques. Soient plusieurs grandeurs physiques liées les

unes aux autres. Pour simplifier, considérons deux grandeurs physiques, l'une étant prise pour grandeur fondamentale et l'autre étant une grandeur dérivée. Leurs valeurs numériques x et y sont liées l'une à l'autre par l'équation $y = f(x)$. Il s'agit de trouver la forme générale de la fonction $f(x)$. Si on diminue l'unité de mesure x de la grandeur fondamentale de α fois, sa valeur numérique augmente d'autant de fois et devient $X = \alpha x$. L'unité de mesure y de la grandeur dérivée diminuera et la valeur numérique de cette grandeur augmentera de β fois, devenant égale à $Y = \beta y$. Nous exigeons que les nouvelles valeurs numériques X et Y soient reliées par la même équation que celle qui reliait x et y, soit $Y = f(X)$ ou $\beta y = f(\alpha x)$. Cette condition peut être satisfaite pour n'importe quelle valeur de α si on arrive à choisir convenablement la valeur de β. Le problème consiste à calculer β en fonction de la variable α. Les formules de dimensions fournissent la solution de ce problème.

Avant de présenter la solution correspondante, nous voulons modifier l'énoncé du problème. Soient deux grandeurs physiques reliées par une relation telle que $y = f(x)$. Conservant les mêmes unités de mesure, faisons varier les valeurs des grandeurs physiques, qui s'étant accrues l'une de α fois et l'autre de β fois, sont devenues égales à $X = \alpha x$ et à $Y = \beta y$. Il convient de répondre à la question : à quelles conditions doivent satisfaire les nombres α et β pour que la relation entre les nouvelles valeurs X et Y des grandeurs physiques soit la même qu'entre les anciennes valeurs x et y, soit $Y = f(X)$. La réponse nous est fournie par la *théorie de la similitude*. Il s'agit encore une fois d'étudier l'équation $\beta y = f(\alpha x)$. Cela montre que la théorie dimensionnelle ne se distingue de la théorie de la similitude que par la forme de l'énoncé du problème et non par le fond. La théorie de la similitude permet d'étudier les corrélations quantitatives entre les paramètres des systèmes physiques réels représentés par des modèles convenables. C'est ce que fait la technique aéronautique en disposant dans une soufflerie des modèles réduits d'avions réels. Après étude sur modèles réduits, l'application de la théorie de la similitude ou de la théorie dimensionnelle permet de tirer des conclusions relatives au comportement des systèmes dans des conditions réelles. La théorie des dimensions ramène la question de la similitude des phénomènes physiques dans le sens indiqué ci-dessus à une *analyse des dimensions* des grandeurs physiques.

2. Après ces quelques remarques préliminaires nous allons établir la forme générale des formules de dimensions. Comme nous l'avons dit, connaissant l'équation $y = f(x)$ nous voulons en déduire l'équation $Y = f(X)$ avec $X = \alpha x$, $Y = \beta y$. La variable x et le paramètre α peuvent prendre indépendamment n'importe quelles valeurs. Le problème consiste à calculer la valeur de β connaissant celle de α. En différentiant pour des valeurs données de α et de β, nous obte-

nons

$$\frac{dy}{dx}=f'(x), \quad \frac{dY}{dX}=f'(X).$$

Ecrivons la seconde formule sous la forme

$$\frac{\beta}{\alpha}\frac{dy}{dx}=f'(X)$$

et divisons-la membre à membre par la première formule; dans le résultat obtenu remplaçons α et β par les expressions $\alpha = \frac{X}{x}$, $\beta = \frac{Y}{y}=\frac{f(X)}{f(x)}$. Nous obtenons alors

$$x\frac{f'(x)}{f(x)}=X\frac{f'(X)}{f(X)}.$$

A gauche on trouve une fonction de x et à droite la même fonction de X. En désignant cette fonction par le symbole F nous avons $F(x) = F(X)$. Mais comme le paramètre α est arbitraire, les variables x et $X=\alpha x$ peuvent prendre indépendamment l'une de l'autre des valeurs quelconques. Par suite l'égalité $F(x) = F(X)$ doit être identiquement vérifiée pour toutes les valeurs de x et de X. Cela signifie que $F(x)$ est une constante. En la désignant par m, nous obtenons l'équation différentielle suivante:

$$x\frac{f'(x)}{f(x)}=m$$

ou

$$\frac{df(x)}{f(x)}=m\frac{dx}{x}.$$

On en tire

$$f(x) = f_0x^m,$$

où f_0 est la constante d'intégration. Ainsi $y = f_0x^m$. De même $Y = f_0X^m$ ou $\beta y = f_0(\alpha x)^m$. En divisant membre à membre on élimine x et y et on obtient

$$\beta = \alpha^m. \tag{87.1}$$

C'est la formule de dimension. Nous voyons bien que la condition de l'indépendance de la relation fonctionnelle entre y et x de l'échelle de l'unité de mesure de la grandeur fondamentale x ne peut être satisfaite que si la dimension est exprimée par une *puissance*.

Ces considérations se laissent généraliser au cas où la grandeur physique concernée dépend de plusieurs grandeurs fondamentales. Il suffit alors de fixer les unités de toutes les grandeurs physiques fondamentales sauf une. En reprenant les démonstrations on démontre que la formule de dimension de la grandeur concernée renfermera toutes les *grandeurs physiques fondamentales élevées à différentes puis-*

sances. Supposons, par exemple, qu'il y ait trois grandeurs fondamentales: la longueur (L), la masse (M) et le temps (T). La dimension de n'importe quelle grandeur physique y sera alors donnée par la formule

$$[y] = L^p M^q T^r, \tag{87.2}$$

p, q, r étant des nombres constants. Il résulte de la formule (87.2) que si on diminue les unités de longueur, de masse et de temps respectivement de α, de β et de γ fois, l'unité de la grandeur dérivée y diminuera de $\alpha^p\beta^q\gamma^r$ fois et sa valeur numérique augmentera donc d'autant de fois.

3. En examinant les dimensions des grandeurs physiques que l'on rencontre effectivement en Physique, on constate que dans tous les cas les nombres p, q, r sont rationnels. Ce résultat n'est pas imposé par la théorie dimensionnelle, mais découle des définitions des grandeurs physiques. Ainsi, par exemple, la vitesse étant introduite par la formule $v = s/t$, a pour dimension le quotient d'une longueur par le temps; ici $p = 1$, $q = 0$, $r = -1$. La théorie dimensionnelle admet en principe l'apparition de grandeurs pour lesquelles p, q et r sont des nombres irrationnels, par exemple $(1/t)\, s^{\sqrt{2}}$. Pour une telle grandeur $p = \sqrt{2}$. On n'introduit pas ces grandeurs en Physique non pour des raisons de principe, mais tout simplement parce qu'on n'en éprouve pas le besoin.

4. Bien souvent on identifie la dimension d'une grandeur physique avec son unité de mesure dans un système d'unités approprié. On dit par exemple que la vitesse a pour dimension cm/s, que la dimension de la force est g·cm/s^2. C'est illogique, mais ne tire pas à grande conséquence. L'emploi de telles unités permet toujours de passer en cas de besoin aux formules de dimensions dans lesquelles les échelles des unités fondamentales ne sont pas fixées.

5. Suivant le choix des grandeurs fondamentales et suivant la forme des formules reliant ces grandeurs fondamentales aux grandeurs dérivées, une seule et même grandeur physique prend dans différents systèmes d'unités non seulement des valeurs différentes, mais encore des dimensions différentes. Par exemple, dans le système LMT, la dimension de la force se déduit de la deuxième loi de Newton $f = Cma$ où le coefficient C sans dimension est posé égal à l'unité. La force aurait alors pour dimension LMT^{-2}. Mais il n'est nullement obligatoire de procéder ainsi puisqu'on peut attribuer au coefficient C une dimension et une valeur quelconques. On disposera alors d'un nouveau système d'unités où la force aura une autre dimension. Par exemple, partant de l'équation $f = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ exprimant la loi de la gravitation universelle de Newton, on peut égaler à l'unité la constante gravitationnelle G et la considérer comme dénuée de dimension. La force f aura alors pour dimension M^2L^{-2}, tandis

que dans la deuxième loi de Newton $f = Cma$ le coefficient C aura pour dimension $ML^{-3}T^2$.

Plusieurs grandeurs physiques peuvent avoir les mêmes dimensions, même dans un seul et même système d'unités. En mécanique on peut citer, par exemple, le travail et l'énergie cinétique ou encore le travail et le moment des forces (système *MLT*) et en électromagnétisme la capacité et l'inductivité qui dans le système gaussien ont la dimension d'une longueur. Dans ce cas les unités de ces grandeurs physiques ont souvent les mêmes dénominations, bien qu'il s'agisse de choses différentes. Le fait que deux grandeurs physiques différentes ont même dimension témoigne non pas de leur identité mais uniquement de ce que dans le système d'unités adopté les échelles des unités de mesure de ces grandeurs varient de la même façon lorsqu'on fait varier l'échelle des unités des grandeurs physiques fondamentales. Dans d'autres systèmes d'unités les dimensions de ces mêmes grandeurs physiques peuvent fort bien ne pas coïncider.

On interprète parfois la non-coïncidence des dimensions d'une seule et même grandeur physique dans différents systèmes d'unités comme une contradiction logique qui doit être levée. Ce point de vue fut à l'origine de la question des « vraies » dimensions des grandeurs physiques. D'après ce que nous venons de dire, on voit fort bien qu'il n'est nul besoin de démontrer qu'une grandeur physique ne peut posséder de dimension qui lui soit inhérente. Sa dimension n'apparaîtra qu'une fois fixé un système d'unités de mesure ; quant à la question des « vraies » dimensions des grandeurs physiques, on peut rappeler que Max Planck avait dit que cette question est aussi dénuée de sens que la question du « vrai » nom d'un objet quelconque.

6. On appelle *combinaisons sans dimension des grandeurs physiques* les combinaisons qui, dans un système donné d'unités de mesure, n'ont pas de dimensions. Leurs valeurs numériques ne changent donc pas lorsqu'on modifie l'échelle des unités des grandeurs fondamentales. Donnons quelques exemples de telles combinaisons. Si la grandeur y a la dimension d'une autre grandeur x élevée à la puissance α, il est évident que le rapport y/x^α sera une combinaison sans dimension des deux grandeurs x et y.

On peut illustrer la méthode générale de construction des combinaisons sans dimension en prenant pour exemple un système d'unités basé sur trois grandeurs fondamentales — la longueur (L), la masse (M) et le temps (T). Soient n grandeurs physiques x_1, x_2, x_3, . . ., x_n ayant dans ce système les dimensions suivantes :

$$L^{p_1}M^{q_1}T^{r_1}, \quad L^{p_2}M^{q_2}T^{r_2}, \ldots, \quad L^{p_n}M^{q_n}T^{r_n}.$$

Il s'agit de réaliser avec ces grandeurs une combinaison sans dimension. D'après le théorème que nous avons démontré au point 2, la combinaison cherchée doit être de la forme $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots\ x_n^{\alpha_n}$. Elle

aura pour dimension

$$(L^{p_1}M^{q_1}T^{r_1})^{\alpha_1}(L^{p_2}M^{q_2}T^{r_2})^{\alpha_2}\dots(L^{p_n}M^{q_n}T^{r_n})^{\alpha_n},$$

soit $L^pM^qT^r$ avec

$$\begin{aligned} p &= p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \dots + p_n\alpha_n, \\ q &= q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \dots + q_n\alpha_n, \\ r &= r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \dots + r_n\alpha_n. \end{aligned} \tag{87.3}$$

Afin que cette combinaison n'ait pas de dimension, il est nécessaire et suffisant que $p = q = r = 0$. On obtient alors un système de trois équations homogènes

$$\begin{aligned} p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \dots + p_n\alpha_n &= 0, \\ q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \dots + q_n\alpha_n &= 0, \\ r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \dots + r_n\alpha_n &= 0 \end{aligned} \tag{87.4}$$

avec les inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

On peut toujours fixer arbitrairement la valeur de l'une de ces inconnues puisqu'une combinaison sans dimension restera dénuée de dimension si on l'élève à une puissance quelconque. Fixons, par exemple, la valeur de α_1. Nous disposerons alors de trois équations pour calculer $n - 1$ inconnues; il est commode de prendre pour inconnues les rapports $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$. Si ces équations sont indépendantes, on pourra choisir arbitrairement les valeurs de $(n - 1) - 3 = n - 4$ rapports. Les trois autres rapports seront déterminés à l'aide des équations (87.4). En définitive on détermine $n - 4$ combinaisons sans dimension indépendantes. Toute fonction de ces combinaisons sera elle aussi une combinaison sans dimension. Dans le cas où les trois équations (87.4) ne seraient pas indépendantes, le nombre des combinaisons indépendantes dénuées de dimension augmentera. Si deux seulement des trois équations (87.4) sont indépendantes, il y aura $n - 3$ combinaisons indépendantes, etc.

§ 88. Règle des dimensions

1. Toutes les applications de la théorie dimensionnelle sont fondées sur deux théorèmes. L'un de ces théorèmes s'exprime par la formule (87.2) établissant la forme générale des dimensions des grandeurs physiques. Le deuxième théorème affirme que toute corrélation quantitative entre des grandeurs physiques se laisse exprimer par une relation fonctionnelle entre les *combinaisons sans dimension de ces grandeurs.*

Pour démontrer ce théorème nous supposerons qu'il existe entre les grandeurs $a, b, c, x_1, x_2, x_3, \dots$ une relation fonctionnelle $f(a, b, c, x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$. Adoptons comme grandeurs fondamentales

les grandeurs a, b, c, les autres grandeurs x_1, x_2, x_3 étant des grandeurs dérivées. (Nous avons pris trois grandeurs fondamentales mais le nombre importe peu.) Posons que les grandeurs dérivées présentent les dimensions: $[x_1] = [a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}]$, $[x_2] = [a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}]$, . . . Diminuons de α, β, γ fois les unités des grandeurs fondamentales correspondantes. Les valeurs des grandeurs fondamentales deviennent alors αa, βb, γc et celles des grandeurs dérivées s'écriront $\alpha^{p_1}\beta^{q_1}\gamma^{r_1}x_1$, $\alpha^{p_2}\beta^{q_2}\gamma^{r_2}x_2$, ... Notre relation fonctionnelle s'écrit maintenant

$$f(\alpha a,\ \beta b,\ \gamma c,\ \alpha^{p_1}\beta^{q_1}\gamma^{r_1}x_1,\ \ \alpha^{p_2}\beta^{q_2}\gamma^{r_2}x_2,\ \ldots)=0,$$

les valeurs α, β, γ sont quelconques. Choisissons-les de façon que $\alpha a = \beta b = \gamma c = 1$. Un tel choix de valeurs revient à passer d'un système d'unités bien déterminé à un système d'unités changeant dans lequel les valeurs numériques des grandeurs fondamentales sont posées égales à l'unité pour le cas étudié. On a alors

$$f\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{x_1}{a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}},\ \frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}},\ \ldots\right)=0.$$

Les variables de cette équation sont toutes des combinaisons sans dimension des grandeurs physiques. On peut mettre cette équation sous la forme

$$F\left(\frac{x_1}{a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}},\ \frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}},\ \ldots\right)=0, \tag{88.1}$$

où F est une nouvelle fonction. Le théorème est démontré.

2. Ce même théorème peut s'exprimer autrement. Résolvons l'équation (88.1) par rapport à l'une des variables, la première par exemple; multiplions le résultat obtenu par le dénominateur de cette variable:

$$x_1 = a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}\varphi\left(\frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}},\ \ldots\right), \tag{88.2}$$

où φ est une certaine fonction des variables sans dimension. Ce résultat signifie que dans toute loi physique telle que $A = B$ les dimensions des deux membres de cette égalité doivent être *les mêmes*. Sous cette forme le théorème démontré est connu sous le nom de *règle des dimensions*. Une égalité telle que $A = B$ peut comporter comme facteurs soit des coefficients constants, soit des combinaisons sans dimension des grandeurs physiques. Selon cette règle, les grandeurs physiques dimensionnelles ne peuvent être soumises qu'à des opérations mathématiques impliquant des élévations à des puissances, toutes les autres opérations mathématiques ($\sin x$, e^x, $\ln x$, etc.) n'étant applicables qu'aux grandeurs sans dimension. La règle des dimensions rend de grands services lorsqu'il s'agit de vérifier les formules. Si les calculs sont faits dans un seul et même système

d'unités, les dimensions des deux membres de toutes les égalités doivent être les mêmes. S'il n'en est pas ainsi, on doit conclure que les calculs sont faux.

On ne doit cependant pas en conclure qu'il ne peut y avoir de lois physiques s'exprimant par des égalités entre des grandeurs physiques ayant des dimensions différentes. En Physique ce cas est assez fréquent. Par exemple, la vitesse d'un corps en chute libre peut s'exprimer par la loi approchée $v = 10t$ (à condition que la vitesse initiale du corps soit nulle) et la pression hydrostatique d'une couche d'eau par la formule $P = 1/10h$. De telles formules ne sont valables que si les unités des grandeurs physiques qui y figurent sont *bien précisées*. Dans nos exemples on a supposé que le temps t est mesuré en secondes, la vitesse v en mètres par seconde, l'épaisseur h de la couche d'eau en mètres et la pression P en atmosphères. Ces formules n'admettent donc aucun changement d'unités. Il est par conséquent dénué de sens de parler des dimensions des grandeurs qui figurent dans ces formules.

3. La théorie dimensionnelle seule, sans utilisation de données supplémentaires, ne permet de tirer aucune conclusion concrète puisqu'elle ne se fonde sur aucune loi physique. Pour pouvoir en tirer des conclusions concrètes, il faut déterminer *entre quelles grandeurs physiques* il existe des relations quantitatives et là, la théorie dimensionnelle n'est d'aucun secours. On utilisera alors des données expérimentales ou des lois physiques adéquates. Les quelques exemples qui suivent illustrent nos considérations.

PROBLÈMES

1. Etablir toutes les combinaisons sans dimension possibles entre les grandeurs l, m, t, v, a, ρ, E, φ (l — longueur, m — masse, t — temps, v — vitesse, a — accélération, ρ — densité d'une substance, E — module de Young, φ — angle en radians).

Solution. Le procédé le plus simple est le suivant. Parmi les grandeurs citées l'angle φ est une grandeur sans dimension. Par ailleurs on remarquera que le produit vt a la dimension d'une longueur, le produit at la dimension d'une vitesse, le produit ρl^3 la dimension d'une masse, ρv^2 la dimension d'une pression et donc celle du module de Young. On peut donc écrire aussitôt plusieurs combinaisons sans dimension:

$$\frac{vt}{l}, \quad \frac{at}{v}, \quad \frac{\rho l^3}{m}, \quad \frac{\rho v^2}{E}, \quad \varphi. \tag{88.3}$$

On ne peut cependant affirmer que la série (88.3) épuise toutes les combinaisons sans dimension indépendantes pouvant être formées avec les grandeurs physiques données. Comme la méthode générale exposée au § 87, point 6, ne présente pas cet inconvénient, nous l'appliquerons aussi à la résolution de notre problème. L'angle φ étant une grandeur sans dimension, nous n'en tiendrons pas compte. Avec les sept grandeurs restantes formons une combinaison de la forme

$$l^\alpha m^\beta t^\gamma v^\delta a^\lambda \rho^\mu E^\nu.$$

En exprimant les dimensions de v, a, ρ, E en fonction des dimensions des grandeurs fondamentales l, m, t, la combinaison ci-dessus s'écrit

$$l^{\alpha}m^{\beta}t^{\gamma}l^{\delta}t^{-\delta}l^{\lambda}t^{-2\lambda}m^{\mu}l^{-3\mu}m^{\nu}l^{-\nu}t^{-2\nu},$$

et se ramène donc à une combinaison de la forme

$$l^{\alpha+\delta+\lambda-3\mu-\nu}m^{\beta+\mu+\nu}t^{\gamma-\delta-2\lambda-2\nu}.$$

Afin que cette combinaison soit dénuée de dimension, il faut que

$$\alpha+\delta+\lambda-3\mu-\nu=0,$$
$$\beta+\mu+\nu=0,$$
$$\gamma-\delta-2\lambda-2\nu=0.$$

A l'aide de ces trois équations on peut exprimer trois paramètres inconnus en termes des quatre autres paramètres. Le plus simple est de prendre pour paramètres indépendants δ, λ, μ, ν puisque les équations sont pratiquement résolues par rapport aux autres paramètres α, β, γ:

$$\alpha=-\delta-\lambda+3\mu+\nu,$$
$$\beta=-\mu-\nu,$$
$$\gamma=\delta+2\lambda+2\nu.$$

Les paramètres δ, λ, μ, ν peuvent prendre n'importe quelles valeurs indépendantes. En posant successivement

1) $\delta=1,\quad \lambda=\mu=\nu=0,$ 2) $\lambda=1,\quad \delta=\mu=\nu=0,$

3) $\mu=1,\quad \delta=\lambda=\nu=0,$ 4) $\nu=1,\quad \delta=\lambda=\mu=0,$

on obtient

1) $\alpha=-1,\quad \beta=0,\quad \gamma=1,$ 2) $\alpha=-1,\quad \beta=0,\quad \gamma=2,$

3) $\alpha=3,\quad \beta=-1,\quad \gamma=0,$ 4) $\alpha=1,\quad \beta=-1,\quad \gamma=2.$

A ces valeurs correspondent les combinaisons sans dimension:

$$1)\ \frac{vt}{l},\quad 2)\ \frac{at^2}{l},\quad 3)\ \frac{\rho l^3}{m},\quad 4)\ \frac{Elt^2}{m}.$$

En y adjoignant l'angle φ nous obtenons en tout cinq combinaisons sans dimension indépendantes qui sont toutes des fonctions des combinaisons sans dimension (88.3). On en conclut que la série (88.3) renferme toutes les combinaisons possibles entre les grandeurs données.

2. Comment varie avec l'altitude h la vitesse de chute libre d'un corps dont la vitesse initiale était nulle?

S o l u t i o n. L'accélération g de la chute libre est une constante dont la valeur ne dépend ni de la masse, ni de la densité, ni des propriétés élastiques, ni d'aucune autre propriété. Par suite la vitesse de chute libre v ne peut dépendre que de g et de h. A partir des combinaisons sans dimension (88.3) on ne peut former qu'une seule combinaison sans dimension $v^2/(la)$ ou $v^2/(gh)$, qui est indépendante et ne contient que longueur, vitesse et accélération. Cette combinaison s'obtient en divisant le premier terme de la série (88.3) par le second terme de cette série. Par suite on doit avoir $f\left(\frac{v^2}{gh}\right)=0$, d'où $v^2/(gh)=C=\text{const}$, ou $v^2=Cgh$. La théorie dimensionnelle ne permet pas de déterminer la valeur du coefficient C.

3. A l'aide des considérations sur les dimensions, trouver la dépendance de la période T des oscillations d'un pendule pesant avec sa longueur réduite l, l'accélération de la pesanteur g et l'amplitude angulaire α.

Réponse. $T = \varphi(\alpha) \sqrt{l/g}$. La théorie dimensionnelle ne suffit pas à expliciter la forme de la fonction $\varphi(\alpha)$. Si on développe cette fonction en série de Taylor et qu'on n'y conserve que le terme de puissance zéro (ce qui est admissible si les oscillations sont petites), on trouve $T = C \sqrt{l/g}$, C étant un coefficient numérique constant dont on ne peut calculer la valeur par la théorie dimensionnelle. Le fait que $C \neq 0$ ne découle pas non plus de cette théorie et doit être établi autrement (par l'expérience notamment).

4. A l'aide de considérations dimensionnelles déterminer la dépendance de la vitesse v de propagation des perturbations élastiques longitudinales dans une tige avec le module de Young E et la densité ρ du matériau de la tige.

Réponse. $v = C \sqrt{E/\rho}$. La théorie dimensionnelle ne permet pas de calculer la valeur numérique de C.

5. Deux points matériels indépendants se trouvant dans un champ de forces centrales décrivent des trajectoires géométriquement semblables. La force F agissant sur chacun des points matériels est proportionnelle à sa masse et varie avec la distance r jusqu'au centre de force comme r^n, n étant une constante. Trouver la relation entre les longueurs l_1 et l_2 des arcs géométriquement semblables des trajectoires et les temps T_1 et T_2 que mettent les points à parcourir ces arcs de trajectoires.

Solution. Il doit exister une relation entre la longueur l de l'arc de la trajectoire, le temps T mis à le parcourir et l'accélération a dirigée vers le centre de force. Les accélérations peuvent être définies en des points quelconques à condition que soit respectée la similitude des positions de ces points sur les arcs. Avec ces trois grandeurs on ne peut former qu'une seule combinaison sans dimension et indépendante: aT^2/l. On doit donc avoir $aT^2/l =$ const. L'accélération peut être de la forme $a = Ar^n$, où A est une constante, la même pour les deux points matériels. Du fait de la similitude des trajectoires des points matériels on peut écrire aussi: $a = Bl^n$, où B est une autre constante qui est la même pour les deux points matériels. On obtient ainsi $T^2 l^{n-1} =$ const et par suite $T_1^2 l_1^{n-1} = T_2^2 l_2^{n-1}$. Dans les cas particuliers où $n = 1$ et $n = -2$ on trouve $T =$ const et $T^2/l^3 =$ const. La première relation signifie que dans le cas d'un oscillateur harmonique la période d'oscillation ou la période de révolution autour du centre de force ne dépend pas de l'amplitude ou des dimensions de l'orbite. La seconde égalité exprime la troisième loi de Kepler. Dans le cas présent cette loi n'est valable que pour des particules parcourant des trajectoires similaires.

CHAPITRE XII

MÉCANIQUE DES FLUIDES

§ 89. Propriétés générales des fluides

1. A la différence des corps solides, *les liquides et les gaz ne jouissent pas à l'état d'équilibre d'une élasticité de forme* *), *mais présentent une élasticité spatiale. Dans les fluides à l'état d'équilibre les contraintes sont toujours normales à la surface sur laquelle elles sont appliquées.* Les contraintes tangentielles ne sauraient provoquer qu'un changement de forme des volumes élémentaires des corps (glissements) sans en modifier les volumes. Pour provoquer de telles déformations dans les fluides il ne faut exercer aucun effort; aussi à l'état d'équilibre des contraintes tangentielles n'apparaissent-elles pas dans ces milieux. Du point de vue de la mécanique *les fluides pourraient être définis comme des milieux où, à l'état d'équilibre, il n'existe pas de contraintes tangentielles.*

Il résulte de cette définition que dans un fluide à l'état d'équilibre la grandeur de la contrainte normale est indépendante de l'orientation de la surface sur laquelle elle s'exerce. Démontrons cette proposition. Prenons une surface élémentaire arbitrairement orientée dont la normale extérieure est définie par le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$. Comme la contrainte est normale à la surface on peut la représenter par $\boldsymbol{\sigma}_n = -P\boldsymbol{n}$. Les contraintes s'exerçant sur des surfaces orthogonales aux axes de coordonnées s'écriront alors $\boldsymbol{\sigma}_x = -P_x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\sigma}_y = -P_y\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{\sigma}_z = -P_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ étant les vecteurs unitaires des axes de coordonnées. En portant ces valeurs dans la formule (74.1) on obtient

$$P\boldsymbol{n} = P_x n_x \boldsymbol{i} + P_y n_y \boldsymbol{j} + P_z n_z \boldsymbol{k}.$$

En multipliant scalairement cette relation successivement par $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$, on arrive au résultat suivant:

$$P = P_x = P_y = P_z. \tag{89.1}$$

Il s'ensuit qu'*à l'état d'équilibre la tension normale* (*la pression* P) *ne dépend pas de l'orientation de la surface sur laquelle elle s'exerce. C'est la loi de Pascal* (1623-1662).

*) On doit excepter les pellicules liquides et les couches superficielles des liquides. Les phénomènes qui en résultent ne seront étudiés que dans le tome II de notre cours.

2. Dans les gaz une contrainte normale est toujours dirigée vers l'intérieur du gaz et se comporte donc comme une *pression*. Dans les liquides peut se produire, exceptionnellement, une contrainte normale, ou une *tension* (pression négative), ce qui témoigne que les liquides présentent une résistance à la rupture. En général cette résistance à la rupture est assez importante et atteint pour des liquides homogènes plusieurs dizaines de newtons par millimètre carré. Les liquides usuels ne sont pas homogènes car ils contiennent de très petites bulles de gaz qui y jouent le même rôle que les entailles dans une corde et réduisent considérablement la résistance à la rupture des liquides. Aussi les contraintes qui s'exercent dans les liquides se comportent surtout comme des pressions. En conséquence nous désignerons les contraintes normales par le symbole $-P_n$ (pression) et non par le symbole $+T_n$ (tension). Si la pression se transforme en tension, i.e. devient négative, la continuité du liquide est généralement compromise. Ce sont ces particularités qui déterminent la propriété qu'ont les gaz de se dilater indéfiniment : tout gaz occupe la totalité du volume du récipient qui est mis à sa disposition. Les liquides, eux, possèdent un *volume propre* qui ne varie que faiblement sous l'action des variations de la pression extérieure. Les liquides présentent une surface libre et peuvent se rassembler en gouttes. Lorsqu'on étudie en mécanique les mouvements des fluides aqueux et des gaz on considère le gaz comme un cas particulier de l'état liquide. Par suite on désigne par le terme général de fluide soit un fluide aqueux, soit un gaz. *La partie de la mécanique consacrée à l'étude du mouvement et de l'équilibre des liquides s'appelle l'hydrodynamique.*

3. La pression qui existe dans un fluide résulte de sa compression. Puisqu'il ne peut y avoir de contraintes tangentielles, les propriétés élastiques des fluides correspondant à de petites déformations ne se caractérisent que par une seule constante élastique : le *coefficient de compressibilité*

$$\gamma = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}, \qquad (89.2)$$

ou la grandeur inverse appelée *module de compression triaxiale*

$$K = -V\frac{dP}{dV}. \qquad (89.3)$$

On suppose que durant la compression la température du fluide reste constante. Lorsqu'on étudie les déformations s'accompagnant d'un changement de température du fluide, il est préférable d'écrire les formules (89.2) et (89.3) de la manière suivante :

$$\gamma_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_{T=\text{const}}, \qquad (89.2a)$$

$$K_T = -V\left(\frac{dP}{dV}\right)_{T=\text{const}}, \qquad (89.3a)$$

et d'appeler γ_T et K_T *coefficient de compressibilité* et *module de compression triaxiale isothermiques*. Dans le cas de processus rapides s'effectuant sans échange de chaleur, un rôle important revient aux *coefficients* et aux *modules d'élasticité adiabatiques* (cf. § 75, point 8).

Lorsque nous avons étudié les déformations des solides, nous avons défini le module de compression triaxiale par la formule (77.3) qui renferme la quantité P et non pas dP comme dans la formule (89.3). Nous avons pu donner une telle définition parce que tout solide possède un volume bien déterminé lorsque la pression extérieure P devient nulle et que ce volume varie peu pour des variations finies de la pression P qui lui est appliquée. Si on pose $dP = P - P_0$ avec $P_0 = 0$ la formule (89.3) se ramène à (77.3). On pourrait appliquer ce raisonnement aux fluides aqueux mais la formule (77.3) ne peut s'appliquer aux gaz. On doit utiliser la formule (89.3) puisqu'en l'absence de pression extérieure le volume du gaz devient infiniment grand. C'est ce que nous avons fait au § 85 lors de l'étude de la vitesse du son dans les gaz.

On choisit généralement un certain état du corps caractérisé par une pression P_0 (et une température T) pour en faire un état de référence, dit état *normal* auquel on rapporte ensuite les variations du volume du corps. Pour les corps solides et les fluides aqueux le module d'élasticité (89.3) étant largement indépendant de la valeur de P_0, on peut poser $P_0 = 0$. Dans le cas des gaz on doit préciser la valeur de P_0 et on ne peut poser $P_0 = 0$. En appliquant la loi de Boyle-Mariotte $P \sim 1/V$ (à T = const) on tire de (89.3) $K = P$. Cela montre bien qu'on ne peut parler du module d'élasticité d'un gaz que si on indique sa pression (à température constante).

4. La faible compressibilité des fluides aqueux peut être illustrée par l'expérience spectaculaire suivante. On remplit à moitié d'eau un récipient en matière plastique. Si on tire un coup de fusil (de petit calibre) au-dessus du niveau d'eau, la balle perfore les parois du récipient sans le briser. Mais si on tire la balle au-dessous du niveau d'eau, le récipient vole en morceaux car la balle ne peut pénétrer dans l'eau que si elle la comprime d'un volume égal au sien ou si elle la repousse vers le haut. Comme elle n'a pas le temps de repousser le liquide, sa pénétration dans l'eau y développe de fortes pressions qui font éclater le récipient. Pour cette expérience on peut également utiliser une caisse en bois ou une boîte en papier remplies d'eau. Dans ce dernier cas il suffit de disposer d'une carabine à air comprimé. Des phénomènes analogues se produisent dans le cas d'éclatement des mines anti-sous-marines. La compressibilité de l'eau étant petite, l'explosion de la mine sous l'eau y développe des pressions énormes, suffisantes pour endommager le sous-marin.

Du fait de la faible compressibilité des liquides, on peut bien souvent négliger leurs variations de volume. On introduit alors la notion de *fluide parfaitement incompressible*. C'est une idéalisation courante.

Il est évident que la pression qui se développe dans un fluide incompressible dépend de son taux de compression. Mais même si la pression appliquée est très grande, les variations de volume d'un fluide incompressible sont tellement petites qu'on peut les négliger. On peut dire qu'un fluide incompressible est le cas limite d'un liquide compressible où pour obtenir une pression infiniment grande il suffit d'un petit taux de compression. Un fluide incompressible est une abstraction au même titre que la notion de corps solide. La connaissance des déformations d'un corps solide est essentielle pour mettre en évidence le processus de formation des contraintes internes. Mais lorsque les déformations sont petites on peut substituer au corps réel un solide idéalisé. Le corps solide est le cas limite d'un corps réel où l'apparition de contraintes internes infiniment grandes est déterminée par des déformations infiniment petites.

Pour savoir dans quels cas on peut remplacer un fluide réel par un fluide incompressible, il faut tenir compte non seulement de sa compressibilité, mais encore de la nature du problème à l'étude. Ainsi pour étudier des ondes sonores, on ne peut par principe négliger la compressibilité des fluides. Mais dans l'étude des déplacements d'air, où les différences de pression sont modérées, on peut souvent considérer l'air comme un fluide incompressible (cf. § 94, point 5).

5. A l'état d'équilibre la pression P d'un liquide (ou d'un gaz) varie avec les variations de sa densité ρ et de sa température T. La pression dépend univoquement de ces paramètres. La relation entre la pression, la densité et la température à l'état d'équilibre

$$P = f(\rho, T) \tag{89.4}$$

porte le nom d'*équation d'état*. Suivant la nature de la substance, cette équation prend des formes différentes, mais devient particulièrement simple pour les gaz raréfiés. Nous étudierons dans le tome II les questions liées à l'équation d'état. Ici nous nous contenterons de noter que, connaissant l'équation d'état, on peut calculer le module d'élasticité K_T à température constante par une simple dérivation. Ce module est dans le cas général une fonction de la densité et de la température (ou de la pression et de la température).

6. *Si le fluide est en mouvement il peut être le siège non seulement de contraintes normales mais aussi de forces tangentielles.* Ces dernières sont définies non par les déformations des fluides (glissements) mais par leurs *vitesses*, i.e. par les dérivées des déformations par rapport au temps. Ces forces tangentielles doivent donc être classées parmi les *forces de frottement* ou *de viscosité*. On les appelle *forces tangentielles* ou *forces de glissement de frottement interne*. A côté de ces forces de glissement, il peut exister des forces *normales* ou *volumiques* de frottement interne. Ces dernières se distinguent des forces de pression usuelles par le fait qu'elles sont déterminées non par le taux de compression du fluide, mais par la *vitesse de variation de la compression en*

fonction du temps. Ces forces jouent un rôle important dans les processus rapides, par exemple dans la propagation d'ondes ultrasoniques ultracourtes (dont la longueur d'onde est peu différente des dimensions des molécules et des distances intermoléculaires). A la limite, lorsque la vitesse de variation des déformations d'un fluide tend vers zéro, toutes les forces de frottement interne (aussi bien celles de compression que les forces de glissement) disparaissent. Un fluide dans lequel n'apparaît aucune force de frottement interne (tangentielle et normale), quels que soient ses mouvements, est dit *parfait.* Autrement dit, dans un fluide parfait ne peuvent se manifester que les forces de pression normale P qui dépendent univoquement du taux de compression et de la température du fluide. On peut calculer ces forces à l'aide de l'équation d'état (89.4) pour un fluide au repos ou en mouvement. Il est évident qu'il n'existe pas de fluides parfaits. C'est une abstraction que l'on peut utiliser lorsque les vitesses de variation des déformations d'un fluide ne sont pas trop grandes.

7. L'application de forces tangentielles à un fluide le met en mouvement. Ce mouvement cesse avec le temps laissant le fluide au repos et libre de toute contrainte tangentielle. Les vitesses de variation des déformations d'un fluide peuvent varier dans de larges limites. Pour l'eau et l'alcool par exemple, ces variations sont très rapides, tandis que pour des liquides aussi visqueux que le miel ou les sirops, elles sont très lentes. Il existe aussi des substances qui, soumises à des contraintes rapides, se comportent comme des corps solides ou comme des liquides très visqueux si on les soumet à des actions lentes. Ce sont notamment les *substances solides amorphes.* Par exemple, un morceau d'asphalte se brise sous l'action d'un coup de marteau, mais on peut marcher dessus sans le détruire. De même l'asphalte contenu dans un tonneau s'en écoule très lentement. La vitesse d'écoulement augmente fortement avec la température. Une tige de verre qui repose pendant longtemps (mois ou années) par ses extrémités sur deux supports s'incurve et cette incurvation ne disparaît pas quand on supprime l'action de la pesanteur. Ces quelques exemples montrent qu'on ne saurait faire une nette distinction entre les fluides et les corps solides amorphes. Seuls les *cristaux* sont de vrais corps solides. Notons que parlant de fluides nous aurons toujours en vue des fluides ne présentant pas une viscosité anormalement grande, ce qui permettra de les distinguer nettement des solides amorphes.

§ 90. Equations fondamentales d'équilibre et de mouvement des fluides

1. Les forces qui s'exercent dans un fluide se subdivisent, comme dans tout autre milieu continu, en forces *massiques* (volumiques) et en forces *superficielles.* Une force massique est proportionnelle à la masse dm et donc au volume dV de l'élément du fluide sur le-

quel elle s'exerce. On peut désigner cette force par fdV en appelant f la *densité spatiale des forces massiques.* Les forces massiques les plus importantes sont les forces de pesanteur et les forces d'inertie (lorsque le mouvement est rapporté à des systèmes non inertiels). Pour la force de pesanteur $f = \rho g$, ρ étant la densité du liquide et g l'accélération de la force de pesanteur. Les forces superficielles sont des forces auxquelles se trouve soumis chaque volume élémentaire d'un fluide du fait des contraintes normales et tangentielles qu'applique à sa surface le liquide sous-jacent.

2. Considérons le cas où il n'y a pas de contraintes tangentielles et où un fluide n'est soumis qu'à des forces de pression normale. C'est

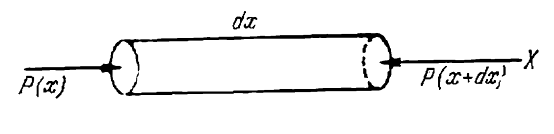


Fig. 230

ce qui se produit toujours dans un fluide parfait, quels que soient ses mouvements. Pour les autres liquides cette situation se réalisera si le liquide est au repos, c'est-à-dire en *hydrostatique*. Calculons la résultante des forces de pression appliquées à un volume élémentaire dV infiniment petit du fluide. Déterminons d'abord la projection de cette résultante sur la direction de l'axe de coordonnées X. Choisissons pour volume élémentaire dV un cylindre infinitésimal de base dS et de longueur dx (fig. 230) orienté suivant l'axe X. Désignons par x et $x + dx$ les abscisses des bases de ce cylindre. La force de pression exercée sur la première base est $P(x)\, dS$ et celle appliquée sur l'autre base est $-P(x + dx)\, dS$. Le symbole x placé entre parenthèses auprès de P indique la valeur de la variable dont dépend P. Il est évident que P peut dépendre aussi des coordonnées y, z et du temps t. Mais comme aucune de ces autres variables ne change lorsqu'on passe d'une base du cylindre à l'autre, nous pouvons les considérer comme des constantes. On pourrait fort bien prendre les dimensions transversales du cylindre comme infiniment petites d'ordre supérieur par rapport à la longueur dx. Dans ce cas y et z pourraient être considérés comme des constantes non seulement pour des déplacements le long du cylindre, mais aussi pour des déplacements transversaux. Les forces de pression qui s'exercent sur les parois latérales du cylindre sont perpendiculaires à l'axe X et n'apportent aucune contribution au calcul des composantes le long de cet axe. La projection sur l'axe X des forces de pression appliquées à l'élément de volume du fluide est donc

$$[P(x) - P(x + dx)]\, dS.$$

La différence infinitésimale figurant entre crochets peut être remplacée par la différentielle de la fonction P:

$$P(x+dx)-P(x)=dP_{\substack{y=\text{const}\\ z=\text{const}\\ t=\text{const}}}=\left(\frac{dP}{dx}\right)_{\substack{y=\text{const}\\ z=\text{const}\\ t=\text{const}}}dx.$$

Les conditions supplémentaires $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, $t = \text{const}$ servent à indiquer que dans le calcul de la dérivée dP/dx et de la différentielle dP on doit considérer y, z et t comme des constantes. La dérivée de la fonction $P(x, y, z, t)$ prise dans ces conditions est la *dérivée partielle* dont le symbole est $\frac{\partial P}{\partial x}$. En utilisant cette notation on obtient pour la projection de la force calculée

$$-\frac{\partial P}{\partial x}\,dS\,dx=-\frac{\partial P}{\partial x}\,dV,$$

puisque $dS\,dx = dV$. La projection est ainsi proportionnelle au volume élémentaire dV et on peut la désigner par $s_x dV$. La quantité s_x est la composante x de la force s'exerçant sur l'unité de volume du fluide, qui apparaît du fait de la variation de la pression normale P dans l'espace. De par sa signification, cette quantité ne peut dépendre de la forme de l'élément dV. Nous avons choisi une forme cylindrique pour simplifier le calcul. On peut calculer par le même procédé les projections s_y et s_z en orientant les cylindres élémentaires dV parallèlement aux axes Y et Z. On trouve que l'unité de volume du fluide est soumise à une force $\boldsymbol{s}$ provenant des forces de pression superficielles ou plus exactement de leurs variations spatiales. Les projections de cette force sont

$$s_x=-\frac{\partial P}{\partial x},\quad s_y=-\frac{\partial P}{\partial y},\quad s_z=-\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{90.1}$$

Le vecteur $\boldsymbol{s}$ est égal à

$$\boldsymbol{s}=-\frac{\partial P}{\partial x}\,\boldsymbol{i}-\frac{\partial P}{\partial y}\,\boldsymbol{j}-\frac{\partial P}{\partial z}\,\boldsymbol{k}, \tag{90.2}$$

ce qui s'écrit

$$\boldsymbol{s} = -\text{grad}\ P. \tag{90.3}$$

Nous avons introduit la notation

$$\text{grad}\,P\equiv\frac{\partial P}{\partial x}\,\boldsymbol{i}+\frac{\partial P}{\partial y}\,\boldsymbol{j}+\frac{\partial P}{\partial z}\,\boldsymbol{k}. \tag{90.4}$$

Ce vecteur porte le nom de *gradient du scalaire P* (voir aussi § 29). Ainsi *la densité spatiale* $\boldsymbol{s}$ *de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur les éléments de volume d'un fluide est égale au gradient*

P changé de signe. Nous voyons que la force s est déterminée non par la valeur de la pression P, mais par ses *variations spatiales*. Néanmoins la valeur de P importe aussi puisqu'elle détermine le *taux de compression du fluide* au point considéré de l'espace.

3. A l'état d'équilibre la force s doit être compensée par la force massique f, ce qui s'exprime par l'équation

$$\operatorname{grad} P = f, \qquad (90.5)$$

qui est l'*équation fondamentale de l'hydrostatique*. Sa forme analytique est

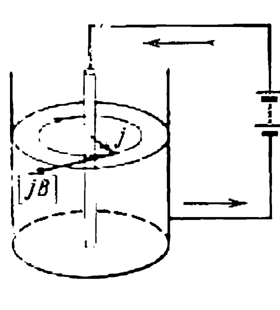
$$\frac{\partial P}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = f_z. \qquad (90.6)$$

On peut écrire aussi l'équation fondamentale de l'hydrodynamique d'un fluide parfait puisque la formule (90.3) reste valable:

$$\rho \frac{dv}{dt} = f - \operatorname{grad} P, \qquad (90.7)$$

où v est la vitesse et dv/dt l'accélération du fluide au point considéré. L'équation (90.7) porte le nom d'*équation d'Euler*.

4. Selon l'équation (90.5), à l'équilibre la force f (plus exactement la densité de la force ou la force s'exerçant sur l'unité de volume du liquide) doit être exprimée au moyen du gradient d'une fonction scalaire univoque. Or c'est une condition nécessaire et suffisante pour que la force f soit conservative (cf. § 29). Ainsi, *pour qu'un fluide soit en équilibre, il faut que le champ de forces auquel il est soumis soit conservatif*. Dans un champ de forces non conservatives, l'équilibre ne peut être réalisé.



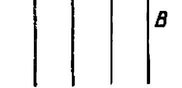


Fig. 231

Un exemple en est fourni par un liquide conducteur placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant électrique. Le champ magnétique applique alors au liquide une force $f = C\,[jB]$ où B est l'intensité (l'induction) du champ magnétique, j la densité de courant et C un coefficient numérique dont la valeur dépend du choix des unités de mesure. Plaçons un récipient cylindrique contenant une solution d'électrolyte ($CuSO_4$ par exemple) au-dessus de l'un des pôles d'un puissant électro-aimant (fig. 231). Faisons passer le long de l'axe du récipient un conducteur cylindrique et appliquons une tension électrique de quelques volts entre ce conducteur et les parois du récipient. Un courant radial traversera alors l'électrolyte. La force $f = C\,[jB]$ sera tangente aux cercles dont les centres se trouvent sur l'axe du récipient et provoquera une rotation du liquide autour de cet axe. Cette rotation s'accélérera jusqu'à ce que les forces créées par le champ magnétique soient compensées par les forces de frottement interne et externe.

§ 91. Hydrostatique des fluides incompressibles

1. S'il n'y a pas de forces massiques ($f = 0$), les équations (90.6) se réduisent à $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$. Il en résulte qu'à l'équilibre la pression P est la même en tout point du fluide.

Si le fluide se trouve dans un champ de pesanteur, on a $f = \rho g$. Orientons l'axe Z suivant la verticale ascendante. Les équations fondamentales décrivant l'équilibre du fluide s'écrivent alors

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g. \tag{91.1}$$

Ces équations montrent que si l'équilibre mécanique est assuré, la pression ne peut dépendre ni de x ni de y. Elle doit être constante dans chaque plan horizontal $z = \text{const}$. Ces plans horizontaux sont des *plans d'égale pression*. En particulier, la surface libre d'un fluide est horizontale puisqu'elle se trouve soumise à une pression atmosphérique constante. Dans un état d'équilibre mécanique la pression ne peut dépendre que de la coordonnée z. Il résulte de la troisième équation (91.1) que l'équilibre mécanique exige que le produit ρg ne dépende que de z. Or comme g ne dépend ni de x ni de y (nous négligeons ici la variation de g avec la longitude et la latitude géographiques du lieu), la densité ρ ne peut varier qu'avec la hauteur. Selon l'équation d'état (89.4) la pression P et la densité ρ déterminent la température T du fluide. On en conclut qu'*en équilibre mécanique la pression, la température et la densité d'un fluide ne sont fonction que de z et ne dépendent pas de x et de y.*

2. Supposons maintenant que le fluide est homogène et qu'on peut le considérer comme *incompressible* ($\rho = \text{const}$). Nous admettrons aussi que l'accélération de la pesanteur g est constante, ce qui revient à négliger sa variation avec la hauteur z. Dans ces conditions la dernière équation de (91.1) est facile à intégrer, ce qui conduit à

$$P = P_0 - \rho g z. \tag{91.2}$$

La constante d'intégration P_0 est la pression du fluide à la hauteur $z = 0$, i.e. la pression atmosphérique si on place l'origine des coordonnées sur la surface libre du fluide. La formule (91.2) détermine aussi la pression qu'exerce le fluide sur le fond et les parois du récipient qui le renferme, ainsi que sur la surface de tout objet immergé dans le fluide. Cette formule résume toute l'hydrostatique enseignée à l'école.

3. Examinons maintenant la *loi d'Archimède* (287-212 av. J.-C.) et les questions qui y sont liées. Délimitons par la pensée un volume quelconque du liquide entouré d'une surface fermée S (fig. 232). Si le fluide est en équilibre mécanique, ce volume sera lui aussi en

équilibre. Par suite doivent s'annuler la résultante et le moment de toutes les forces extérieures appliquées au volume considéré. Les forces extérieures en présence sont le poids Q du volume délimité du fluide et la pression qu'exerce sur la surface S le fluide qui l'entoure de tous les côtés. Il s'ensuit que la résultante F des forces de pression hydrostatique appliquées à la surface S doit être égale à Q — poids du fluide contenu dans le volume délimité par la surface S. Cette résultante doit pointer vers le haut et passer par le centre de masse A du volume délimité afin que le moment total des forces extérieures qui lui sont appliquées soit nul. Supposons maintenant qu'on ait remplacé tout le fluide contenu dans le volume considéré par un corps solide. Si ce corps solide arrive à se maintenir en équilibre, l'état du milieu ambiant *ne sera pas modifié.* La pression qu'exerce le milieu ambiant sur la surface S restera donc la même. Nous arrivons ainsi à la loi d'Archimède. *Lorsqu'un corps plongé dans un fluide est maintenu dans un état d'équilibre mécanique, il subit une poussée verticale égale au poids du fluide déplacé. Cette poussée verticale est dirigée de bas en haut et passe par le centre de masse A du fluide déplacé par le corps.* Nous désignerons ce point sous le nom de *centre de flottaison du corps.* Nous montrerons plus loin que la position de ce point détermine l'*équilibre* et la *stabilité* des corps flottants.

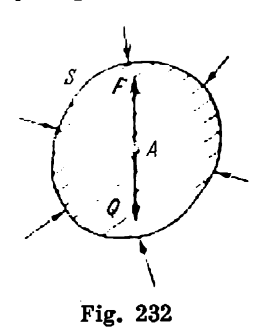


Fig. 232

4. La loi d'Archimède permet d'étudier l'équilibre des corps flottant dans des fluides. *Pour qu'un corps flottant soit en équilibre, il faut que son poids soit égal au poids du fluide déplacé et que son centre de flottaison A se trouve sur la verticale passant par le centre de masse du corps.* En ce qui concerne la stabilité de l'équilibre réalisé, on doit distinguer deux cas différents.

C a s 1. Dans le premier cas le corps flottant est entièrement immergé dans le fluide. Quels que soient les déplacements et les rotations subis par le corps, les positions de son centre de masse C et de son centre de flottaison A restent inchangées par rapport au corps. *L'équilibre sera stable si le centre de masse C du corps se trouve au-dessous de son centre de flottaison A et il sera instable si le centre de masse C du corps se trouve au-dessus du centre de flottaison A.* Dans les deux cas, si on fait tourner le corps d'un petit angle autour d'un axe horizontal pour l'écarter de sa position d'équilibre, le moment du couple des forces Q et F cherchera à abaisser le point C et à relever le point A (fig. 233). Le corps vient alors occuper une position d'équilibre stable telle que le point C se trouve au-dessous du point A.

C a s 2. Dans le deuxième cas le corps flottant n'est que partiellement immergé dans le fluide et une partie émerge au-dessus de sa

surface libre. Ce cas est plus compliqué que le précédent car lorsqu'on fait sortir le corps de sa position d'équilibre, la forme du volume de fluide déplacé change. Par suite la position du centre de flottaison par rapport au corps flottant se modifie, ce qui complique le problème. Nous touchons là aux fondements de l'étude de la stabilité des navires. La figure 234, *a* donne une représentation schématique de la coque d'un navire dans le cas où le centre de masse C et le centre de

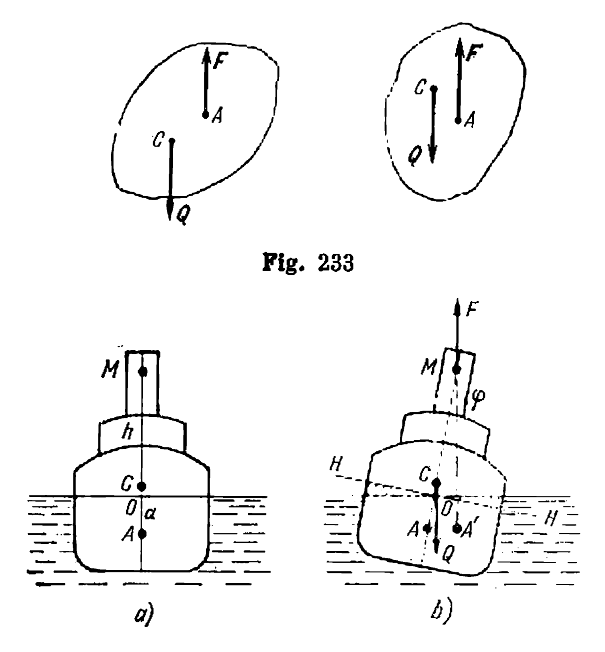


Fig. 233

Fig. 234

flottaison A se trouvent sur une même verticale confondue avec l'axe de symétrie vertical du navire. Lorsque le navire penche de côté d'un petit angle φ (fig. 234, *b*), le centre de flottaison se déplace par rapport au navire vers le point A' qui se trouve pratiquement à la même hauteur que le point A. La poussée est appliquée maintenant au point A' et s'exerce suivant une droite qui coupe l'axe de symétrie vertical du navire en un point M appelé *métacentre*. Lorsque le métacentre se trouve au-dessus du centre de masse du navire, le moment du couple des forces Q et F ramène le navire dans sa position initiale. L'équilibre du navire est alors stable. Mais si le métacentre M se trouve au-dessous du centre de masse du navire, l'action du couple des forces Q, F tendra à faire dévier le navire de sa position initiale et l'équilibre du navire sera donc instable. La distance h entre les points C et M porte le nom de *hauteur métacentrique. Si la hauteur*

métacentrique est positive, l'équilibre est stable, et si elle est négative, l'équilibre est instable. Plus h est grand, plus l'équilibre est stable. Le moment de deux forces $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F}$ qui ramène le navire dans sa position initiale est le *couple de rappel.* Il est évidemment égal à

$$M = Qh \sin \varphi. \tag{91.3}$$

La valeur de h dépend elle-même de φ puisque toute variation de l'inclinaison φ entraîne une variation de la position du métacentre par rapport au navire. Nous allons déterminer la position du métacentre et la hauteur métacentrique h dans le cas limite d'angles φ infiniment petits.

Comme la poussée passe par le point A' suivant la verticale ascendante, son moment par rapport au point A est $N = Q \cdot AM \sin \varphi$ et pour un angle φ petit $N = Q\,(h + a)\,\varphi$, a étant la distance entre le centre de masse C du navire et son centre de flottaison à l'équilibre. La quantité a est positive si le point C se trouve au-dessus du point A et négative dans le cas contraire. La valeur du moment N ne dépend évidemment pas du choix du point d'application de la poussée $\boldsymbol{F}$ sur la ligne $A'M$. Décomposons la force $\boldsymbol{F}$ en une composante $\boldsymbol{F}_{\parallel}$ parallèle à l'axe AM du navire et en une composante $\boldsymbol{F}_{\perp}$ normale à cet axe. Si le point d'application de la force $\boldsymbol{F}$ se trouvait en A', le moment de la composante $\boldsymbol{F}_{\perp}$ par rapport au centre de flottaison A serait nul et le calcul en serait simplifié puisqu'alors le moment total N ne serait dû qu'à la composante $\boldsymbol{F}_{\parallel}$. Il est évident que ce moment doit être le même par rapport à tous les points appartenant à l'axe AM. On peut donc considérer la quantité $N = Q\,(h + a)\,\varphi$ comme le moment des forces de poussée rapporté à un point arbitraire de l'axe AM, à condition de retrancher des forces actives leurs composantes normales à cet axe. On peut alors calculer autrement le moment N. Si le navire est incliné d'un angle φ, les forces de poussée s'exerçant sur la partie droite du navire s'accroissent et celles qui s'exercent sur sa partie gauche diminuent. Il est bien entendu qu'il s'agit ici non pas de forces totales, mais uniquement de leurs composantes parallèles à AM. Soit x la distance (la coordonnée) entre un point quelconque du plan HH et l'axe Y passant par le point O perpendiculairement au plan de la figure. L'accroissement de la poussée appliquée au point correspondant de la coque sera alors égal à $\rho g x \varphi$ et le moment N sera donné par

$$N = \rho g \varphi \int x^2\, dS = \rho g\, I \varphi,$$

où I est le *moment d'inertie* rapporté à l'axe Y de la section transversale du navire passant par la ligne de flottaison: $I = \int x^2\, dS$ (voir § 80, point 1). En identifiant les deux formules de N on obtient

$$h = \frac{I}{V} - a, \tag{91.4}$$

où $V = (Q/\rho g)$ est le *tonnage de déplacement du navire*, c'est-à-dire le volume d'eau qu'il déplace.

5. Considérons un liquide contenu dans un récipient en rotation uniforme autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire ω. On supposera que le liquide tourne avec le récipient et que celui-ci présente une symétrie axiale, de forme cylindrique par exemple. Ce problème se ramène au problème statique si on passe à un référentiel tournant dans lequel le liquide se trouverait au repos. La force $\boldsymbol{f}$ figurant dans l'équation (90.5) est alors la résultante de la force de pesanteur $\rho \boldsymbol{g}$ et de la force centrifuge $\rho\omega^2 \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}$ étant le rayon vecteur issu de l'axe de rotation auquel il est perpendiculaire et aboutissant au point considéré. Si l'on place l'origine des coordonnées sur l'axe de rotation de façon que l'axe Z soit confondu avec l'axe de rotation, les équations (90.6) s'écriront

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g. \tag{91.5}$$

En posant que ρ est constante, on obtient par intégration

$$P = \frac{1}{2}\rho\omega^2 (x^2 + y^2) - \rho g z + P_0, \tag{91.6}$$

ou

$$P = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + P_0. \tag{91.6a}$$

L'équation de la surface libre $P =$ const est alors de la forme $1/2\omega^2(x^2 + y^2) - gz =$ const. C'est un paraboloïde de révolution dont le sommet est tourné par sa convexité vers le bas. Si on place l'origine des coordonnées au sommet du paraboloïde, la constante P_0 aura la signification de la pression atmosphérique extérieure et l'équation de la surface libre du liquide s'écrira $1/2\ \omega^2(x^2 + y^2) = gz$.

Il est évident que ce problème peut être traité par la dynamique. Si le liquide tourne d'un bloc, ce mouvement ne fait pas apparaître de forces de frottement internes. Les seules forces superficielles s'exerçant dans le liquide sont les forces de pression normale. On peut alors utiliser l'équation d'Euler (90.7) que le liquide soit parfait ou visqueux. Si la rotation est uniforme, la dérivée $d\boldsymbol{v}/dt$ se réduit à l'accélération centripète $-\omega^2\boldsymbol{r}$. En posant $\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{g}$ dans (90.7) on obtient

$$-\rho\omega^2\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{g} - \operatorname{grad} P,$$

équation vectorielle équivalente aux trois équations (91.5).

Si le fond du récipient est plat, pour calculer la pression s'exerçant sur le fond on doit poser dans (91.6a) $z = -h$, h étant la hauteur de la couche liquide sur l'axe de rotation (rappelons que l'axe Z est

dirigé suivant la verticale ascendante):

$$P - P_0 = \rho g h + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2. \qquad (91.7)$$

On voit que la pression est minimale au centre du récipient et croît de façon monotone lorsqu'on s'approche de ses parois. Ce résultat explique l'effet suivant. Si à l'aide d'une cuillère on tourne du thé contenu dans un verre et que l'on arrête ensuite ce brassage, on constate que les brindilles de thé se rassemblent au centre du fond. Ces particules solides, plus denses que l'eau, tombent au fond où leur rotation se ralentit par frottement sur le fond du verre; étant soumises à une différence de pressions hydrostatiques, elles se rassemblent au centre.

Calculons maintenant la force de pression totale appliquée au fond du récipient. On utilisera pour cela l'équation de la surface libre du liquide $1/2\ \omega^2 r^2 = gz$ et on écrira la formule (91.7) sous la forme $P - P_0 = \rho g(h + z)$. En étendant l'intégration à la surface du fond on obtient

$$F = \rho g \int (h + z)\, dS = \rho g V, \qquad (91.8)$$

où V est le volume du liquide contenu dans le récipient. Comme on pouvait s'y attendre, la pression totale est égale au poids de ce volume du liquide.

PROBLÈMES

1. On verse du liquide dans un récipient ayant la forme d'un parallélépipède droit. Calculer le moment des forces de pression hydrostatique s'exerçant sur ses parois latérales et rapporté à sa base inférieure.

Réponse. $M = \frac{1}{3} \rho g h^2 S$, où h est la hauteur de la couche d'eau dans le récipient et S l'aire de la face latérale.

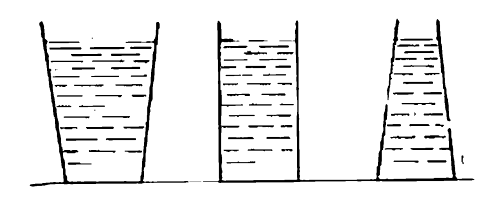


Fig. 235

2. *Le paradoxe hydrostatique.* La force de pression qu'un liquide exerce sur le fond d'un récipient ne dépend pas de la forme de celui-ci; elle ne dépend que de l'aire du fond, de la différence de niveaux entre le fond et la surface libre du liquide et enfin de la densité du liquide. Cette force sera ainsi la même pour les trois récipients représentés sur la figure 235 si l'aire du fond et le niveau du liquide sont identiques dans tous les récipients. Lorsqu'on soumet ces réci-

pients remplis de liquide à la pesée, la balance devrait indiquer le même poids pour les trois récipients puisque les indications de la balance dépendent de la force qu'applique le fond du récipient sur le plateau de la balance. Expliquez l'erreur commise dans ce raisonnement. Quelles seront les indications réelles de la balance?

3. Démontrer la loi d'Archimède par un calcul direct de la résultante des forces de pression qu'exerce le fluide sur la surface d'un corps immergé et des moments de ces forces.

Solution. Décomposons en pensée le corps immergé en colonnes verticales infiniment ténues (fig. 236). Supposons pour simplifier que chacune de ces colonnes n'intercepte que deux fois la surface du corps immergé. (Le lecteur est invité à traiter lui-même le cas où il n'en serait pas ainsi.) Soient dS_1 et dS_2 les aires élémentaires que découpe une colonne sur la surface du corps. Les forces s'exerçant sur ces éléments de surface sont normales à ces derniers et égales respectivement à P_1dS_1 et P_2dS_2. Leurs composantes verticales sont $P_1dS_1 \times \cos\alpha_1$ et $P_2dS_2 \cos\alpha_2$ ou $P_1d\sigma$ et $P_2d\sigma$, où $d\sigma = dS_1 \cos\alpha_1 = dS_2 \cos\alpha_2$ est l'aire de la section droite de la colonne. La résultante de ces deux forces dirigée vers le haut est $dF_z = (P_2 - P_1)\, d\sigma = \rho gh d\sigma = \rho g dV$, où h est la hauteur de la colonne et $dV = hd\sigma$ son volume. En étendant l'intégration à tout le volume du corps, on obtient la poussée $F_z = \rho gV$. Il reste à calculer le moment rapporté à un axe arbitraire des forces de poussée verticales s'exerçant sur les colonnes. Il est évident que si l'axe est vertical, le moment sera nul. Par suite il suffit de calculer le moment par rapport à un axe horizontal quelconque, l'axe de coordonnées X par exemple.

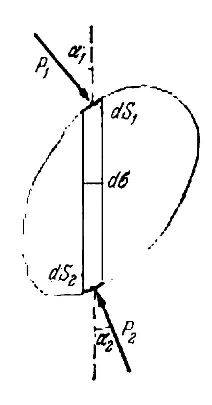


Fig. 236

Le moment cherché est $M_x = \int y\, dF_z = g \int \rho y\, dV = g \int y\, dm$, où dm est la masse du liquide déplacé par la colonne correspondante du corps. Le moment par rapport à l'axe Y est de même égal à $M_y = g \int x\, dm$. Le moment devient nul pour $\int x\, dm = \int y\, dm = 0$, ce qui correspond au cas où l'origine des coordonnées se trouve sur l'axe vertical passant par le centre de flottaison. On a donc démontré que la ligne d'action de la force de poussée passe par le centre de flottaison du corps. Pour que notre démonstration soit exhaustive, il faudrait déterminer encore les forces de pression horizontales appliquées au corps immergé. Cette question n'exige cependant aucun calcul particulier. S'il s'agit, par exemple, de forces parallèles à l'axe X, il suffit de subdiviser le corps en colonnes infinitésimales orientées parallèlement à cet axe et de refaire les mêmes calculs que ci-dessus, à cette différence près que l'on posera $g = 0$. Il s'ensuit que la résultante des forces de pression horizontales s'exerçant sur un corps immergé, ainsi que le moment de ces forces sont nuls.

4. Trouver la condition de stabilité d'un parallélépipède rectangle homogène flottant à la surface d'un liquide dans une position telle que l'une de ses bases soit horizontale. Les côtés de cette base ont pour longueurs A et B ($A > B$) et la hauteur du parallélépipède est égale à C. La densité du corps flottant rapportée à celle du liquide est $\rho < 1$.

Réponse. $B^2 > 6\rho(1-\rho)\, C^2$.

5. Même problème que ci-dessus mais concernant un cylindre homogène de rayon r et de hauteur l, flottant en position verticale.

Réponse. $r^2 > 2\rho(1-\rho)\, l^2$.

6. Même problème que ci-dessus mais concernant un cylindre homogène de rayon r et de longueur l, flottant en position horizontale.

Réponse. $l/r > \left(2 \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$, où l'angle α est défini par l'équation transcendante $\alpha - \sin\alpha = 2\pi\rho$. Par exemple, pour $\rho = 1/2$, $\alpha = \pi$ et la condition de stabilité s'exprime par $l > 4r$. Pour d'autres valeurs de ρ l'équilibre peut être stable pour des longueurs l plus petites. Ainsi pour $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = 3\pi/2$, on trouve respectivement $\rho = 1/4 - 1/(2\pi) \approx 0{,}091$ et $\rho = 3/4 + 1/(2\pi) \approx 0{,}841$. Pour ces valeurs de ρ l'équilibre est stable lorsque $l > 2r$. Lorsque $l > 4r$, l'équilibre est stable pour toutes les densités $\rho < 1$.

7. Déterminer la répartition des pressions à l'intérieur du globe terrestre en le supposant constitué par un fluide homogène incompressible et en négligeant la rotation axiale de la Terre. Calculer dans la même approximation la valeur de la pression P_c au centre de la Terre (voir problème 5 au § 55).

Réponse. $P = \frac{\rho g}{2R}(R^2 - r^2)$, $P_c = 1/2\rho g R$, où r est la distance au centre de la Terre, R le rayon de la Terre. Si le globe terrestre était constitué par de l'eau incompressible, on aurait obtenu $P_c = 1/20\ R$ (P_c en atmosphères, R en mètres). Compte tenu de la densité de la Terre ($\rho = 5{,}5$) on a

$$P_c = 0{,}275R \approx 1{,}75 \cdot 10^6 \text{ atm.}$$

8. Evaluer l'aplatissement du globe terrestre déterminé par sa rotation axiale en supposant que c'est une sphère liquide, homogène et incompressible.

Solution. Comme la configuration de la Terre est presque sphérique, on peut admettre qu'à l'intérieur du globe terrestre l'accélération de la pesanteur est dirigée vers le centre de la Terre et qu'elle est proportionnelle à la distance jusqu'au centre (voir problème 5 au § 55). Avec les approximations adoptées et compte tenu de la force centrifuge les équations (90.6) s'écrivent :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \frac{x}{R_0} + \rho\omega^2 x,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \frac{y}{R_0} + \rho\omega^2 y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \frac{z}{R_0},$$

où R_0 est le rayon de la Terre, ω sa vitesse angulaire de rotation. Plaçons l'origine des coordonnées au centre de la Terre et faisons coïncider l'axe Z avec son axe de rotation. L'intégration des équations ci-dessus donne

$$P = \frac{\rho}{2}\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right)(x^2 + y^2) - \frac{\rho g}{2R_0} z^2 + C,$$

où C est la constante d'intégration dont la valeur dépend de la valeur de la pression P à la surface de la Terre (on peut la poser égale à zéro, vu que la pression atmosphérique est très petite). L'aplatissement du globe terrestre se laisse déterminer en imposant la condition de l'égalité de la pression sur toute la surface terrestre. En prenant d'abord un point situé à l'équateur, puis un autre point situé au pôle, on écrira $P(R_{éq}, 0, 0) = P(0, 0, R_p)$, $R_{éq}$ et R_p étant les rayons de la Terre à l'équateur et au pôle. Compte tenu de la forme explicite de P, on en tire

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right) R_{éq}^2 = -\frac{g}{R_0} R_p^2,$$

d'où

$$R_{\text{éq}}-R_{\text{p}}=\frac{\omega^2}{g}\,\frac{R_{\text{éq}}^2R_0}{R_{\text{éq}}+R_{\text{p}}}\approx\frac{\omega^2R_0^2}{2g}.$$

Par suite le taux d'aplatissement ε du globe est égal à

$$\varepsilon\equiv\frac{R_{\text{éq}}-R_{\text{p}}}{R_0}=\frac{\omega^2R_0}{2g}\approx\frac{1}{580}.$$

Le taux d'aplatissement réel de la Terre est égal à 1/297. L'écart entre ces valeurs tient à ce que notre modèle est trop grossier et le procédé de calcul trop simplifié. Un calcul rigoureux tiendra compte de ce que le champ gravitationnel d'une sphère aplatie n'est pas central *). Mais dans ce dernier cas le problème devient beaucoup plus ardu puisqu'on ne connaît pas le champ gravitationnel qui dépend alors de la forme de la Terre, qui est inconnue. Une étude détaillée montre que le problème ainsi formulé n'admet pas de solution univoque et on aboutit à plusieurs formes de la surface d'équilibre, notamment à celle d'un ellipsoïde de révolution comprimé.

§ 92. Formule barométrique

1. Passons maintenant à l'*hydrostatique d'un fluide compressible*. La question la plus importante est celle de l'équilibre de l'atmosphère terrestre. Comme les équations différentielles (90.5) et (91.1) avaient été établies sans imposer la condition de l'incompressibilité du fluide, on peut les utiliser ici. On peut rejeter les deux premières équations du système (91.1) puisqu'elles ne font qu'affirmer que la pression P ne dépend que de z. La troisième équation peut s'écrire

$$\frac{dP}{dz}=-\rho g, \tag{92.1}$$

puisque la dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial z}$ et la dérivée totale $\frac{dP}{dz}$ sont maintenant identiques. Mais comme cette équation renferme deux inconnues, la pression P et la densité ρ, elle ne peut seule suffire à résoudre le problème. Il faut donc établir une corrélation supplémentaire entre P et ρ.

Supposons que la composition de l'atmosphère est la même sur toute son étendue. L'équation d'état établit une corrélation entre la pression P, la densité ρ et la température T du gaz à l'état d'équilibre. Si la densité du gaz n'est pas trop grande, on peut utiliser l'*équation de Clapeyron* (1799-1864):

$$P=\frac{RT}{\mu}\rho, \tag{92.2}$$

*) On trouve alors $\varepsilon=\frac{5}{4}\frac{\omega^2R_0}{g}\approx\frac{1}{232}$

où μ est le poids moléculaire du gaz et R est la constante universelle des gaz dont la valeur numérique approchée est

$$R = 8{,}31 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot K^{-1} \cdot \text{mole}^{-1} = 8{,}31 \quad J \cdot K^{-1} \cdot \text{mole}^{-1}.$$

La relation (92.2) permet d'éliminer la densité ρ de l'équation (92.1). Il en résulte

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} P. \tag{92.3}$$

Il est évident qu'en procédant ainsi nous n'avons fait que substituer à la densité inconnue ρ une autre inconnue — la température T. Toutefois il est plus facile de mesurer cette dernière aux différentes altitudes. Si T est connue comme fonction de z, on peut procéder à l'intégration de l'équation (92.3). Ainsi le problème de calcul de la variation de la pression avec l'altitude devient réalisable si on connaît la loi de variation de la température T avec l'altitude.

2. S'il n'y a ni vents ni courants atmosphériques et que l'atmosphère soit immobile, on dit que l'atmosphère se trouve dans un état d'*équilibre mécanique*. Ce n'est cependant pas un état d'*équilibre complet*, car il faut encore que l'atmosphère soit en *équilibre thermique*. Ce dernier correspondrait au cas où sur toute l'étendue de l'atmosphère la température T serait la même. On dira alors que l'atmosphère est *isothermique*.

Il est évident que l'atmosphère isothermique est une idéalisation mais l'étude de ce cas présente un intérêt considérable. Avec $T =$ $=$ const l'équation (92.3) est facile à intégrer. Récrivons-la sous la forme

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} dz$$

et intégrons:

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\mu g z}{RT},$$

ou

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}} \tag{92.4}$$

La densité de l'air varie selon la même loi:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}}. \tag{92.5}$$

Les relations (92.4) et (92.5) s'appellent *formules barométriques*. Les constantes d'intégration P_0 et ρ_0 représentent la pression et la densité de l'air au niveau du sol. La pression et la densité de l'air décroissent avec l'altitude suivant une loi exponentielle. Lorsqu'on atteint l'altitude

$$h = \frac{RT}{\mu g} \tag{92.6}$$

ces quantités diminuent de e fois. L'altitude h est dite *altitude de l'atmosphère homogène*. Cette dénomination résulte des considérations suivantes. Quelle épaisseur H devrait avoir une atmosphère imaginaire de densité ρ_0 constante pour produire au sol la même pression P_0 que l'atmosphère réelle? Il est évident que cette épaisseur H se définit à partir de la condition $P_0 = \rho_0 g H$. Or si on applique l'équation d'état (92.2) à la couche d'air adjacente à la surface de la Terre, on trouve $P_0 = \frac{RT}{\mu}\rho_0$. On en tire $H = \frac{RT}{\mu g}$, soit $H = h$. En posant que le poids moléculaire moyen de l'air $\mu = 28{,}8$, on trouve que l'épaisseur de l'atmosphère homogène à 0 °C (273 K) est égale à

$$h = \frac{8{,}31\cdot 273}{28{,}8\cdot 9{,}8} \approx 8000 \text{ m} = 8 \text{ km}.$$

En portant l'expression de h dans la formule barométrique (92.4) on la met sous la forme:

$$P = P_0 e^{-z/h}. \tag{92.7}$$

Sous cette forme elle est d'un emploi commode pour déterminer les différences d'altitude au-dessus du sol à partir des valeurs de la pression atmosphérique et de la température aux points considérés. Il est évident que la température doit être la même dans l'intervalle des altitudes considéré.

3. Une remarque s'impose au sujet de la stabilité de l'équilibre mécanique de l'atmosphère. Nous levons ici la limitation concernant l'uniformité de la température à toutes les altitudes et nous admettons donc qu'elle peut varier arbitrairement avec l'altitude. Si l'état d'équilibre mécanique a été perturbé et si une certaine masse d'air s'est de ce fait déplacée à plus haute altitude, elle s'y trouvera soumise à une pression extérieure plus faible. Par suite cette masse d'air se dilatera et sa densité deviendra plus petite car, l'air ayant une faible conductibilité thermique, cette masse d'air n'absorbera ni ne dégagera de chaleur. Mais dans le cas où la masse d'air qui s'est élevée aura une densité plus grande que celle de l'air ambiant, cette masse d'air, étant plus lourde, s'abaissera et l'équilibre sera rétabli. Mais si la densité est plus petite que celle de l'air ambiant, elle montera toujours plus haut et l'équilibre mécanique deviendra instable. Des considérations analogues s'appliquent également lorsque la perturbation de l'équilibre mécanique résulte d'un abaissement d'une masse d'air. Elle sera alors comprimée par la pression extérieure et si dans sa nouvelle position sa densité est plus petite que celle de l'air ambiant, elle remontera jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli. Si, par contre, sa densité est plus grande, elle continuera à s'abaisser et l'équilibre deviendra instable. Ces considérations s'appliquent non seulement à l'air, mais à n'importe quel fluide compressible à température non uniforme se trouvant en état d'équilibre mécanique

dans le champ de pesanteur. En ce qui concerne l'atmosphère terrestre, les recherches ont montré que dans ces conditions l'atmosphère isothermique est stable. Une stabilité encore plus grande s'observerait si la température de l'air augmentait avec l'altitude. Mais si la température de l'air décroît lorsque l'altitude augmente, l'équilibre mécanique de l'atmosphère ne sera possible que si l'abaissement de température n'est pas trop rapide. Si l'abaissement de température dépasse un degré par 100 mètres de gain d'altitude, la stabilité mécanique de l'atmosphère devient impossible et on voit apparaître des courants ascendants et descendants (courants de convection). Ces questions seront étudiées plus en détail dans le tome II.

PROBLÈME

Quelle doit être l'altitude $H_{1/2}$ pour que la pression d'une atmosphère isothermique diminue de moitié?

Réponse. $H_{1/2} = h \ln 2 \approx 5{,}53$ km (à 0 °C).

§ 93. Description cinématique de l'écoulement d'un fluide

1. On peut utiliser deux procédés différents pour décrire l'écoulement d'un fluide. Tout d'abord on peut étudier les mouvements des *différentes particules du fluide*, ce qui revient à les caractériser à tout instant par leur position et leur vitesse. On définit ainsi les *trajectoires* de toutes les particules du fluide. Mais on peut aussi étudier ce qui se passe au cours du temps en *différents points de l'espace*, autrement dit déterminer les directions, les sens et les grandeurs des vitesses des particules du fluide passant à des instants différents par un point donné de l'espace. En considérant alors à un même instant t différents points de l'espace, ce deuxième procédé nous donnera une image instantanée de la répartition des vitesses du fluide, ce que l'on appelle *champ des vitesses*. On pourra indiquer en tout point de l'espace le vecteur vitesse de la particule qui passe à l'instant considéré par ce point. Les courbes tangentes en chaque point au vecteur vitesse des particules du fluide au même instant t sont dénommées *lignes de courant*. Si le champ des vitesses et donc les lignes de courant correspondantes sont indépendants du temps, on dit que l'écoulement du fluide est *stationnaire* ou *permanent*. Dans le cas où ils varient au cours du temps, l'écoulement est dit *non stationnaire*; la vitesse du liquide dépend alors explicitement des coordonnées et du temps: $v = v(r, t)$. Dans le cas d'un écoulement permanent la vitesse ne dépend explicitement que des coordonnées: $v = v(r)$.

2. Dans le cas d'un écoulement non stationnaire, les lignes de courant ne coïncident généralement plus avec les trajectoires des particules du fluide. En effet, la trajectoire ne caractérise que le mouvement d'une *seule particule* en fonction du temps, tandis qu'une

ligne de courant caractérise l'écoulement d'un *nombre infini de particules* se trouvant sur cette ligne de courant à l'instant considéré. *Les trajectoires et les lignes de courant ne sont confondues que lorsque l'écoulement est permanent.* Pour le démontrer considérons la trajectoire d'une particule A quelconque (fig. 237). Désignons par A (t_1) sa position à l'instant t_1. Prenons une autre particule B qui à l'instant t_2 occupe la position qu'occupait la particule A à l'instant t_1. Comme l'écoulement est permanent, la particule A passera par le point A (t_1) à la même vitesse que la particule B passant par le même point à l'instant t_2. Il s'ensuit que la vitesse de la particule B

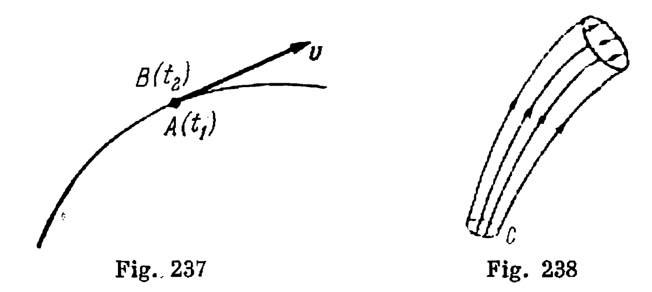


Fig. 237 Fig. 238

au point A (t_1) est tangente à la trajectoire de la particule A et, comme l'instant t_2 peut être choisi arbitrairement, on en conclut que la trajectoire de la particule A se confond avec la ligne de courant.

3. Prenons un contour fermé C et au même instant faisons passer par chacun de ses points les lignes de courant (fig. 238). Ces lignes de courant constitueront ainsi une surface tubulaire dénommée *tube de courant*. Comme les vitesses des particules du fluide sont tangentes aux lignes de courant, pendant l'écoulement le fluide ne peut traverser la paroi latérale du tube de courant. Le tube de courant se comporte comme la paroi latérale d'un tube rigide le long duquel s'écoulerait le fluide. Tout l'espace occupé par le fluide peut être subdivisé en tubes de courant. Si la section droite d'un tube de courant est infiniment petite, on peut admettre que la vitesse du fluide est la même en tout point d'une section donnée et qu'elle est dirigée le long de l'axe du tube de courant. La masse de fluide s'écoulant pendant le temps dt à travers la section droite du tube est

$$dm = \rho v S \, dt, \tag{93.1}$$

où ρ est la densité du fluide et S l'aire de la section droite du tube de courant.

Si l'écoulement est permanent, la masse dm sera la même dans toutes les sections du tube de courant. Si on prend deux sections d'aires S_1 et S_2, on peut écrire

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \tag{93.2}$$

Si cette égalité n'était pas vérifiée, la masse de fluide comprise entre les sections S_1 et S_2 aurait varié dans le temps, ce qui est en contradiction avec la loi de conservation de la masse et avec la condition du caractère permanent de l'écoulement. Si le liquide est incompressible, on a $\rho_1 = \rho_2$ et la relation (93.2) s'écrit

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}. \tag{93.3}$$

La vitesse du fluide s'écoulant à travers un tube est d'autant plus grande que la section du tube est petite. Elle est inversement proportionnelle à l'aire de la section droite du tube de courant.

§ 94. Ecoulement permanent d'un fluide parfait. Equation de Bernoulli

1. L'étude de l'écoulement des fluides est un problème fort ardu. Pour le simplifier on commence par négliger les forces de frottement interne. On étudie un fluide parfait dans lequel n'apparaît aucune force de frottement interne (ni tangentielle, ni normale) quels que soient les mouvements (cf. § 89, point 6). Les seules forces superficielles pouvant s'exercer dans un fluide parfait sont les forces de pression normale P. La pression P est univoquement déterminée par la densité et la température du fluide. Pour simplifier on supposera le fluide incompressible.

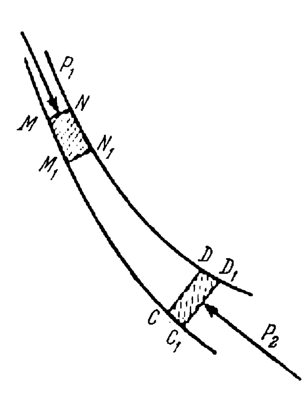


Fig. 239

2. Considérons l'écoulement permanent d'un fluide parfait dans un champ de forces conservatives, tel le champ de la pesanteur. Appliquons à cet écoulement la loi de conservation de l'énergie. On négligera complètement les échanges de chaleur entre les différentes parties du fluide et le milieu environnant. Isolons dans le fluide un tube occupant le volume $MNDC$ (fig. 239). Supposons que cette masse se soit déplacée dans une position $M_1N_1D_1C_1$ infiniment proche de la position initiale et calculons le travail A produit dans ce déplacement par les forces de pression. La pression exercée sur la paroi latérale du tube de courant n'effectue aucun travail, étant normale au déplacement. Le travail produit lorsque la frontière MN passe en M_1N_1 est $A_1 = P_1S_1l_1$, où $l_1 = MM_1$ est le déplacement. En introduisant le volume $\Delta_1V = S_1l_1$ on peut le mettre sous la forme $A_1 = P_1\Delta_1V$ ou $A_1 = P_1\frac{\Delta_1 m}{\rho_1}$, où $\Delta_1 m$ est la masse du fluide contenu dans le volume MNN_1M_1. Le travail produit contre la pression P_2

lors du déplacement de la section CD à la position C_1D_1 est de même $A_2 = P_2\frac{\Delta_2 m}{\rho_2}$, où $\Delta_2 m$ est la masse du fluide contenu dans le volume CDD_1C_1 (on peut dire ainsi que la pression P_2 effectue sur le fluide un travail négatif). Comme l'écoulement est permanent, la masse du fluide contenu dans le volume M_1N_1DC reste invariable et l'application de la loi de conservation de la masse implique l'égalité $\Delta_1 m = \Delta_2 m$. En supprimant les indices de Δm le travail produit par la pression extérieure s'écrit:

$$A = A_1 - A_2 = \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}\right)\Delta m.$$

Ce travail doit être égal à l'accroissement ΔE d'énergie totale de la partie de fluide considérée. L'écoulement étant permanent, l'énergie du fluide contenu dans le volume M_1N_1DC n'a pas varié. Par suite ΔE est égal à la différence des énergies que possède la masse Δm de fluide dans les positions CDD_1C_1 et MNN_1M_1. En désignant par ε l'énergie totale par unité de masse, on obtient $\Delta E = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,\Delta m$. En égalant cette expression au travail A et en éliminant Δm on obtient

$$\varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \varepsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2}. \qquad (94.1)$$

Il en résulte que *si l'écoulement d'un fluide parfait est permanent, la quantité* $\varepsilon + P/\rho$ *reste constante le long d'une seule et même ligne de courant*:

$$\varepsilon + \frac{P}{\rho} = B = \text{const.} \qquad (94.2)$$

C'est l'équation que Daniel Bernoulli (1700-1782) établit en 1738. Comme nous n'avons pas utilisé l'hypothèse que le fluide était incompressible, cette équation s'applique aussi bien aux fluides compressibles à condition que le fluide soit parfait et que son écoulement soit permanent. Les applications de l'*équation de Bernoulli* aux fluides compressibles seront examinées dans le tome II puisqu'on doit connaître la forme explicite de l'énergie ε. Ici nous examinerons le comportement des fluides incompressibles s'écoulant dans le champ de la pesanteur terrestre. L'équation (94.2) a été justement établie par Bernoulli dans ce cas particulier.

Si le fluide est incompressible, lors de son écoulement la partie de son énergie totale ε, qui dépend de la compression du fluide, reste invariable. On peut donc ne pas en tenir compte. L'énergie ε est constituée par l'énergie cinétique de l'unité de masse du fluide $v^2/2$ et par son énergie potentielle dans le champ de la pesanteur terrestre gh. L'équation de Bernoulli peut s'écrire alors

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = B = \text{const.} \qquad (94.3)$$

3. Insistons sur le fait que *le long d'une seule et même ligne de courant* la constante de Bernoulli B est invariable. En général elle peut avoir des valeurs différentes pour des lignes de courant distinctes, bien que parfois elle conserve la même valeur dans tout le courant. Notons un cas fréquent où la constante reste invariable. Supposons que toutes les lignes de courant commencent et finissent dans une région où le fluide est pratiquement au repos. Choisissons dans cette région un point de la ligne de courant. On devra poser alors $v = 0$ dans l'équation (94.3), ce qui conduit à $B = gh + P/\rho$. Mais comme en tout point de cette région le fluide est au repos, la condition d'équilibre est $gh + P/\rho = \text{const}$. Par suite la constante de Bernoulli

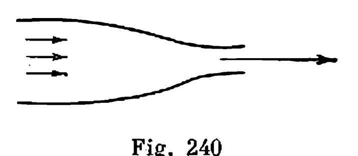


Fig. 240

B a même valeur en tout point du courant. Un cas plus général est celui où dans une certaine région de l'espace un fluide parfait incompressible s'écoule dans n'importe quelle direction avec une vitesse constante v_0 sous forme de filets fluides parallèles (écoulement unidimensionnel) qui cessent d'être parallèles lorsqu'ils butent sur des parties rétrécies ou élargies d'une conduite. Dans ce cas la constante de Bernoulli B a même valeur pour toutes les lignes de courant. Pour s'en rendre compte il suffit d'utiliser un référentiel animé d'un mouvement uniforme de vitesse v_0 par rapport au référentiel initial.

4. Considérons maintenant le cas d'un tube de courant étroit de section variable et d'axe horizontal. (Comme illustration on peut prendre un tuyau horizontal de section variable parcouru par un fluide.) On a alors $h = \text{const}$ et l'équation de Bernoulli s'écrit

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{const.} \tag{94.4}$$

On voit que la pression est plus grande là où la vitesse v est plus petite et vice versa. D'autre part, selon (93.3), la vitesse v est minimale là où la section du tube est la plus grande. Il s'ensuit que la pression est grande dans les parties évasées du tube et petite dans les parties rétrécies. Ce résultat est une conséquence directe de la deuxième loi de Newton. En effet, lorsqu'un fluide s'écoule d'une partie large du tube dans une partie étroite (tube convergent) (fig. 240), sa vitesse augmente. On en conclut que l'accélération est dirigée dans le sens du courant (sur la figure 240 de gauche à droite). Cette accélération est due à la différence de pression appliquée de gauche à droi-

te sur la partie du fluide considérée. Il est donc évident que la pression est plus grande là où la section du tube est plus grande.

5. La mise en œuvre de l'équation (94.4) permet de décider dans quelles conditions un fluide en écoulement peut être considéré comme incompressible, bien qu'une démonstration rigoureuse doive se fonder sur la forme générale de l'équation de Bernoulli (94.2). En deux points 1 et 2 d'une ligne de courant la pression et la vitesse sont liées par la relation

$$\Delta P \equiv P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2).$$

D'autre part

$$\Delta\rho = \frac{d\rho}{dP}\Delta P = \frac{1}{c^2}\Delta P,$$

c étant la vitesse (célérité) du son (cf. §85, point 1). Un liquide en écoulement ne peut être considéré comme incompressible que si $|\Delta\rho| \ll \rho$ quel que soit le choix des points 1 et 2, ce qui implique que

$$|v_2^2 - v_1^2| \ll c^2, \tag{94.5}$$

i. e. la variation du carré de la vitesse d'écoulement du fluide doit être petite par rapport au carré de la célérité du son. Si on rapporte l'écoulement à un référentiel par rapport auquel le fluide serait au repos en un point quelconque du courant, la condition (94.5) se simplifie :

$$v^2 \ll c^2, \tag{94.6}$$

i. e. en n'importe quel point d'un fluide en mouvement le carré de la vitesse d'écoulement doit être petit par rapport au carré de la célérité du son.

Si la hauteur h est variable, l'équation (94.3) montre qu'en plus de la condition (94.5) doit être vérifiée la condition supplémentaire

$$g\Delta h \ll c^2 \tag{94.7}$$

pour que le fluide puisse être considéré comme incompressible.

6. Pour illustrer l'équation de Bernoulli donnons la description de quelques expériences suggestives. La figure 241 représente un tuyau de section variable à travers lequel on fait passer un courant d'air. Pour juger de la pression de l'air en différentes parties du tuyau, on utilise des tubes manométriques disposés comme indiqué sur la figure 241. On constate que dans les tubes manométriques reliés aux rétrécissements du tuyau, le niveau d'eau est plus élevé que dans les tubes reliés aux parties larges du tuyau. Cela montre bien que dans les parties étroites la pression de l'air dans le courant est plus petite que dans les parties larges du tuyau, résultat conforme à l'équation (94.4).

Cette expérience peut servir à expliquer le principe de fonctionnement des *compteurs d'eau* qui mesurent le *débit d'eau*, i.e. la masse d'eau Q s'écoulant par seconde à travers une section droite du conduit. On introduit dans le conduit un *tube* dit *de Venturi* dont la section droite est plus petite que celle du conduit.

Soient S_1 et S_2 les sections de la partie large et de la partie étroite du conduit et P_1, P_2 les pressions d'eau que l'on y mesure à l'aide de manomètres. Appliquons l'équation de Bernoulli:

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho}=\frac{v_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho}.$$

On a ainsi $M_1=\rho v_1S_1=\rho v_2S_2$, d'où l'on tire v_1 et v_2; après substitution dans la relation précédente on obtient

$$Q=S_1S_2\sqrt{\frac{2\rho\,(P_1-P_2)}{S_1^2-S_2^2}}. \qquad (94.8)$$

7. Prenons un tube de caoutchouc muni d'un embout de verre conique et insufflons-y de l'air (fig. 242, vue de dessus). La pression de l'air dans la partie effilée de l'embout et dans le jet qui en sort est plus petite que la pression atmo-

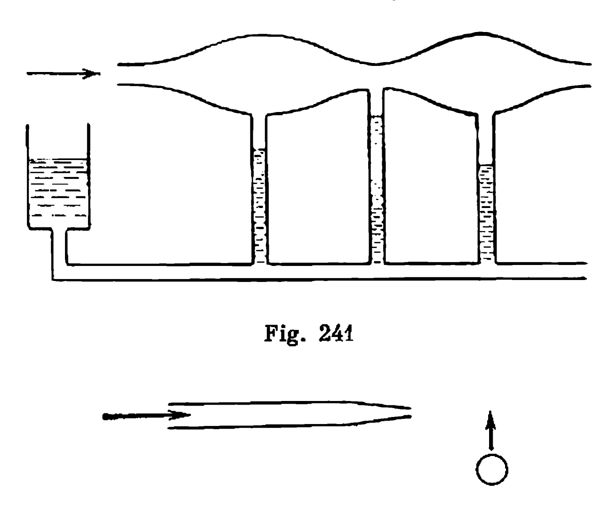


Fig. 241

Fig. 242

sphérique. Si nous approchons le jet d'air d'une petite boule creuse en celluloïde suspendue à un fil, nous verrons que la boule sera aspirée et entraînée par le jet d'air. En dirigeant le jet suivant la verticale ascendante, on arrive à maintenir la boule en sustentation à une certaine hauteur. Elle se comporte à la façon d'une boule placée dans un creux. Il est donc inutile d'attacher la boule.

8. Approchons maintenant le jet d'air de l'extrémité supérieure effilée d'un tube de verre dont l'autre extrémité plonge dans de l'eau (fig. 243, *a*). Dans le tube de verre on verra monter le niveau d'eau qui sera ensuite pulvérisée et entraînée par le jet d'air. C'est le principe de fonctionnement des *pulvérisateurs*. Si l'embout n'est pas effilé et présente une section constante (fig. 243, *b*), l'eau ne sera pas aspirée à moins qu'on ne place l'embout tout contre le tube de verre (fig. 243, *c*) de façon à y créer un interstice. Cet interstice fera fonction d'embout effilé et créera dans le jet d'air une pression réduite, ce qui provoquera l'aspiration de l'eau et sa pulvérisation.

9. Suspendons sur des fils de fer horizontaux deux feuilles de papier incurvées (fig. 244). Si nous insufflons de l'air dans l'interstice formé, les feuilles de papier se rapprochent l'une de l'autre. En effet, là où la distance entre les feuilles

est la plus petite, la pression P de l'air est plus petite que la pression atmosphérique P_0 et c'est cette dernière qui presse les feuilles l'une contre l'autre. On peut aussi suspendre à proximité l'un de l'autre deux ballons de verre. Si on insuffle de l'air entre eux les ballons commencent à se rapprocher, s'entrechoquent, rebondissent et ainsi de suite. Le même effet d'attraction se manifeste

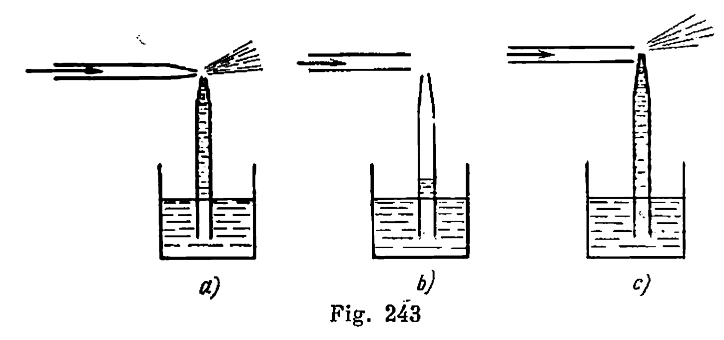


Fig. 243

lorsque deux bateaux naviguent côte à côte ; l'effet d'attraction s'explique aisément en utilisant un référentiel par rapport auquel les bateaux sont au repos, l'eau s'écoulant entre eux. Cet effet détermine maintes collisions entre bateaux.

10. La figure 245 représente le schéma de l'*appareil de Clément-Désormes* (1779-1842) *et de Désormes* (1777-1862). Il comporte un disque en laiton muni au centre d'une perforation à laquelle est fixé un tube de laiton. Sur ce tube on

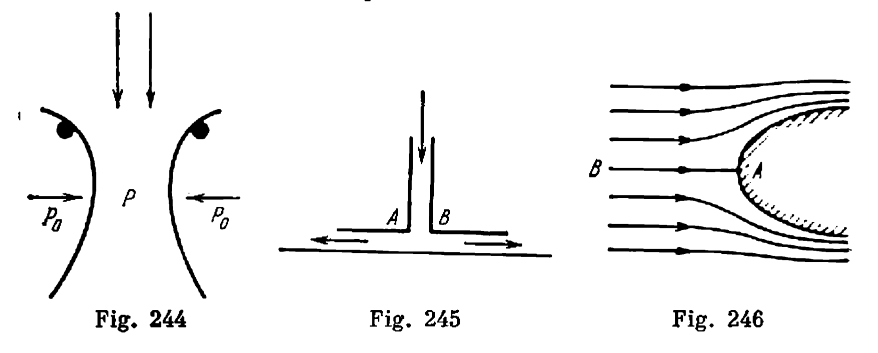


Fig. 244 Fig. 245 Fig. 246

peut emmancher un tube de caoutchouc par lequel on insuffle de l'air. Si on rapproche alors le disque d'une feuille de papier reposant à plat sur une table, la feuille est attirée par le disque. Lorsque la distance entre le disque et la feuille est petite, il s'y forme un jet d'air radial dont la pression est inférieure à la pression atmosphérique. La pression extérieure cherche à appliquer le papier contre le disque et à obturer l'orifice AB par où s'échappe l'air ; la vitesse d'écoulement de l'air diminue, la pression augmente, le papier se décolle et fait apparaître l'interstice par lequel l'air peut s'échapper ; la pression diminue et la feuille est de nouveau attirée. La feuille effectue ainsi un mouvement de va-et-vient avec émission de bruit.

11. Considérons maintenant un écoulement de fluide qui rencontre sur son chemin un corps (fig. 246). A partir du point A les lignes de courant de l'écoulement contournent le corps de chaque côté de celui-ci. Au point A dénommé *point d'arrêt*, la vitesse du fluide devient nulle et la ligne de courant aboutissant au point A s'y arrête. En appliquant l'équation de Bernoulli à la ligne de courant

BA nous obtenons

$$P+\frac{\rho v^2}{2}=P_0, \tag{94.9}$$

où P_0 est la pression au point d'arrêt et P la pression à l'infini en amont du corps. P_0 est la pression maximale qui peut s'observer dans le fluide sur cette ligne de courant. Nous négligeons ici les forces de pesanteur et nous admettrons que toutes les lignes de courant sont rectilignes et contenues dans des plans horizontaux. La quantité $^1/_2\rho v^2$ porte le nom de *pression dynamique* (ou *cinétique*) et la somme $P + {}^1/_2\rho v^2$ celui de *pression totale* du fluide sur la ligne de courant considérée *). En mesurant séparément la pression totale et la pression cinétique du fluide en un point donné de l'espace, on arrive à calculer la vitesse du fluide en ce point.

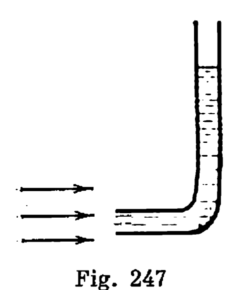


Fig. 247

Pour mesurer la pression totale on utilise le *tube de Pitot* (1695-1771). C'est un tube manométrique recourbé dont le bout ouvert fait face au courant du fluide (fig. 247). Les lignes de courant centrales dirigées vers le tube de Pitot s'arrêtent à l'intérieur du tube où le fluide est au repos. La hauteur de la colonne de fluide qui s'établit dans le tube de Pitot mesure la pression maximale, donc la pression totale du fluide dans le filet de courant considéré.

Si on mesure en plus de la pression totale la pression P et si on forme leur différence, on obtient la pression cinétique $^1/_2\rho v^2$ et de là la vitesse v. S'il s'agissait de mesurer la vitesse v d'un liquide à surface ouverte, d'un fleuve par exem-

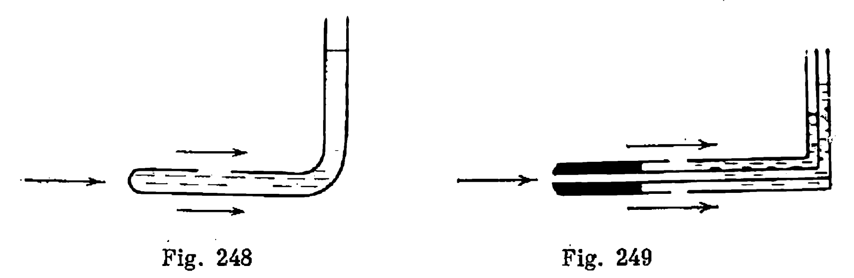


Fig. 248 Fig. 249

ple, il serait inutile de mesurer P car la profondeur à laquelle se trouve plongé le tube de Pitot indiquerait aussitôt la valeur de la pression. Mais ce procédé ne vaut rien si le liquide s'écoule à travers un conduit ou pour la mesure de la vitesse d'un avion. Dans ces cas on utilise des *sondes*. Une sonde se distingue du tube de Pitot en ce que l'extrémité de la partie recourbée de la sonde faisant face au courant est obturée et un petit orifice est pratiqué sur sa paroi latérale (fig. 248). Le tube sonde ne perturbe fortement le courant qu'à proximité de son extrémité faisant face au courant. Les filets de courant qui s'écoulent le long des parois du tube ne sont pratiquement pas perturbés. Par suite, à proximité

*) En hydrodynamique technique on utilise généralement la terminologie suivante. La quantité P est dénommée *pression statique*, la quantité $^1/_2\rho v^2$ est dénommée *pression dynamique* et leur somme $P + {}^1/_2\rho v^2$ porte le nom de *pression totale*. Les physiciens ont souvent dénoncé cette terminologie comme irrationnelle et pouvant conduire à des méprises regrettables. Aussi nous n'utiliserons pas cette terminologie. Dans tout fluide il n'existe qu'une seule pression P déterminée par le taux de compression du fluide.

immédiate de l'orifice, la vitesse et la pression du fluide sont les mêmes qu'en tout autre point de la ligne de courant passant devant l'orifice. La pression dans le tube sonde, que l'on mesure à l'aide d'un manomètre, coïncide donc avec la pression P du fluide qui contourne le tube. Dans la pratique courante on associe un tube de Pitot à un tube sonde, comme indiqué sur la figure 249. Cet ensemble porte le nom de *tube de Prandtl* (1875-1953).

§ 95. Exemples d'application de l'équation de Bernoulli. Formule de Torricelli

1. Considérons l'écoulement d'un fluide parfait incompressible à travers un petit orifice pratiqué dans la paroi latérale ou dans le fond d'un récipient de fort diamètre. Les particules de fluide qui s'approchent de l'orifice ont des vitesses transversales (fig. 250). Par

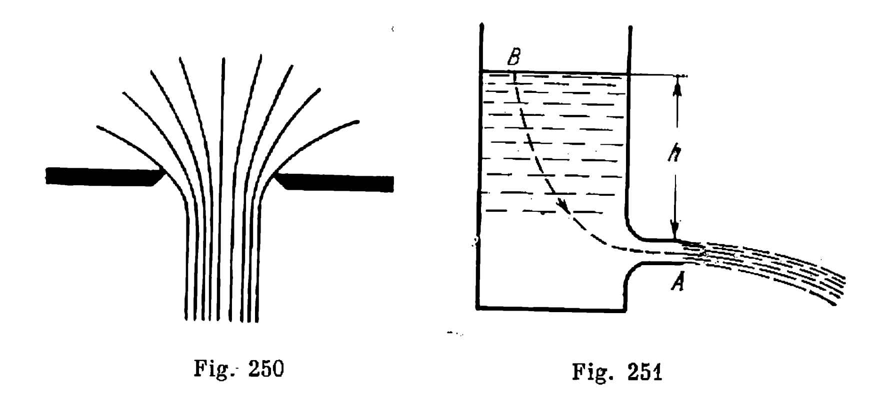


Fig. 250 Fig. 251

effet d'inertie il se produit une *compression du jet sortant*. Nous supposerons que pour éviter cet effet on utilise un orifice à bord arrondi (fig. 251) où les lignes de courant changent de direction et deviennent parallèles à l'axe de la tubulure avant de s'écouler ; aussi l'effet de compression ne se réalise pas *). Toutes les lignes de courant passent par la tubulure et prennent naissance à la surface libre du fluide où la vitesse v est négligeable. Par suite la constante de Bernoulli a même valeur pour toutes les lignes de courant. Appliquons l'équation de Bernoulli aux points A et B d'une ligne de courant (fig. 251). La vitesse étant négligeable au point B, on peut la poser égale à zéro ; désignons par v la vitesse au point A. L'équation de Bernoulli donne

$$\frac{P_0}{\rho}+gh=\frac{P_0}{\rho}+\frac{v^2}{2},$$

*) Ce n'est pas tout à fait exact car il subsiste une petite compression due aux forces superficielles.

où P_0 est la pression atmosphérique et la hauteur h est mesurée au niveau de l'orifice d'écoulement. On en tire

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{95.1}$$

C'est la *formule de Torricelli* (1608-1647). Selon cette formule, le fluide acquiert à l'écoulement la même vitesse que celle d'un corps tombant en chute libre d'une hauteur h. Il en résulte que si on recourbe la tubulure de façon que le jet soit vertical, ou à peu près vertical, le sommet du jet atteindra une hauteur égale au niveau du fluide dans le récipient. En fait cette hauteur sera un peu plus petite à cause du frottement et de la résistance de l'air dont l'équation de Bernoulli ne tient pas compte.

2. Calculons la quantité de mouvement qu'emporte le jet par seconde. Supposons que le fluide s'écoule en jet horizontal à travers un petit orifice pratiqué dans la paroi latérale du récipient. Si S est l'aire de l'orifice d'écoulement, la masse qui s'en écoule par seconde est ρvS. Cette masse emporte une quantité de mouvement $mv = \rho v^2 S$, ou en vertu de (95.1) $mv = 2\rho ghS$. Par suite le récipient est soumis à la force de recul $F = 2\rho ghS$. Si on ferme l'orifice avec un bouchon, le récipient restera immobile. On en conclut que les forces de pression horizontales du fluide qui s'exercent sur les parois du récipient s'équilibrent. Si nous retirons le bouchon, nous diminuons de S l'aire de la paroi correspondante. Si l'état du fluide n'avait pas varié, la force de pression s'exerçant sur cette paroi aurait diminué de $PS = \rho ghS$. En fait la pression diminue du double, c'est-à-dire de $2\rho ghS$, ce qui est dû à une *redistribution de la pression* accompagnant le passage de l'état de repos à l'état d'écoulement permanent. Il est évident que ce passage n'est pas instantané. Lorsqu'on enlève rapidement le bouchon, la force de pression s'exerçant sur cette paroi ne diminue d'abord que de ρghS. Pendant l'établissement du régime d'écoulement permanent la pression diminue rapidement encore de ρghS, atteignant ainsi la valeur $2\rho ghS$.

PROBLÈMES

1. Un récipient cylindrique placé en position verticale est rempli de fluide parfait jusqu'au niveau H par rapport au fond du récipient dont l'aire est S. Calculer le temps t au bout duquel le niveau s'abaissera jusqu'à une hauteur h (par rapport au fond du récipient) si on pratique dans le fond un petit orifice d'aire σ. Calculer aussi le temps T nécessaire au récipient pour se vider complètement.

Réponse. $t = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{H} - \sqrt{h})$, $T = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

2. Une boîte rectangulaire flotte à la surface de l'eau en s'y immergeant à une profondeur h sous l'action de son propre poids. L'aire du fond de la boîte est égale à S et sa hauteur à H. Calculer le temps au bout duquel la boîte se trouvera submergée si on pratique dans son fond un petit orifice d'aire σ et si on lui assure une orientation invariable à l'aide de dispositifs appropriés.

Réponse. $t = \frac{S}{\sigma} \frac{H-h}{\sqrt{2gh}}$.

3. Au bout de quel temps un ballon sphérique de rayon R se remplira-t-il d'eau s'il comporte au centre de sa partie inférieure un orifice d'aire σ? Le ballon est immergé dans l'eau jusqu'à la partie inférieure de son col.

Réponse. $t = \frac{16\pi R^2}{15\sigma} \sqrt{\frac{R}{g}}$.

4. Un récipient cylindrique reposant sur la surface horizontale d'une table est rempli d'eau jusqu'au niveau H (par rapport à la surface de la table). A quelle hauteur h (toujours par rapport à la surface de la table) doit-on pratiquer dans la surface latérale du récipient un petit orifice pour que le jet d'eau qui s'en écoulera retombe sur la surface de la table à une distance aussi grande que possible du récipient? Calculer cette distance maximale x_{max}.

Réponse. $h = \frac{H}{2}$, $x_{max} = H$.

5. Déterminer la forme que doit avoir un récipient qui se viderait à travers un petit orifice pratiqué dans le fond de manière à ce que le niveau d'eau s'abaisse à une vitesse constante.

Réponse. L'aire de la section droite horizontale du récipient doit être proportionnelle à la racine carrée de la distance entre cette section horizontale et l'orifice. Si le récipient est de révolution, il doit avoir la forme d'un paraboloïde de révolution de quatrième degré.

6. Un large récipient à fond plat est rempli de fluide parfait. Dans le fond on pratique une fente longue et étroite dans laquelle on place un embout constitué par deux plans formant entre eux un petit angle (fig. 252). A leurs parties inférieures la distance entre ces plans est égale à l_1 et dans leurs parties supérieures à l_2. Calculer la répartition de la pression du fluide dans l'embout sachant que la pression atmosphérique est P_0. La hauteur de l'embout est égale à h et la distance entre le bord inférieur de l'embout et le niveau du fluide dans le récipient est H.

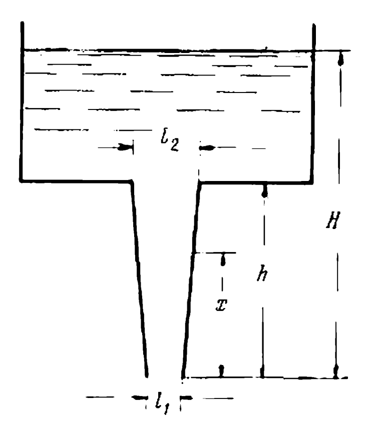


Fig. 252

Réponse. $P = P_0 - \rho g x + \rho g H \left\{1 - \frac{h^2 l_1^2}{[hl_1 + x(l_2 - l_1)]^2}\right\}$, où x est la distance verticale mesurée à partir de l'extrémité inférieure de l'embout.

7. L'eau s'écoule d'un large réservoir par un tuyau conique vertical introduit dans le fond. La longueur du tuyau est l, le diamètre de sa base supérieure est d_1 et celui de sa base inférieure est d_2 ($d_1 > d_2$). Quel doit être le niveau H de l'eau dans le réservoir pour que la pression dans la section supérieure du tuyau soit égale à P, la pression atmosphérique étant P_0?

Réponse. $H = \frac{(P_0 - P)/\rho g - l\,(d_2/d_1)^4}{1 - (d_2/d_1)^4}$.

8. Calculer la vitesse de l'écoulement permanent à travers un petit orifice d'un jet de fluide parfait incompressible se trouvant sous pression dans un récipient fermé (fig. 253).

Réponse. $v = \sqrt{2(P - P_0)/\rho + 2gh}$, où P_0 est la pression atmosphérique.

9. Pour qu'un jet liquide s'écoule d'un récipient à vitesse constante, on utilise le dispositif représenté sur la figure 254. Calculer la vitesse d'écoulement dans ce cas particulier.

Réponse. Tant que le niveau du liquide se trouve au-dessus de l'extrémité inférieure du tube AB, la vitesse d'écoulement est constante et égale à $v = \sqrt{2gh}$. Ensuite la vitesse d'écoulement diminue.

10. Un récipient cylindrique rempli d'un liquide parfait incompressible est mis en rotation autour de son axe géométrique vertical avec une vitesse angu-

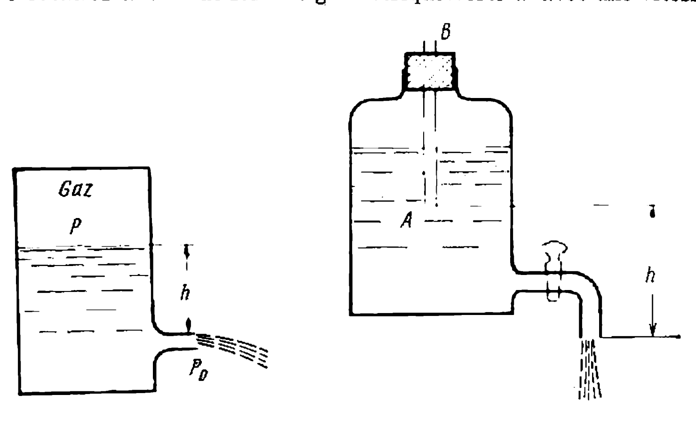


Fig. 253 Fig. 254

laire ω. Calculer la vitesse d'écoulement du liquide à travers un petit orifice pratiqué dans la paroi latérale du récipient lorsque le mouvement du liquide par rapport au récipient est devenu stationnaire.

Solution. Utilisons un référentiel par rapport auquel le liquide est au repos. Dans ce référentiel apparaissent deux forces d'inertie : la force centrifuge et la force de Coriolis. Cette dernière n'effectue aucun travail, mais incurve les lignes de courant sans affecter l'équation de Bernoulli (94.2) qui reste vérifiée. La force centrifuge ajoute un nouveau terme dans l'expression de l'énergie potentielle. L'énergie potentielle totale de l'unité de masse du liquide devient égale à $u = gz - {}^1/_2\omega^2r^2$, de sorte que l'équation (94.2) s'écrit maintenant

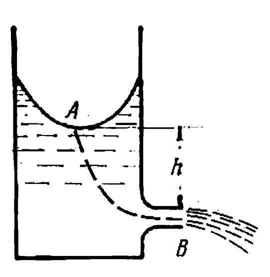


Fig. 255

$$\frac{v^2}{2} + gz - \frac{1}{2}\omega^2r^2 + \frac{P}{\rho} = B = \text{const}, \qquad (95.2)$$

où v est la vitesse relative du liquide (vitesse rapportée au référentiel en rotation). La constante de Bernoulli B a même valeur pour toutes les lignes de courant puisque celles-ci prennent naissance à proximité de la surface du liquide où la vitesse v est négligeable. Appliquons l'équation (95.2) à la ligne de courant AB issue du point A à la surface du liquide (fig. 255). Si on place l'origine des coordonnées en A on aura $z_A = r_A = v_A = 0$, $P_A = P_B = P_0$, $v_B = v$, $z_B = -h$, $r_B = R$, et par suite

$$v = \sqrt{2(gh + \omega^2R^2)}, \qquad (95.3)$$

où h désigne la hauteur du point A situé au centre de la partie la plus basse de la surface libre par rapport à l'orifice d'écoulement et R le rayon du récipient cylindrique. Le passage à un référentiel fixe ne présente aucune difficulté.

§ 96. La viscosité

1. Dans les liquides réels, en plus des forces de pression normale, il existe aux frontières des filets fluides des *forces tangentielles de frottement interne* dénommées *forces de viscosité*. Des exemples simples permettent de se rendre compte de l'existence de ces forces. Ainsi l'équation de Bernoulli, établie pour des écoulements sans viscosité, permet de tirer les conclusions suivantes. Lorsqu'un fluide s'écoule à travers un conduit rectiligne horizontal de section constante, la pression du fluide doit être la même sur toute la longueur du conduit. En réalité la pression diminue le long du conduit dans le sens de l'écoulement. Pour que l'écoulement soit permanent, on doit maintenir entre les extrémités du conduit une différence de pression constante afin de compenser l'action des forces de frottement interne qui apparaissent lorsque le fluide s'écoule.

Un autre exemple concerne le comportement d'un fluide placé dans un récipient en rotation. Lorsqu'on met en rotation uniforme autour de son axe un récipient cylindrique vertical rempli de fluide, on constate que progressivement le fluide se met lui aussi en rotation. Au début ce sont les couches de fluide au contact des parois qui se mettent en rotation, puis elles entraînent les couches internes et ainsi de proche en proche jusqu'à ce que tout le fluide effectue un mouvement de rotation uniforme comme le ferait un corps solide. Ainsi, tant que le mouvement ne s'est pas encore établi, il se produit constamment un transfert de rotation des parois aux couches adjacentes du fluide, puis de ces couches extérieures aux couches intérieures du fluide. Un tel transfert de mouvement aurait été impossible s'il n'existait pas de forces tangentielles s'exerçant entre les parois du récipient et le fluide, ainsi qu'entre les couches de fluide animées de vitesses angulaires différentes. Ces forces tangentielles sont dénommées *forces de frottement*, *internes* si elles s'exercent entre les couches du liquide, et *externes* s'il s'agit de l'interaction du liquide avec les parois du récipient. Sont particulièrement intéressantes les forces de frottement interne dites *forces de viscosité*. Nous n'examinerons pas ici l'origine de ces forces, reportant cette question au tome II où on étudiera la physique moléculaire.

2. Pour mieux dégager les lois quantitatives du frottement interne, nous prendrons un exemple particulièrement simple. Considérons deux plaques parallèles infiniment longues entre lesquelles se trouve incluse une couche fluide. (On dira que les plaques sont infiniment longues si leur largeur et leur longueur sont beaucoup plus grandes que la distance entre les plaques.) Si la plaque inférieure AB est fixe et la plaque supérieure CD animée par rapport à la plaque AB d'un mouvement uniforme avec la vitesse v_0 (fig. 256), il faut, pour maintenir le mouvement uniforme de la plaque CD, lui appliquer une force constante F dirigée dans le sens du mouvement. La plaque AB

doit être soumise à une force égale et opposée afin de la maintenir au repos. On sait depuis les expériences de Newton que la grandeur de la force F est proportionnelle à la vitesse v_0, à l'aire S de la plaque, et inversement proportionnelle à la distance h entre les plaques:

$$F=\eta S\frac{v_0}{h}, \tag{96.1}$$

où η est une constante dénommée *coefficient de frottement interne* ou *viscosité du fluide*. La valeur de ce coefficient est indépendante de la

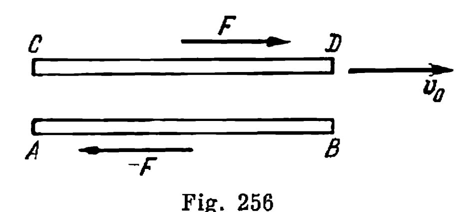


Fig. 256

nature du matériau des plaques, mais dépend de la nature du fluide Pour chaque fluide le coefficient η dépend des paramètres caractérisant son état interne, en premier lieu de la température.

Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que la plaque AB soit au repos. Les deux plaques peuvent se déplacer parallèlement l'une à l'autre à une vitesse uniforme. Si la plaque AB est animée d'une vitesse v_1 et la plaque CD d'une vitesse v_2, à la place de (96.1) on aura la formule générale:

$$F=\eta S\frac{v_2-v_1}{h}. \tag{96.2}$$

Pour se rendre compte de la justesse de cette dernière formule il suffit d'utiliser un référentiel par rapport auquel la plaque AB est immobile.

Remarquons encore que lorsque la plaque CD est en mouvement uniforme, le fluide doit lui appliquer une force $-F$ afin que la force résultante agissant sur la plaque CD soit nulle. Il s'ensuit que la plaque CD exerce sur le fluide la force $+F$. De même la plaque AB exerce sur le fluide une force $-F$. L'expérience montre aussi que tout fluide visqueux adhère à la surface du corps solide le long duquel il s'écoule. Cela signifie que les vitesses des particules du fluide sont nulles relativement à la surface du corps solide sur laquelle elles se trouvent. On peut donc considérer que les forces F et $-F$ figurant dans (96.2) sont appliquées non pas aux plaques mais aux frontières de la couche fluide qu'elles délimitent. De même on peut dire que les vitesses v_1 et v_2 sont les vitesses de déplacement de ces frontières de la couche fluide. Ainsi il n'est pas nécessaire d'avoir recours à des plaques pour introduire la notion de viscosité.

3. Afin de généraliser la formule (96.2) nous supposerons que l'écoulement du fluide est unidimensionnel le long de l'axe X et que la vitesse d'écoulement ne dépend que de l'ordonnée y:

$$v_x = v_x(y), \quad v_y = v_z = 0.$$

Isolons en pensée une couche fluide comprise entre deux plans parallèles infiniment rapprochés perpendiculaires à l'axe Y. Ces plans coupent l'axe Y en des points d'ordonnées y et $y + dy$ (fig. 257). Désignons par τ_{yx} la force tangentielle qu'applique sur l'unité de

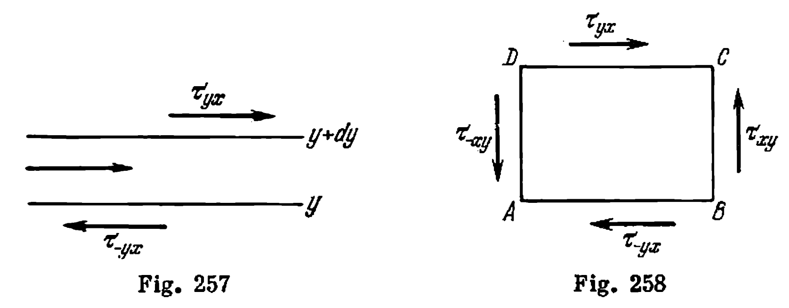


Fig. 257 Fig. 258

surface de la frontière supérieure de cette couche le fluide qui se trouve au-dessus d'elle. Le premier indice y indique la direction de la normale extérieure à la frontière supérieure de la couche fluide et le deuxième indice x caractérise la direction de la force appliquée (cf. § 74, point 2). En généralisant la formule (96.2) nous écrirons pour une contrainte tangentielle

$$\tau_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{96.3}$$

Admettons, conformément à l'expérience, que la formule (96.3) est vérifiée non seulement pour un écoulement uniforme, mais aussi pour des écoulements dont la vitesse v_x varie avec le temps. La contrainte tangentielle s'exerçant sur la frontière inférieure de la couche τ_{-yx} est dirigée dans le sens opposé à τ_{yx}. Ces contraintes ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite parce que l'épaisseur de la couche fluide dy est infiniment petite ($\tau_{yx} = -\tau_{-yx}$).

4. Isolons maintenant dans le même écoulement unidimensionnel un parallélépipède élémentaire $ABCD$ dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées (fig. 258). D'après l'équation des moments, le tenseur des contraintes doit être symétrique (cf. § 74, point 4). Par suite les bases BC et AD du parallélépipède, qui sont normales au courant, doivent être soumises elles aussi à des contraintes tangentielles telles que $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$. Il en résulte que *les contraintes tangentielles s'exercent aussi bien le long de plans parallèles à l'écoulement que le long de plans qui lui sont perpendiculaires.*

Supposons maintenant que l'écoulement n'est pas unidimensionnel mais quelconque. Admettons que les composantes tangentielles du tenseur des contraintes visqueuses ne dépendent que de la vitesse de déformation du fluide et non des déformations ou de leurs dérivées supérieures par rapport au temps. Limitons-nous à l'*approximation linéaire*, ce qui nous permettra de négliger les puissances égales et supérieures à deux des vitesses de déformation. Dans cette approximation les contraintes tangentielles sont des *fonctions linéaires homogènes* des vitesses de déformation $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_y}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial z}$, $\frac{\partial v_z}{\partial y}$, $\frac{\partial v_z}{\partial x}$, $\frac{\partial v_x}{\partial z}$. Si à la frontière CD de la couche fluide seule la dérivée $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ était différente de zéro, cette frontière aurait été soumise le long de l'axe X à la contrainte tangentielle $\tau'_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$. Si c'est la dérivée $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ qui était différente de zéro, la contrainte tangentielle $\tau''_{yx} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}$ serait de même orientation que dans le cas précédent. Dans le cas où les deux dérivées $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ et $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ seraient simultanément différentes de zéro, la contrainte tangentielle agissant sur la frontière CD serait égale à $\tau_{yx} = \tau'_{yx} + \tau''_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$. Ce résultat découle directement de l'hypothèse qu'entre les contraintes tangentielles et les vitesses de déformation du fluide il existe une relation linéaire et homogène. Il en découle également que l'expression obtenue pour τ_{yx} reste en vigueur quelles que soient les valeurs des autres dérivées $\frac{\partial v_y}{\partial z}$, $\frac{\partial v_z}{\partial y}$, etc. En reprenant le même raisonnement que ci-dessus nous trouverons les expressions de toutes les autres contraintes tangentielles agissant sur les différentes faces du parallélépipède $ABCD$:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right), \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{96.4}$$

Si le liquide est incompressible, ces expressions suffisent pour établir les équations différentielles de l'écoulement du fluide. Mais si le fluide est compressible, on devra leur adjoindre encore les expressions pour les contraintes normales. Nous nous abstiendrons de donner ici ces expressions car nous n'aurons pas l'occasion de les utiliser.

5. Considérons le cas particulier où un fluide visqueux tourne autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire ω. Les lignes de courant sont alors des

circonférences. Soit AB un segment élémentaire de longueur $r\,d\varphi$ d'une ligne de courant (fig. 259). La contrainte tangentielle à la surface cylindrique à laquelle appartient ce segment est évidemment dirigée dans le sens de la rotation; désignons-la donc par $\tau_{r\varphi}$. L'indice r caractérise le sens de la normale extérieure à la

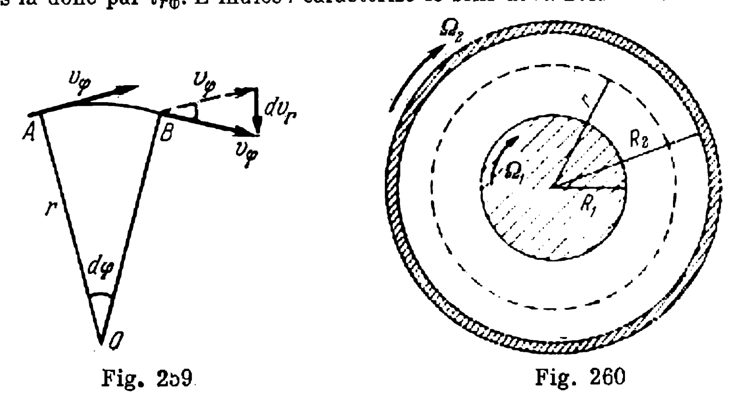


Fig. 259 Fig. 260

surface cylindrique et l'indice φ le sens positif de la contrainte tangentielle. Dans ce cas c'est dr qui remplace dy et c'est la longueur de l'arc $AB = r\,d\varphi$ qui remplace dx. Par suite on tire de (96.4) l'expression suivante pour la contrainte tangentielle $\tau_{r\varphi}$:

$$\tau_{r\varphi} = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{r\,\partial\varphi}\right).$$

Au point A la composante radiale de la vitesse v est nulle. Au point B il existe une composante de la vitesse dirigée suivant le rayon OA et égale à $dv_r = -v_\varphi d\varphi$, de sorte que $\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} = -v_\varphi$ et par suite

$$\tau_{r\varphi} = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right). \qquad (96.5)$$

En y substituant $v_\varphi = \omega r$ on obtient

$$\tau_{r\varphi} = \eta r\frac{\partial\omega}{\partial r}. \qquad (96.6)$$

Les contraintes visqueuses disparaissent si $\frac{\partial\omega}{\partial r} = 0$, ce qui se produit lorsque le fluide tourne tout d'un bloc à l'instar d'un corps solide. On ne serait pas arrivé à ce résultat si on n'avait pas tenu compte du second terme dans la formule

$$\tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right). \qquad (96.7)$$

6. Pour illustrer l'application de la formule (96.5) considérons le mouvement stationnaire d'un fluide compris entre deux cylindres coaxiaux animés d'une rotation uniforme. Désignons par l la hauteur des cylindres, par R_1 et R_2 leurs rayons et par Ω_1 et Ω_2 leurs vitesses angulaires. Nous supposons que la hauteur l est très grande par rapport à l'interstice $R_2 - R_1$ entre les cylindres, ce qui revient à les considérer comme infiniment longs; on peut alors négliger les complications qu'introduisent les effets perturbateurs dus aux bords des cylindres. Traçons au sein du fluide une surface cylindrique de rayon r (fig. 260).

Le moment des forces de viscosité rapporté à l'axe de rotation et s'exerçant sur cette surface est

$$M = 2\pi r^2 l \tau_{r\varphi} = 2\pi\eta l r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r}.$$

En régime de rotation stationnaire du fluide ce moment ne doit pas dépendre de r, car ce n'est qu'à cette condition que le moment des forces appliquées au fluide contenu entre deux surfaces cylindriques coaxiales peut s'annuler; le moment cinétique est alors conservatif. Nous arrivons ainsi à l'équation

$$r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r} = \text{const.}$$

En désignant la constante par $-2A$ nous obtenons après intégration

$$\omega = \frac{A}{r^2} + C,$$

où C est une constante d'intégration dont la valeur (de même que celle de A) se déduit des conditions aux limites. Comme tout fluide visqueux adhère à la surface du corps le long duquel il s'écoule, la vitesse angulaire ω doit devenir égale à Ω_1 pour $r = R_1$ et à Ω_2 pour $r = R_2$. Ceci conduit à deux équations

$$\frac{A}{R_1^2} + C = \Omega_1, \quad \frac{A}{R_2^2} + C = \Omega_2$$

qui ont pour solutions

$$A = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}(\Omega_1 - \Omega_2), \quad C = \frac{R_2^2\Omega_2 - R_1^2\Omega_1}{R_2^2 - R_1^2}$$

et

$$\omega = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\,\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{r} + \frac{R_2^2\Omega_2 - R_1^2\Omega_1}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (96\ 8)$$

Le moment des forces de viscosité s'exerçant sur le cylindre intérieur est égal à

$$M = 2\pi\eta l(-2A) = 4\pi\eta l \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}(\Omega_2 - \Omega_1). \quad (96\ 9)$$

La formule (96.9) constitue le fondement d'une méthode pratique de mesure des coefficients de viscosité des liquides et des gaz. Dans le fluide à l'étude le cylindre intérieur est suspendu en position verticale à un fil fin et le cylindre extérieur est mis en mouvement de rotation uniforme avec une vitesse angulaire $\Omega_2 = \Omega$. On mesure l'angle de torsion φ du fil de suspension pour lequel le cylindre intérieur se trouve à l'équilibre. Cet équilibre est réalisé lorsque le moment M des contraintes de viscosité est compensé par le moment $f\varphi$ de torsion du fil, où f est le module de torsion. Le coefficient de viscosité est alors donné par la formule

$$\eta = \frac{f\varphi}{4\pi l}\,\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2 \Omega}. \quad (96.10)$$

PROBLÈMES

1. En utilisant un système local de coordonnées dont l'origine coïncide avec le point considéré de l'espace, démontrer par dérivation directe que la formule (96.7) se ramène à la formule (96.5) lorsque le fluide est mis en rotation.

S o l u t i o n. Menons par le point A de l'espace une ligne de courant circulaire. Plaçons l'origine des coordonnées locales au point A et orientons les axes de coordonnées X et Y comme indiqué sur la figure 261. Pour un point B les coordonnées et les composantes de la vitesse auront pour expressions

$$x = r \sin \varphi, \qquad y = r \cos \varphi - r_0,$$
$$v_x = v_\varphi \cos \varphi, \qquad v_y = -v_\varphi \sin \varphi,$$

où r_0 et r sont les rayons vecteurs des points A et B et v_φ est la vitesse au point B. En dérivant ces expressions et en posant $\varphi = 0$ (au point A) dans le résultat obtenu, nous obtenons pour le point A

$$dx = r_0\, d\varphi, \qquad dy = dr,$$
$$dv_x = dv_\varphi, \qquad dv_y = -v_\varphi d\varphi,$$

d'où

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{v_\varphi}{r_0}.$$

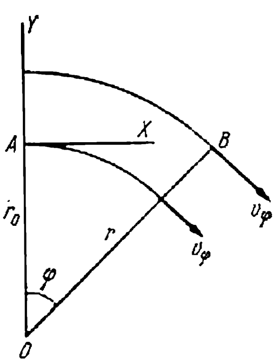


Fig. 261

En substituant dans (96.7) on arrive à la formule (96.5).

2. A quoi se réduira la formule (96.9) dans le cas limite où l'épaisseur de l'interstice entre les cylindres $h = R_2 - R_1$ devient négligeable par rapport aux rayons R_1 et R_2?

R é p o n s e.

$$M = \frac{2\pi\eta l R^3}{h} (\Omega_2 - \Omega_1). \tag{96.11}$$

On peut aussi obtenir cette formule en assimilant la couche fluide comprise entre les cylindres à une couche plane-parallèle et en utilisant la formule (96.2). Le lecteur est invité à faire ce calcul.

§ 97. Ecoulement permanent d'un fluide dans un conduit rectiligne. Formule de Poiseuille

1. Considérons l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible le long d'un conduit cylindrique rectiligne de rayon R. Nous supposerons que les lignes de courant sont toutes parallèles à l'axe du conduit. Visualisons un tube de courant de section infiniment petite; le fluide étant incompressible, la vitesse d'écoulement v doit être la même en tout point du tube de courant et par suite la vitesse du fluide ne peut varier le long du conduit. Par contre elle peut fort bien varier en fonction de la distance r à l'axe du conduit. Ainsi la vitesse v du fluide est fonction du rayon r du conduit.

Faisons coïncider l'axe du conduit avec l'axe X en l'orientant dans le sens de l'écoulement. Délimitons dans le conduit un cylindre de rayon r et de longueur dx infiniment petite (fig. 262). Sa surface latérale est soumise dans le sens de l'écoulement à la force tangentielle de frottement interne $dF = 2\pi r\eta \frac{dv}{dr} dx$. Sur ses bases s'exerce une différence de forces de pression $dF_1 = \pi r^2 [P(x) - P(x +$

$+ dx)] = -\pi r^2 \frac{dP}{dx} dx$ également dirigée dans le sens de l'écoulement. Si l'écoulement est permanent, la somme de ces deux forces doit être nulle et par suite

$$2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dP}{dx}.$$

La vitesse $v(r)$ et la dérivée $\frac{dv}{dr}$ ne varient pas avec x. Par conséquent la dérivée $\frac{dP}{dx}$ doit elle aussi être indépendante de x ; cette dérivée doit être égale à $(P_2 - P_1)/l$, où P_1 est la pression à l'entrée du

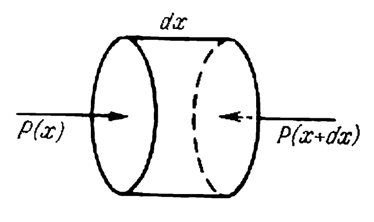


Fig. 262

conduit, P_2 la pression à sa sortie et l la longueur du conduit. On arrive finalement à l'équation

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r. \tag{97.1}$$

En l'intégrant on obtient

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C.$$

On détermine la constante d'intégration C en imposant une vitesse v nulle sur les parois du conduit, i.e. pour $r = R$. Ainsi

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \tag{97.2}$$

La vitesse v est maximale sur l'axe du conduit où sa valeur est

$$v_0 = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2. \tag{97.3}$$

Lorsqu'on s'écarte de l'axe du conduit la vitesse v varie suivant une loi parabolique.

2. Calculons le *débit-masse de fluide*, i.e. la quantité de fluide s'écoulant par seconde à travers la section droite du conduit. La masse de fluide s'écoulant par seconde à travers une couronne circulaire comprise entre les rayons r et $r + dr$ est égale à $dQ = 2\pi r\, dr \times \times \rho v$. En y portant l'expression de v et en intégrant, on obtient le

débit-masse de fluide

$$Q = \pi\rho \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\, dr,$$

soit

$$Q = \pi\rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4. \qquad (97.4)$$

Le débit-masse de fluide est proportionnel à la différence de pression $P_1 - P_2$, *à la quatrième puissance du rayon du conduit et inversement proportionnel à sa longueur et au coefficient de viscosité du fluide.* Cette corrélation a été établie indépendamment par Hagen en 1839 et en 1840 par Poiseuille (1799-1869). Hagen étudia l'écoulement de l'eau dans des conduits et Poiseuille l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires. La *formule* (97.4) porte le nom *de Poiseuille*, bien que s'occupant d'études expérimentales il n'établit pas lui-même cette formule. Elle est à la base d'une méthode expérimentale de mesure des coefficients de viscosité des liquides.

On peut mettre la formule (97.4) sous la forme $Q = \rho\pi R^2 \cdot v_0/2$. On peut aussi introduire la *vitesse d'écoulement moyenne* $\bar{v}$ en la définissant par la relation $Q = \rho\pi R^2\bar{v}$. En comparant ces deux expressions on obtient

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_0. \qquad (97.5)$$

La *formule de Poiseuille* n'est vérifiée que pour les *écoulements laminaires*. Un écoulement est dit *laminaire* si les filets fluides sont tous parallèles à l'axe du conduit. (Nous donnerons au § 98 une définition plus générale applicable à n'importe quel écoulement.) Lorsque la vitesse d'écoulement devient grande, l'écoulement laminaire devient instable et se transforme en *écoulement turbulent*, que nous étudierons au § 98. La formule de Poiseuille n'est pas applicable aux écoulements turbulents.

3. L'énergie cinétique que transporte par seconde un écoulement de fluide à travers la section droite d'un conduit est donnée par l'expression suivante :

$$K = \int_0^R \frac{\rho v^2}{2} \cdot 2\pi r v\, dr.$$

En y portant l'expression de v on obtient après intégration

$$K = \frac{1}{4} Q v_0^2 = Q (\bar{v})^2. \qquad (97.6)$$

Le travail qu'effectue sur le fluide la différence de pression $P_1 - P_2$ est $A = \int v\,(P_1 - P_2)\cdot 2\pi r\,dr$, ou encore

$$A = \frac{P_1 - P_2}{\rho} Q. \quad (97.7)$$

Un travail de même grandeur mais de signe contraire est produit par les forces de frottement interne, car en régime permanent l'énergie cinétique du fluide doit être constante: $A' = -A$. A l'aide de (97.3) on exclut la différence de pression $P_1 - P_2$, ce qui donne

$$A' = -\frac{4\eta v_0 l}{\rho R^2} Q. \quad (97.8)$$

Les formules que nous venons d'établir permettent d'expliquer dans quels cas on peut négliger les forces de viscosité et appliquer l'équation de Bernoulli à l'écoulement d'un fluide à travers un conduit. Pour cela il faut que la perte d'énergie cinétique du fluide due à l'action des forces de viscosité soit négligeable par rapport à l'énergie cinétique du fluide, i.e. $|A'| \ll K$. Cela implique la condition

$$\frac{v_0 R^2}{16\nu l} \gg 1. \quad (97.9)$$

ν désigne ici la *viscosité cinématique*, i.e. la relation

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (97.10)$$

La quantité η est dénommée *viscosité dynamique*.

4. Les lois établies par Poiseuille peuvent être retrouvées sous une forme générale par la méthode de l'analyse dimensionnelle. L'avantage de cette méthode réside en ce qu'elle s'applique aux conduits rectilignes de section arbitraire et non seulement aux conduits cylindriques. Il faut cependant que les sections droites de tous les conduits soient géométriquement semblables. Ces sections ne peuvent se distinguer l'une de l'autre que par leurs dimensions. On peut définir pour n'importe quelle section droite une *dimension caractéristique*. Ce peut être, par exemple, son périmètre ou la racine carrée de son aire. On peut aussi couper en deux parties les sections droites de tous les conduits par des segments de droite de manière à préserver la similitude géométrique des figures résultantes. Les longueurs de ces segments peuvent également servir de dimensions caractéristiques. Les longueurs caractéristiques, par exemple dans le cas d'une section droite elliptique, seront les longueurs du grand et du petit axe de l'ellipse ou bien d'autres segments de droite caractérisant ses dimensions. Toutes les autres dimensions des sections droites des conduits sont définies par la dimension caractéristique.

Comme dans toute autre application de la théorie des dimensions, pour établir les lois de Poiseuille il importe en premier lieu de dé-

terminer les grandeurs physiques reliées entre elles par une relation fonctionnelle. Dans le cas d'un écoulement laminaire permanent dans un conduit, les forces de viscosité sont compensées par des gradients de pression. Comme les gradients figurent dans l'équation de mouvement, la différence de pression $P_1 - P_2$ et la longueur l du conduit ne peuvent apparaître que sous forme de la combinaison $(P_1 - P_2)/l$. Comme le fluide se meut sans accélération, la nature de l'écoulement doit être indépendante de la densité du fluide. La densité ρ et le débit-masse Q ne peuvent apparaître que sous forme de la combinaison Q/ρ, puisque Q est une quantité purement géométrique égale au volume de fluide s'écoulant par seconde à travers la section droite du conduit. En leur adjoignant encore la viscosité η du fluide et la dimension caractéristique transversale a du conduit, nous disposerons de quatre grandeurs

$$\frac{Q}{\rho}, \quad \frac{P_1 - P_2}{l}, \quad a, \quad \eta,$$

qui doivent être liées par une relation fonctionnelle. A la place de a on peut prendre l'aire S de la section droite du conduit. En appliquant la méthode générale de détermination des combinaisons sans dimension (cf. § 87, point 6) on constate sans peine qu'avec les quatre grandeurs ci-dessus on ne peut former qu'une seule combinaison indépendante sans dimension, à savoir

$$\frac{Q}{\rho} \cdot \frac{l}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\eta}{S^2}.$$

Il s'ensuit que cette combinaison doit être constante. Désignant cette constante par C, nous obtenons:

$$Q = C \frac{P_1 - P_2}{l\eta} \rho S^2. \tag{97.11}$$

Cette formule renferme toutes les lois de Poiseuille et constitue une généralisation de la formule (97.4) au cas de conduits rectilignes de section droite arbitraire. La valeur de la constante C dépend de la forme de la section droite et ne peut être calculée par la théorie des dimensions; on doit faire appel à l'expérience ou à des méthodes dynamiques, i.e. à l'intégration des équations de mouvement.

PROBLÈMES

1. Calculer l'écoulement permanent d'un liquide incompressible parallèlement à l'axe d'un système de deux cylindres coaxiaux de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 et de longueur l, ainsi que le débit-masse du liquide.

Solution. Considérons une couche annulaire de liquide de rayons intérieur r et extérieur $r + dr$. Cette couche est soumise à une force de frottement interne dirigée dans le sens de l'écoulement et égale à

$$2\pi l\eta \left[\left(r \frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} - \left(r \frac{dv}{dr} \right)_r \right] = 2\pi l\eta \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) dr.$$

(Les indices r et $r + dr$ indiquent que les quantités entre parenthèses affectées de ces indices doivent être calculées respectivement pour les valeurs des rayons r et $r + dr$.) La force due à la différence de pression $(P_1 - P_2)\, 2\pi r\, dr$ agit dans le même sens. Pour un écoulement permanent la somme de ces forces doit être nulle, ce qui s'exprime par

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{P_1 - P_2}{l\eta} r. \qquad (97.12)$$

La solution de cette équation, s'annulant pour $r = R_1$ et $r = R_2$, est

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4l\eta}\left\{R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln (R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_2}\right\}.$$

Le débit-masse du liquide est:

$$Q = \frac{\pi\rho(P_1 - P_2)}{8\eta l}\left\{R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln (R_2/R_1)}\right\}.$$

2. Montrer que pour un écoulement laminaire permanent d'un liquide incompressible le long d'un conduit rectiligne de section droite arbitraire et de longueur l, la vitesse du liquide v vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{P_1 - P_2}{l\eta} = 0. \qquad (97.13)$$

(Le plan des coordonnées YZ est orthogonal à l'axe du conduit, les axes Y et Z sont rectangulaires et orientés de façon arbitraire.)

I n d i c a t i o n. Considérer un parallélépipède élémentaire droit de liquide de longueur l dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées et formuler la condition d'annulation des forces de viscosité et de la différence de pression qui lui sont appliquées (comme nous l'avons fait pour établir l'équation (97.12)).

3. Calculer la vitesse d'écoulement et le débit-masse d'un liquide dans un conduit de section droite elliptique.

S o l u t i o n. Ce problème est du type de ceux que l'on résout par la *méthode intuitive*. On choisit intuitivement la forme de la solution de l'équation différentielle (97.13), puis on choisit les coefficients figurant dans cette solution de façon que soit vérifiée la condition aux limites sur la paroi du conduit: $v = 0$. Orientons les axes Y et Z suivant les axes principaux de la section droite elliptique et cherchons une solution qui soit de la forme $v = Ay^2 + Bz^2 + v_0$. Cette expression vérifie l'équation (97.13) à condition que

$$2A + 2B = -\frac{P_1 - P_2}{l\eta}$$

Sur la paroi intérieure du conduit elliptique $v = 0$, c'est-à-dire $Ay^2 + Bz^2 + v_0 = 0$. Cette équation doit se ramener à l'équation de la section elliptique du conduit $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$. On en tire

$$A = -\frac{v_0}{a^2}, \quad B = -\frac{v_0}{b^2}.$$

Nous disposons ainsi de trois équations linéaires pour calculer les constantes A, B et v_0. En les résolvant nous obtenons

$$v_0 = \frac{P_1 - P_2}{2l\eta}\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \qquad (97.14)$$

$$v = v_0\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right) \qquad (97.15)$$

La constante v_0 représente évidemment la vitesse d'écoulement sur l'axe du conduit.

Calculons le débit-masse du liquide. Les surfaces sur lesquelles la vitesse v est constante sont des cylindres elliptiques

$$\frac{y^2}{a'^2}+\frac{z^2}{b'^2}=1,$$

dont les demi-axes sont

$$a'^2=a^2\frac{v_0-v}{v_0}, \quad b'^2=b^2\frac{v_0-v}{v_0}.$$

Prenons deux cylindres elliptiques pour lesquels le paramètre v a des valeurs infiniment proches. L'aire de la section droite comprise entre ces cylindres est $dS = d(\pi a'b') = -\pi\frac{ab}{v_0}\,dv$. Le débit-masse du liquide est

$$Q=\rho\int v\,dS=-\rho\frac{\pi ab}{v_0}\int_{v_0}^{0}v\,dv,$$

soit

$$Q=\frac{\rho\pi ab}{2}v_0. \tag{97.16}$$

§ 98. Lois de la similitude hydrodynamique

1. Considérons un écoulement de fluide contournant un corps ou un système de corps. A côté de ce système on peut imaginer un nombre infini de *corps similaires* ou *de corps disposés de façon similaire* que contournent d'autres fluides. A quelles conditions doivent satisfaire les paramètres de l'écoulement et les constantes caractérisant les propriétés des fluides (densité, viscosité, etc.) pour que les deux écoulements soient *mécaniquement similaires*? Si la similitude existe on peut, connaissant la carte de l'écoulement du premier système de corps, prédire univoquement l'écoulement du fluide dans un autre système de corps géométriquement semblable. Ceci joue un rôle important dans la construction navale et aéronautique. Au lieu des navires et des avions réels on soumet aux essais leurs *modèles réduits géométriquement semblables*, puis on détermine par calcul le comportement des systèmes réels. La méthode la plus simple pour traiter ces problèmes se fonde sur la théorie dimensionnelle.

Posons le problème sous une forme générale. Soient $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{v}$ le rayon vecteur et la vitesse du fluide en des points homologues, l la *dimension caractéristique* et v_0 la *vitesse caractéristique de l'écoulement*, par exemple la vitesse à l'infini amont avec laquelle le liquide vient frapper le système de corps. Les propriétés du fluide sont caractérisées par la viscosité η, la densité ρ et la compressibilité. A la place de la compressibilité on peut utiliser la célérité du son dans le fluide considéré. Si la force de pesanteur est essentielle pour l'étude, on la caractérise par l'accélération en chute libre g. Si l'écoulement

n'est pas permanent, on doit introduire un certain *temps caractéristique* τ au cours duquel l'écoulement se modifie notablement. Compte tenu de l'existence d'équations de mouvement, il doit exister une relation fonctionnelle entre les quantités suivantes

$$v,\ v_0,\ r,\ l,\ \rho,\ \eta,\ c,\ g,\ \tau.$$

On peut former avec ces quantités six combinaisons sans dimension indépendantes les unes des autres. Ce sont les deux rapports v/v_0 et r/l et les quatre nombres sans dimension:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho l v_0}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu}, \tag{98.1}$$

$$\mathrm{F} = \frac{v_0^2}{gl}, \tag{98.2}$$

$$\mathrm{M} = \frac{v_0}{c}, \tag{98.3}$$

$$\mathrm{S} = \frac{v_0 \tau}{l}. \tag{98.4}$$

D'après la règle des dimensions l'une de ces combinaisons sans dimension doit être une fonction de toutes les autres, par exemple

$$\frac{v}{v_0} = f\left(\frac{r}{l},\ \mathrm{Re},\ \mathrm{F},\ \mathrm{M},\ \mathrm{S}\right), \tag{98.5}$$

soit

$$v = v_0 f\left(\frac{r}{l},\ \mathrm{Re},\ \mathrm{F},\ \mathrm{M},\ \mathrm{S}\right). \tag{98.6}$$

Lorsque pour deux écoulements cinq des six combinaisons sans dimension sont identiques, les sixièmes doivent coïncider elles aussi. C'est là l'expression de la *loi générale de similitude des écoulements*; on dit alors que les écoulements présentent entre eux une *similitude mécanique* ou *hydrodynamique.*

2. Le nombre défini par (98.1) est dit *nombre de Reynolds* (1842-1912), le nombre défini par (98.2) est le *nombre de Froude*, le nombre défini par (98.3) est le *nombre de Mach* et le nombre (98.4) est le *nombre de Strouhal.*

La signification physique des nombres de Mach et de Strouhal est évidente, tandis que celle des nombres de Reynolds et de Froude doit être précisée. On constate alors que ce sont bien des nombres sans dimension. *D'après son ordre de grandeur, le nombre de Reynolds représente le rapport de l'énergie cinétique du fluide à la perte d'énergie cinétique occasionnée par le travail qu'effectuent les forces de viscosité sur une distance caractéristique.* En effet l'énergie cinétique d'un fluide est $K \sim {}^1/_2\, \rho v_0^2 l^3$. Pour trouver la force de viscosité, nous devons multiplier la contrainte visqueuse $\eta v_0/l$ par l'aire caractéristique l^2, ce qui conduit à $\eta v_0 l$. Le produit de cette force par la longueur caractéristique donne l'ordre de grandeur du travail des forces

de viscosité $A \sim \eta v_0 l^2$. Le rapport de l'énergie cinétique K au travail A

$$\frac{K}{A} \sim \frac{\rho l v_0}{\eta},$$

est le nombre de Reynolds. *Le nombre de Reynolds caractérise* donc *le rôle relatif que jouent dans l'écoulement l'inertie et la viscosité du fluide. Si le nombre de Reynolds est grand, c'est l'inertie qui prédomine, et s'il est petit c'est la viscosité qui joue le rôle principal.*

Le nombre de Reynolds n'est pas parfaitement défini, puisqu'il renferme la longueur et la vitesse caractéristiques qui ne sont pas univoquement définies. Ce nombre, de même que tous les autres nombres sans dimension figurant dans la loi de similitude, n'indique qu'un ordre de grandeur. L'indétermination qui en résulte est petite si le profil du corps est sensiblement le même suivant différentes directions. Mais s'il n'en est pas ainsi, on peut prendre pour longueur caractéristique des quantités pouvant différer notablement les unes des autres. Dans le cas, par exemple, où un liquide s'écoule à travers un conduit, on peut prendre pour longueur caractéristique sa longueur, son rayon ou une quantité intermédiaire. Les nombres de Reynolds correspondants différeront alors de plusieurs ordres de grandeur. Le choix de la valeur dépend de la nature du problème. Nous avons établi au paragraphe précédent la condition (97.9) qui implique qu'on peut négliger les forces de viscosité. La quantité figurant dans le premier membre de la formule (97.9) peut être considérée comme un nombre de Reynolds si on prend pour longueur caractéristique $\frac{1}{16}\frac{R^2}{l}$. Ici la dimension caractéristique dépend aussi bien de la longueur que du rayon du conduit. Pour un tel choix la condition (97.9) est vérifiée pour tous les conduits et pas seulement pour les conduits géométriquement semblables pour lesquels le rapport R/l est constant. Si le conduit est long ($l \gg 16R$) la condition suffisante s'écrit

$$\frac{v_0 R}{\nu} \gg 1, \tag{98.7}$$

ce qui sous-entend que l'on prend pour longueur caractéristique le rayon R. Mais ce serait une erreur d'adopter la condition $v_0 l/\nu \gg 1$ au lieu de (98.7).

Le *nombre de Froude* **F** a une signification analogue. *D'après son ordre de grandeur ce nombre définit le rapport de l'énergie cinétique du fluide à l'accroissement d'énergie cinétique déterminé par le travail que produit la force de pesanteur sur une distance égale à la longueur caractéristique. Plus grand est le nombre de Froude, plus l'inertie prédomine sur la pesanteur et inversement.*

3. Pour un écoulement permanent le temps caractéristique τ et le nombre de Strouhal deviennent infinis. C'est pour cela qu'ils

s'éliminent de (98.6). Lorsqu'il s'agit de fluides incompressibles, le nombre de Mach devient égal à zéro. Par suite, pour un écoulement permanent de fluides incompressibles, la relation (98.6) doit s'écrire :

$$v = v_0 f\left(\frac{r}{l}, \mathbf{Re}, \mathbf{F}\right). \qquad (98.8)$$

Les écoulements sont semblables si leurs nombres de Reynolds et de Froude sont les mêmes.

On doit cependant remarquer que si dans les essais sur maquettes on utilise le même fluide que celui dans lequel doit se déplacer l'objet réel, les critères de similitude de Reynolds et de Froude deviennent incompatibles. Ecrivons ces critères sous la forme

$$\frac{l_1 v_1}{\nu_1} = \frac{l_2 v_2}{\nu_2}, \quad \frac{v_1^2}{l_1 g_1} = \frac{v_2^2}{l_2 g_2},$$

où l'indice 1 concerne l'objet réel et l'indice 2 sa maquette. En multipliant membre à membre on obtient

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{g_1}{g_2}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{1/2}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{3/2}. \qquad (98.9)$$

En principe on pourrait faire varier g, mais pratiquement cela ne se produit pas. Mais même si les valeurs de g sont identiques, on peut en principe satisfaire aux deux critères de similitude à la fois, à condition d'utiliser des fluides de viscosités cinématiques différentes et vérifiant l'égalité (98.9). Comme dans la plupart des cas on n'y arrive pas, dans les essais sur maquettes ne se trouve vérifié que l'un ou l'autre des critères de similitude : celui de Reynolds ou celui de Froude. Dans certains cas cela peut être suffisant. Supposons, par exemple, que le nombre de Reynolds est grand et le nombre de Froude petit ou voisin de l'unité. Dans ce cas l'écoulement du fluide sera pour l'essentiel déterminé par l'inertie et par la pesanteur. Une variation du nombre de Reynolds n'affectera que faiblement cet écoulement. La similitude de l'écoulement sera alors caractérisée par le seul *critère de Froude.* Par contre, dans les cas où le nombre de Reynolds est petit et le nombre de Froude grand, c'est l'inertie et la viscosité qui prédominent sur la pesanteur. La similitude est alors caractérisée par l'*égalité des nombres de Reynolds.*

4. Pour étudier le comportement d'un avion en vol, par exemple, pour mettre en évidence les forces auxquelles il est alors soumis, on fixe une maquette de l'avion dans un *tunnel aérodynamique* où on crée un écoulement uniforme d'air. Ce procédé d'étude se fonde sur le *principe de relativité* selon lequel l'évolution du phénomène ne dépend que du mouvement relatif de l'avion et de l'air. Les souffleries modernes sont des installations extrêmement puissantes où la vitesse de l'air peut être portée à des centaines de mètres par seconde. On ne peut réduire fortement les dimensions de la maquette pour les raisons suivantes. Pour que la similitude aérodynamique soit respectée, il faut que les nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = vl/\nu$ soient égaux, ce qui implique que la vitesse de l'écoulement de l'air

doit être augmentée d'autant de fois que l'avion réel est plus grand que sa maquette. Or, aux grandes vitesses commence à se manifester la compressibilité de l'air qui affecte la similitude aérodynamique. C'est pour cela qu'aux grandes vitesses caractéristiques de l'aviation moderne on doit soumettre aux études des maquettes grandeurs nature ou faiblement réduites. La conséquence en est la très grande section des souffleries aérodynamiques, suffisante pour y loger des parties de l'avion ou l'avion tout entier. Pour faire face à cette difficulté on pourrait en principe accroître la densité de l'air en rendant étanches les tunnels aérodynamiques. En effet la viscosité dynamique η d'un gaz ne dépend pratiquement pas de sa densité (à température donnée) et de ce fait la viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ est inversement proportionnelle à la densité. En augmentant la densité ρ on peut conserver la similitude aérodynamique pour des maquettes de dimensions fortement réduites, sans avoir à accroître notablement la vitesse d'écoulement v. Malgré les difficultés que présente la construction de souffleries étanches, ce procédé est utilisé en pratique. Il est évident qu'il ne permet pas de surmonter les difficultés qui apparaissent lorsqu'on atteint ou lorsqu'on dépasse la célérité du son, puisqu'alors la similitude exige l'égalité des nombres de Reynolds et des nombres de Mach.

PROBLÈMES

1. Une maquette de navire ayant une longueur $l_1 = 5$ m est mue par un moteur d'une puissance $P_1 = 5$ ch qui lui confère une vitesse $v_1 = 15$ km/h. Quelle doit être la puissance P du moteur pour mettre en mouvement un navire de 80 m de long, géométriquement semblable à la maquette, si son mouvement est hydrodynamiquement semblable à celui de la maquette? Calculer la vitesse v du navire dans ces conditions.

Solution. La viscosité cinématique de l'eau est $\nu = 0{,}010$ cm²/s. Le calcul des nombres de Reynolds et de Froude pour la maquette donne les valeurs suivantes:

$$\mathrm{Re} = \frac{l_1 v_1}{\nu_1} = 2{,}1 \cdot 10^7, \qquad \mathrm{F} = \frac{v_1^2}{g l_1} = 0{,}022.$$

C'est le nombre de Froude qui importe, le nombre de Reynolds étant ici secondaire. On tire de l'égalité des nombres de Froude $v = v_1 (l/l_1)^{1/2} = 60$ km/h. Par des considérations dimensionnelles on trouve que

$$P = \rho v^2 l^{5/2} g^{1/2} f\,(\mathrm{Re},\ \mathrm{F}) = \rho \mathrm{F} l^{7/2} g^{3/2} f\,(\mathrm{Re},\ \mathrm{F}).$$

En négligeant l'influence des nombres de Reynolds on en tire

$$P = P_1 (l/l_1)^{7/2} \approx 80\ 000 \text{ ch}.$$

2. De combien de fois doit-on faire varier la vitesse angulaire de rotation de l'hélice d'un hélicoptère et la puissance de son moteur pour que la force ascensionnelle reste la même lorsqu'on remplace l'hélice et le corps de l'hélicoptère par des pièces géométriquement semblables mais de dimensions linéaires α fois plus grandes?

Solution. A l'aide des considérations dimensionnelles on conclut que la force ascensionnelle doit s'exprimer par la formule

$$F = \rho l^4 \omega^2 f_1 \left(\frac{l^2 \omega \rho}{\eta} \right),$$

et la puissance par la formule

$$P = \rho l^5 \omega^3 f_2 \left(\frac{l^2 \omega \rho}{\eta} \right).$$

Comme la densité et la viscosité de l'air sont les mêmes dans les deux cas, la force ascensionnelle ne changera pas tant que les valeurs de la fonction f_1 et

du coefficient qui y figure restent invariables. Il faut pour cela que $l_1^2\omega_1 = l_2^2\omega_2$, d'où

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

et

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{l_2^5\omega_2^3}{l_1^5\omega_1^3} = \frac{l_2\omega_2}{l_1\omega_1} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{\alpha}.$$

§ 99. Turbulence et instabilité hydrodynamique

1. Jusqu'ici nous avons limité l'étude des écoulements des fluides au cas d'écoulements *laminaires*. L'écoulement laminaire est *régulier*, en ce sens que le caractère laminaire étant préservé, l'écoulement ne peut se modifier que si on change les forces appliquées au fluide ou les conditions extérieures dans lesquelles il se trouve. Dans le cas d'un écoulement laminaire dans un tube rectiligne de section droite constante, les particules de fluide se meuvent le long de trajectoires rectilignes parallèles à l'axe du tube. Lorsque la vitesse du fluide devient grande, l'écoulement laminaire devient *instable* et cède la place à un *écoulement turbulent*. Un écoulement turbulent se caractérise par ce que ses propriétés hydrodynamiques (vitesse, pression, et pour les gaz densité et température) varient rapidement et de manière désordonnée dans le temps (autrement dit elles fluctuent). Les particules de fluide suivent des trajectoires désordonnées, ce qui entraîne un brassage entre les couches du fluide en écoulement. Comme exemples citons l'écoulement de l'eau dans un torrent de montagne, dans une chute d'eau, ou dans le sillage d'un navire rapide, ou encore l'écoulement des fumées par une cheminée d'usine. Ces variations rapides et désordonnées résultent non pas d'une variation des forces appliquées ou des conditions extérieures, mais de l'instabilité des écoulements laminaires qui se manifeste dans certaines conditions. L'instabilité des écoulements laminaires et l'apparition de la turbulence sont des questions fort complexes, incomplètement résolues encore, dont l'étude sort du cadre de notre cours. On se contentera donc d'illustrer ce problème ardu par un exemple simple où la question de l'instabilité de l'écoulement laminaire est facile à traiter.

2. Cet exemple concerne l'écoulement laminaire permanent d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux en rotation, avec un grand nombre de Reynolds (cf. § 96). Lorsque le nombre de Reynolds est grand, on peut négliger la viscosité du fluide et le considérer comme parfait. Comme dans les fluides parfaits il n'y a pas de contraintes tangentielles, la dépendance de la vitesse par rapport à la distance jusqu'à l'axe de rotation peut être quelconque: $v = v(r)$. Mais il suffit que le fluide présente une très faible viscosité pour que s'instaure rapidement après la mise en rotation du système une répartition bien déterminée des vitesses le long du rayon, qui est celle donnée par (96.8).

On notera cependant que la connaissance de la forme concrète de la fonction $v = v(r)$ n'est pas essentielle pour les considérations qui suivent. Dans

un écoulement non perturbé les particules de fluide se meuvent sur des trajectoires circulaires avec une vitesse angulaire $\omega(r) = \frac{v(r)}{r}$. Considérons un élément de fluide en mouvement sur une circonférence de rayon r_0. Il est soumis à la force centripète $F_0 = m\omega^2(r_0)\, r_0$ due à la différence de pression créée par le fluide ambiant. En introduisant le moment cinétique $L(r) = mr^2\omega$, on écrira cette force sous la forme $F_0 = \frac{L^2(r_0)}{mr_0^3}$. Supposons que sous l'action d'une petite poussée accidentelle l'élément de fluide considéré se soit déplacé dans une nouvelle position située à la distance r de l'axe de rotation. On peut supposer que cette poussée était dirigée vers l'axe de rotation ou en sens inverse, car si l'écoulement est instable vis-à-vis d'un type concret de perturbation, il l'est d'une manière générale. Le moment de cette force de poussée par rapport à l'axe de rotation est nul. La résultante de la force de pression exercée par le fluide ambiant ne produit elle non plus aucun moment, puisqu'elle est dirigée vers l'axe de rotation. Il s'ensuit que le déplacement de l'élément de fluide ne modifie pas son moment cinétique qui reste égal à $L(r_0)$. Pour que l'élément de fluide se trouvant dans sa nouvelle position puisse effectuer une rotation uniforme sur une trajectoire circulaire de rayon r, il doit être soumis à la force centripète $F_0' = \frac{L^2(r_0)}{mr^3}$. Or il n'est soumis qu'à la force de pression du milieu ambiant qui est égale à $F = \frac{L^2(r)}{mr^3}$. Si cette force n'est pas égale à F_0', l'élément de fluide ne pourra se maintenir sur la nouvelle orbite circulaire : ou bien il retourne sur son orbite initiale, ou bien il s'en éloigne. Dans le premier cas l'écoulement du fluide sera stable et dans le second il ne le sera pas. Supposons par exemple que $r > r_0$. Si $F > F_0'$, i.e. $L^2(r) > L^2(r_0)$, la pression exercée par le fluide environnant est supérieure à celle qui suffit pour retenir l'élément de fluide déplacé sur une orbite de rayon r. L'élément déplacé retournera sur son orbite initiale, ce qui témoigne que l'écoulement est stable. Dans le cas où $F < F_0'$, i.e. $L^2(r) < L^2(r_0)$, la force de pression exercée par le fluide environnant est trop faible pour retenir l'élément de fluide sur l'orbite de rayon r; celui-ci cherchera donc à se déplacer plus loin, ce qui correspond à l'instabilité. Dans le cas où $r < r_0$, un raisonnement analogue conduit à conclure que pour $L^2(r) < L^2(r_0)$ le mouvement est stable, tandis que pour $L^2(r) > L^2(r_0)$ il devient instable. Dans les deux cas le critère de stabilité s'exprime par l'inégalité :

$$\frac{dL^2}{dr} > 0 \tag{99.1}$$

ou bien par

$$\frac{d}{dr}(r^4\omega^2) > 0. \tag{99.2}$$

3. Ces considérations montrent que l'écoulement sera stable si la quantité $r^4\omega^2$ croît de façon monotone lorsqu'on s'éloigne de l'axe de rotation. Si les cylindres tournent en sens inverses, cette condition ne peut être satisfaite, car sur les surfaces des cylindres les vitesses angulaires ω sont de sens opposés. Par suite, la vitesse ω étant une fonction continue de r, elle doit s'annuler en un point intermédiaire. En ce point la quantité $r^4\omega^2$ s'annule et passe donc par un minimum. De part et d'autre de ce point la dérivée $\frac{d}{dr}(r^4\omega^2)$ a des signes opposés, de sorte que la condition (99.2) ne peut être vérifiée. On en conclut que lorsque les cylindres tournent en sens opposés, l'écoulement du fluide est instable. Il en sera de même si le cylindre intérieur est en rotation et le cylindre extérieur au repos. Sur la surface de ce dernier $r^4\omega^2 = 0$, tandis que sur la surface du cylindre intérieur $r^4\omega^2 > 0$. Ainsi avec l'accroissement de r, la quantité $r^4\omega^2$ ne peut croître de façon monotone et l'écoulement est instable. Si c'est le cylindre

extérieur qui tourne, le cylindre intérieur étant au repos, la rotation du fluide sera stable puisqu'à mesure que l'on s'éloigne de l'axe de rotation, la vitesse angulaire ω et la quantité $r^4\omega^2$ augmentent. Ces considérations expliquent pourquoi dans le procédé de mesure du coefficient de frottement interne décrit à la fin du § 96 on avait précisé que c'est le cylindre extérieur qui devait être mis en rotation. Si on faisait tourner le cylindre intérieur, la rotation du fluide compris entre les cylindres aurait été instable.

4. Dans ce qui précède nous n'avons pas tenu compte de la viscosité du fluide. Les forces de viscosité diminuant l'énergie cinétique du fluide, s'opposent toujours au développement des instabilités et le domaine d'instabilité des écoulements laminaires se rétrécit. Cette remarque sur le rôle de la viscosité du fluide doit suffire car nous voulions seulement montrer que l'écoulement laminaire pouvait devenir instable.

5. Lorsque la vitesse d'écoulement augmente, le régime laminaire se transforme en régime turbulent. La vitesse à laquelle se produit cette transition est dite *vitesse critique*. Il est préférable de caractériser la transition par le nombre de Reynolds puisque les considérations sur la similitude, développées au paragraphe précédent, concernaient le régime turbulent et le passage du régime laminaire au régime turbulent. *En cas de similitude géométrique des systèmes, la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent se produit pour un même nombre de Reynolds.* Cette règle fut établie par Reynolds sur la base de la théorie dimensionnelle. La valeur limite du nombre de Reynolds pour laquelle se produit la transition est le *nombre critique de Reynolds* que l'on dénote par $\mathrm{Re_{cr}}$. La valeur de $\mathrm{Re_{cr}}$ dépend de la configuration des corps que le fluide doit contourner, ainsi que du taux de perturbation de l'écoulement laminaire. Ainsi, par exemple, pour l'écoulement d'un fluide à travers un conduit rectiligne, de section circulaire, lorsque le conduit est directement relié à un système de distribution d'eau et qu'aucune mesure n'est prise pour diminuer la perturbation à l'entrée du conduit, $\mathrm{Re_{cr}} = \bar{v}a/\nu \approx 1100$ (a — rayon du conduit, $\bar{v}$ — vitesse d'écoulement moyenne). Le taux de perturbation à l'entrée peut être réduit en utilisant un conduit à parois lisses et à bords arrondis. Il est recommandé en outre de relier le conduit à un réservoir de grande capacité et d'attendre que l'eau qui s'y déverse devienne calme. On arrive ainsi à augmenter le domaine d'existence de l'écoulement laminaire dans les conduits jusqu'à des valeurs de $\mathrm{Re_{cr}} \approx 25\,000$.

6. Nous avons indiqué que les lois de Poiseuille ne s'appliquent qu'aux écoulements laminaires dans des conduits. L'hypothèse de l'écoulement laminaire avait été explicitement utilisée pour établir les formules (97.4) et (97.16). Mais on ne saurait dire à quel moment on utilisa cette hypothèse pour établir la formule de Poiseuille (97.11) à l'aide de la théorie dimensionnelle. Il est utile d'éclaircir cette question ainsi que de préciser par quelle formule on doit remplacer la formule de Poiseuille pour décrire un écoulement turbulent. Comme dans ce dernier cas les particules du fluide se meuvent avec des *accélérations*, la *densité* ρ *du fluide* doit jouer un rôle important. Il n'est cependant pas nécessaire que la densité ρ figure dans les combinaisons Q/ρ, comme c'était le cas pour l'écoulement laminaire. Pour un écoulement turbulent, les quantités Q et ρ seraient plutôt indépendantes. Une liaison fonctionnelle doit être établie entre les cinq quantités suivantes:

$$Q, \quad \rho, \quad \frac{P_1 - P_2}{l}, \quad S, \quad \eta,$$

et non entre quatre seulement comme ce fut le cas pour le régime laminaire. Avec ces cinq quantités on peut constituer deux combinaisons indépendantes sans dimension, telles que

$$\frac{Q}{\rho} \cdot \frac{l}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\eta}{S^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Re} \equiv \frac{\bar{v}a}{\nu},$$

où $\bar{v}$ est la vitesse moyenne de l'écoulement définie par la relation $Q = \rho \bar{v} S$, a le rayon du conduit, $\nu = \eta/\rho$ la viscosité cinématique. D'après la règle des dimensions une de ces combinaisons sans dimension est fonction de l'autre. Ceci donne la relation

$$Q = C\,(\mathrm{Re})\,\frac{P_1 - P_2}{l\eta}\,\rho S^2. \tag{99.3}$$

Pour un écoulement laminaire le coefficient C est une constante dont la valeur ne dépend que de la forme de la section droite du conduit. Pour un écoulement turbulent, ce coefficient est une fonction du nombre de Reynolds. On peut mettre la formule (99.3) sous la forme suivante:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{\lambda\,(\mathrm{Re})}{a}\,\frac{\rho \bar{v}^2}{2}, \tag{99.4}$$

qui est couramment utilisée en hydraulique. Le coefficient λ est lié au coefficient C par la relation

$$\lambda\,(\mathrm{Re}) = \frac{2}{\pi C\,(\mathrm{Re})\,\mathrm{Re}}.$$

Le coefficient λ est dénommé *coefficient de résistance du conduit* Pour un écoulement laminaire ce coefficient est inversement proportionnel au nombre de Reynolds. Pour un écoulement turbulent la forme de la fonction λ (Re) doit être établie empiriquement.

Nous devons faire quelques remarques concernant le procédé d'établissement des formules (99.3) et (99.4). L'écoulement turbulent est non stationnaire en ce sens qu'à un écoulement régulier viennent se superposer des oscillations et des rotations irrégulières dites *pulsations* qui se caractérisent par des périodes de temps déterminées. Il s'agit donc d'un écoulement non permanent présentant *un temps* ou plutôt *des temps caractéristiques.* On pourrait donc s'attendre à ce que les coefficients C et λ figurant dans les formules (99.3) et (99.4) dépendent non seulement du nombre de Reynolds, mais aussi du nombre de Strouhal. Mais en régime turbulent le nombre de Strouhal est lui-même fonction du nombre de Reynolds et il est donc inutile de le faire figurer dans les formules (99.3) et (99.4).

PROBLÈME

Puisque dans un fluide parfait, quels que soient ses mouvements, aucune force tangentielle ne peut apparaître, l'écoulement peut devenir *discontinu*; les composantes tangentielles de la vitesse du fluide deviennent alors disconti-

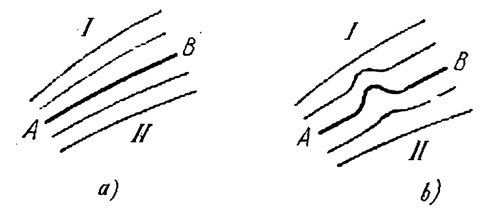


Fig. 263

nues sur une certaine surface (fixe ou mobile). Ces écoulements sont dits à *discontinuités tangentielles.* Montrer que dans un fluide incompressible ces écoulements sont hydrodynamiquement instables.

Solution. Il est évident que des deux côtés d'une surface de discontinuité la pression est la même. En régime permanent cette surface est fixe dans l'espace. Elle contient donc des lignes de courant. Soit AB une ligne de courant (fig. 263, *a*) et supposons qu'à la suite d'une perturbation infiniment petite cette ligne de courant se soit déformée (fig. 263, *b*). Du côté *I* l'intervalle entre les lignes de courant diminue et la vitesse du fluide augmente. Du côté *II* la distance entre les lignes de courant augmente alors que la vitesse du fluide diminue. D'après la loi de Bernoulli la pression doit augmenter du côté *II* et diminuer du côté *I*. Sous l'action de cette différence de pression accrue la bosse sur la ligne de courant doit augmenter, ce qui correspond à une instabilité de l'écoulement. C'est ce type d'instabilité qui explique le flottement des drapeaux exposés au vent.

§ 100. Paradoxe de D'Alembert. Ecoulements discontinus

1. Dans les derniers paragraphes de ce chapitre nous examinerons les forces de sustentation qu'appliquent les écoulements fluides sur les corps qui y sont immergés. Comme le mouvement est relatif, ce problème se ramène à celui du calcul des forces appliquées aux corps en mouvement dans un fluide immobile. C'est un problème vaste et ardu, qui est traité avec l'ampleur nécessaire dans les cours spéciaux d'hydro et d'aérodynamique. Dans un cours de Physique générale nous ne pouvons que l'esquisser, en nous bornant à l'étude qualitative.

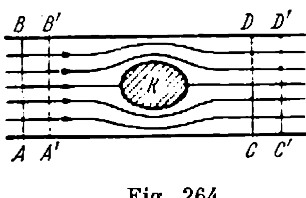


Fig. 264

La force qu'applique à un corps un écoulement de fluide peut être décomposée en deux composantes, l'une F_x dirigée suivant le sens de l'écoulement et l'autre F_y dirigée suivant une direction rectangulaire. La force F_x s'appelle *résistance frontale* (ou *traînée*) et la force F_y s'appelle *force de portance*. C'est cette dernière force qui s'exerce sur les ailes d'un avion en vol et on se la représente d'ordinaire comme une force dirigée suivant une verticale ascendante, bien qu'elle puisse être dirigée vers le bas suivant l'orientation de l'avion par rapport à sa direction de vol. La force de traînée F_x est la somme de deux forces différentes: la force due à la différence de pression s'exerçant sur la face avant et la face arrière du corps et les forces de frottement visqueux. Aux grandes vitesses (ou plus exactement pour de grands nombres de Reynolds) c'est la différence de pression qui prédomine, et pour de petits nombres de Reynolds, ce sont les forces de viscosité qui jouent le rôle principal.

2. Considérons d'abord un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible. Supposons qu'en l'absence de corps étrangers le fluide s'écoule en filets parallèles. Immergeons un corps K dans le fluide (fig. 264); les lignes de courant s'en trouvent déformées, mais à grande distance du corps K (à « l'infini ») les lignes de courant restent parallèles. Après un certain temps l'écoulement se

stabilise. Nos considérations ultérieures concernent un régime permanent. Pour fixer les idées supposons que le fluide s'écoule à travers un conduit rectiligne. A grande distance du corps K les lignes de courant sont parallèles aux parois du conduit et comme le fluide est incompressible, sa vitesse y est partout la même. Selon l'équation de Bernoulli la pression P sera donc partout identique. Considérons la partie $ABDC$ du fluide où se trouve le corps K. On suppose que les sections AB et CD sont à assez grande distance du corps K pour que le fluide s'écoule à travers elles en filets parallèles. Au bout d'un certain temps cette partie de fluide se trouvera dans la position $A'B'D'C'$ sans que son impulsion ait changé. En effet, en position initiale, l'impulsion du fluide est égale à la somme:

$$\boldsymbol{I}_1 = \text{impulsion du fluide contenu dans le volume } A'B'DC + \\ + \text{impulsion du fluide contenu dans le volume } ABB'A',$$

et en position finale elle est:

$$\boldsymbol{I}_2 = \text{impulsion du fluide dans le volume } A'B'DC + \\ + \text{impulsion du fluide dans le volume } CDD'C'.$$

L'écoulement étant permanent, l'impulsion du fluide dans le volume $A'B'DC$ est la même dans les deux cas. Et comme la vitesse d'écoulement à l'infini amont et aval est la même, les impulsions des volumes $ABB'A'$ et $CDD'C'$ sont identiques elles aussi. Ainsi l'impulsion du fluide ne varie pas lorsqu'il contourne le corps K. Il s'ensuit que la force totale appliquée au volume de fluide considéré dans le sens d'écoulement est nulle. Or cette force se compose de forces de pression appliquées aux bases AB et CD et de la force $\boldsymbol{F}'_x$ qu'applique le corps K au fluide. (On peut négliger la pression des parois car sa composante le long de l'écoulement est nulle.) Les forces de pression s'exerçant sur les bases AB et CD se compensent mutuellement et par suite $F'_x = 0$. La traînée F_x est donc nulle elle aussi.

Supposons maintenant que l'on utilise des conduits de diamètres de plus en plus grands. Le résultat obtenu reste valable pour les plus grands diamètres et donc pour le cas limite où le conduit est supprimé et l'écoulement étendu à l'infini dans toutes les directions latérales. Ainsi, lors de l'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible ou lors du mouvement uniforme d'un corps dans ce fluide, la force de traînée est nulle. Ce résultat sembla à l'époque stupéfiant et reçut le nom de *paradoxe de D'Alembert* (1717-1783). L'existence du paradoxe indique que dans les déterminations de la traînée à laquelle est soumis un corps en mouvement uniforme dans un fluide, ce dernier ne peut être considéré comme parfait.

3. La conclusion à laquelle nous sommes arrivés ne concerne que la traînée $\boldsymbol{F}_x$ et nullement la portance $\boldsymbol{F}_y$ et le moment des

forces $\boldsymbol{M}$ qu'exerce le fluide sur le corps. Le moment $\boldsymbol{M}$ rapporté au centre de masse est nul si le corps est symétrique et disposé symétriquement par rapport à l'écoulement. S'il n'en est pas ainsi, le moment $\boldsymbol{M}$ n'est pas nul et l'écoulement se déplace dans une direction normale à la direction de l'écoulement non perturbé. De ce fait le moment cinétique du fluide varie, ce qui fait apparaître un moment $\boldsymbol{M}$ appliqué au corps. Ce dernier tourne jusqu'à ce que le moment $\boldsymbol{M}$ s'annule et que l'écoulement du fluide à proximité du corps K redevienne permanent. La question de la force de portance $\boldsymbol{F}_y$ sera examinée au § 103.

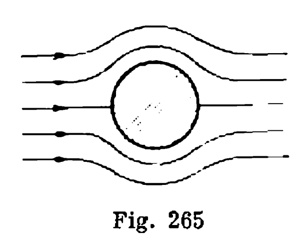


Fig. 265

4. Le paradoxe de D'Alembert ne se pose pas si le mouvement du corps immergé est non uniforme. Chaque fois qu'un corps mobile se meut dans un fluide, il entraîne avec soi une certaine masse de fluide appelée *masse associée*. Lorsque le corps prend de la vitesse, ceci concerne également la masse associée, de sorte que pour communiquer au corps une accélération donnée on doit lui appliquer une force plus grande qu'en l'absence de fluide. Cela signifie que le fluide oppose une résistance aux corps en mouvement accéléré.

5. Il est facile d'expliquer le paradoxe de D'Alembert par l'étude de la répartition dans l'espace des lignes de courant. La figure 265 est une représentation schématique des lignes de courant de l'écoulement permanent d'un fluide parfait contournant un cylindre ou une sphère. Les lignes de courant sont *parfaitement symétriques* par rapport à la direction d'amont en aval ou à la direction inverse. Les vitesses des particules de fluide en des points homologues situés en amont et en aval du corps ont même module mais sont de sens différents. Comme dans l'équation de Bernoulli (94.4) ne figure que le carré de la vitesse v, la répartition des pressions en amont et en aval du corps est *exactement la même*. La pression exercée sur la face avant du corps est exactement compensée par la pression exercée sur sa face arrière et par suite la force de traînée est nulle.

Si le corps n'est pas symétrique, l'écoulement ne peut l'être et le raisonnement se complique, mais comme il n'y a pas de perte d'énergie, l'écoulement permanent d'un fluide parfait jouit de la propriété suivante. Si à un instant quelconque on inverse le sens du mouvement de toutes les particules de fluide, elles se déplaceront le long des mêmes lignes de courant avec des vitesses de mêmes modules mais en sens opposé. Comme dans l'équation de Bernoulli la vitesse d'écoulement figure au carré, l'inversion du sens de l'écoulement ne modifiera pas la répartition des pressions dans le fluide. La force $\boldsymbol{F}$ que le fluide applique au corps conservera le même module, la même direction et le même sens. La force de traînée $\boldsymbol{F}_x$ ne devrait donc pas varier. Or l'expérience montre que la force $\boldsymbol{F}_x$ s'exerce toujours

dans le sens de l'écoulement *), et par suite en inversant le sens de l'écoulement, le sens de $\boldsymbol{F}_x$ doit s'inverser. Il s'ensuit directement que $\boldsymbol{F}_x = 0$. Ces considérations ne conviennent pas pour la portance car il n'y a aucune raison d'affirmer qu'en inversant le sens de l'écoulement on inverse le sens de la force de portance.

6. Dans tout ce qui précède, on supposait que l'écoulement était *continu*. Cependant les équations de l'hydrodynamique admettent l'existence d'écoulements permanents où la vitesse du fluide n'est pas continue. C'est Kirchhoff (1824-1887) qui le premier attira l'attention sur cette possibilité. Supposons que l'on attache au corps K

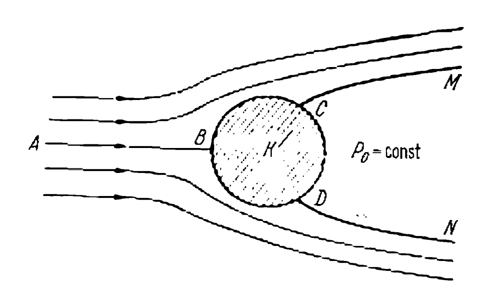


Fig. 266

une paroi élastique infiniment mince $MCDN$ (fig. 266). L'espace délimité par $MCDN$ est rempli par un fluide immobile sous une pression constante P_0. Le long de ce système s'écoule un fluide parfait incompressible. Dans un écoulement permanent du fluide la paroi $MCDN$ se comportera comme la surface extérieure d'un corps solide et une partie des lignes de courant se disposera le long de cette surface. La loi de variation de l'épaisseur des tubes de courant infiniment ténus se trouvant à proximité de la surface $MCDN$ sera telle que la vitesse du fluide y sera constante. En vertu de l'équation de Bernoulli la pression exercée par le fluide sur cette surface sera elle aussi constante. Si on enlève maintenant la paroi élastique $MCDN$ l'écoulement n'en sera pas modifié car la surface $MCDN$ restera une surface de pression normale constante et les forces tangentielles ne pourront se manifester, le fluide étant parfait. Nous arrivons ainsi au cas d'un écoulement permanent de fluide comportant une discontinuité tangentielle sur la surface $MCDN$ (voir problème au § 98). Cet écoulement se caractérise par le *décollement le long d'une ligne de l'écoulement par rapport au corps.* Il est évident

*) La théorie n'implique pas nécessairement ce résultat (voir remarque au bas de la page 520). La force $\boldsymbol{F}_x$ peut fort bien être orientée à l'encontre du courant mais cette possibilité n'est qu'une vue de l'esprit.

qu'on pourrait dénombrer un nombre infini d'écoulements de ce type, se distinguant les uns des autres par la position de la *ligne de décollement CD* et la forme de la surface de discontinuité tangentielle *MCDN*. Dans la zone où le fluide est au repos la pression P_0 est évidemment égale à la pression qui règne sur la ligne de décollement *CD*. Or cette pression est plus petite que la pression qui règne au point d'arrêt *B*, la résultante des forces de pression s'exerçant sur la face avant du corps est plus grande que celle qui s'exerce sur sa face arrière. C'est ainsi qu'apparaît une force de traînée F_x *).

7. Les discontinuités tangentielles sont hydrodynamiquement instables (voir problème au § 98) et les surfaces de discontinuité se résolvent en *tourbillons*. Néanmoins les écoulements discontinus parfaits s'accompagnant d'un décollement du corps contourné présentent un certain intérêt. On peut les considérer comme un cas limite des écoulements réels d'un fluide visqueux. Loin du corps immergé, les forces de viscosité étant faibles sont peu importantes. Elles ne se manifestent que dans une *couche limite* de faible épaisseur adjacente au corps immergé. Comme elles y sont grandes, elles déterminent le décollement de l'écoulement du corps contourné et à la place d'une zone de fluide au repos on voit apparaître une zone de forte turbulence. C'est l'existence de cette zone de turbulence qui est la cause de la traînée. Les forces de viscosité lèvent automatiquement l'indétermination sur la position de la ligne de décollement, cette indétermination étant caractéristique des écoulements discontinus de fluides parfaits. Plus la zone de décollement est étroite, plus la force de traînée est petite. Afin de réduire cette force on cherche à donner aux automobiles et autres véhicules rapides un « profil aérodynamique ».

§ 101. Application de la théorie dimensionnelle

1. Faisons abstraction pour l'instant de l'origine de la force $\boldsymbol{F}$ qu'exerce l'écoulement permanent d'un fluide incompressible sur un corps immobile et appliquons à ce problème la théorie dimensionnelle. La force $\boldsymbol{F}$ dépend du profil et des dimensions du corps, de son orientation par rapport à l'écoulement, de la vitesse d'écoulement v (« à l'infini ») et des propriétés du fluide. Un profil d'aile est généralement caractérisé par l'*angle d'attaque*, c'est-à-dire l'angle entre le plan de l'aile et la direction de vol. Nous n'avons d'ailleurs nul besoin d'introduire explicitement les paramètres caractéristiques d'une aile, car nous considérerons des corps qui présentent non seulement une similitude géométrique mais aussi une similitude de posi-

*) Si on inverse le sens d'écoulement, la force F_x ne doit varier ni en module ni en direction. Dans un écoulement inversé, la force F_x sera dirigée à l'encontre du courant, ce qui signifie que la « traînée » sera négative. C'est ce cas que nous avions en vue en affirmant qu'il était théoriquement possible dans la remarque au bas de la page 519.

tion. Les propriétés du fluide seront caractérisées par sa densité ρ et son coefficient de viscosité η. Il doit donc exister une relation fonctionnelle entre les quantités F, v, ρ, η, S, où S est l'aire caractéristique de la section droite du corps. La racine carrée de S : $l = \sqrt{S}$ est la dimension linéaire caractéristique du corps. Avec ces cinq quantités on peut former deux combinaisons sans dimension indépendantes. Ce peut être le nombre $\frac{F}{\rho v^2 S}$ et le nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = \frac{\rho l v}{\eta}$. Selon la règle des dimensions l'une de ces combinaisons est fonction de l'autre. On obtient ainsi

$$F = \frac{\rho v^2}{2} SC(\mathbf{Re}), \tag{101.1}$$

ou bien

$$F_x = \frac{\rho v^2}{2} SC_x(\mathbf{Re}), \tag{101.2}$$

$$F_y = \frac{\rho v^2}{2} SC_y(\mathbf{Re}). \tag{101.3}$$

Les coefficients sans dimension C_x (**Re**) et C_y (**Re**) sont dénommés respectivement *coefficient de traînée* et *coefficient de portance*. Ils dépendent tous deux du nombre de Reynolds, du profil du corps et de son orientation par rapport à l'écoulement. Comme leur calcul théorique est ardu, on les détermine par l'expérience.

2. Pour de grands nombres de Reynolds la force de traînée F_x est presque exclusivement déterminée par la différence de pression. Si le bord arrière du corps est effilé, le décollement de l'écoulement se produit toujours au même endroit, quelle que soit la vitesse. (Un exemple en est fourni par une plaque placée normalement à la direction de l'écoulement. Le décollement se produit aux bords de la plaque.) Dans ce cas le coefficient de traînée est presque constant et la force de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse v. On explique simplement ce résultat en considérant le modèle idéalisé d'un écoulement discontinu (cf. fig. 265). Si à toutes les vitesses le décollement se produit au même endroit, l'aire caractéristique S de la section droite est indépendante de la vitesse. D'autre part, selon la loi de Bernoulli, la différence de pression en amont et en aval du corps est égale à $^1/_2\rho v^2$. Il en résulte la formule (101.2) où le coefficient C_x est constant. Aux vitesses proches ou supérieures à la célérité du son les valeurs des coefficients C_x et C_y dépendent non seulement du nombre de Reynolds **Re**, mais encore du nombre de Mach **M**.

3. Considérons maintenant le cas où le nombre de Reynolds est petit et où c'est la force de traînée F_x qui présente le plus d'intérêt. Ni l'inertie, ni la densité du fluide ne sont alors importantes et la force F_x est surtout due à la viscosité du fluide. Par suite, la densité ρ s'élimine de la formule (101.2). Or cela ne peut avoir lieu que si et seulement si le coefficient de traînée est inversement proportion-

nel au nombre de Reynolds:

$$C_x = \frac{A}{\mathbf{Re}},$$

où A est une constante sans dimension. En y substituant l'expression de **Re** nous obtenons

$$F_x = A\eta l v. \qquad (101.4)$$

Cette formule n'est vérifiée que pour $\mathbf{Re} \ll 1$, puisqu'elle correspond au cas où l'influence de l'inertie du fluide est négligeable comparée à celle de la viscosité. La valeur du coefficient A dépend du profil du corps et de son orientation par rapport à l'écoulement et son calcul est laborieux, car il nécessite l'intégration des équations de mouvement d'un fluide visqueux. Le cas le plus simple est celui de la sphère. Stokes (1819-1903) a montré que dans ce cas $A = 6\pi$ si on adopte pour dimension caractéristique l le rayon a de la sphère. On obtient ainsi la *formule de Stokes*:

$$F_x = 6\pi\eta a v. \qquad (101.5)$$

Etant donné que cette formule trouve de nombreuses applications en physique expérimentale (détermination de la charge de l'électron par la méthode de Millikan, mouvement brownien, etc.) il est utile de préciser ses limites de validité dans quelques cas concrets.

Au cours de ses expériences sur la mesure de la charge de l'électron, Millikan (1868-1953) appliqua la formule de Stokes (101.5) à des gouttelettes d'huile tombant dans l'air sous l'action de la pesanteur. En désignant par m la masse des gouttelettes, pendant la chute uniforme leur poids mg doit être compensé par la force de viscosité $6\pi\eta a v$, c'est-à-dire $mg = 6\pi\eta a v$ (en négligeant la force d'Archimède). Si la densité de l'huile est ρ_0, la masse de la gouttelette est $m = \frac{4\pi}{3} a^3\rho_0$. En substituant cette valeur on trouve d'abord la vitesse de chute v, puis le nombre de Reynolds

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho a v}{\eta} = \frac{2}{9}\,\frac{a^3\rho\rho_0 g}{\eta^2},$$

où ρ est la densité de l'air. La condition d'applicabilité de la formule de Stokes $\mathbf{Re} \ll 1$ conduit à

$$a^3 \ll \frac{9}{2}\,\frac{\eta^2}{\rho\rho_0 g}.$$

Avec $\eta = 1{,}8\cdot 10^{-4}$ g/(s·cm), $\rho = 1{,}29\cdot 10^{-3}$ g/cm³, $\rho_0 = 0{,}9$ g/cm³, on constate que la formule de Stokes n'est vérifiée que si $a \ll 0{,}05$ mm. Cette formule s'applique donc aux très fines gouttelettes de brouillard, mais certainement pas aux gouttes de pluie.

Un autre exemple est celui des gouttes de mercure tombant en chute libre dans un liquide. En mesurant la vitesse de chute des gouttes, on peut calculer la viscosité du liquide, ce qui constitue une méthode de mesure de la viscosité. Dans ce cas on doit tenir compte de la force d'Archimède. En désignant par ρ_0 la densité du mercure, par ρ et η la densité et la viscosité du liquide étudié, la formule de Stokes ne sera vérifiée que si

$$a^3 \ll \frac{9}{2}\,\frac{\eta^2}{(\rho_0-\rho)\,\rho g}.$$

Pour l'eau $\eta = 0{,}010$ g/(s·cm) et par suite $a \ll 0{,}15$ mm.

§ 102. Ecoulements tourbillonnaires et à potentiel des vitesses

1. Tous les écoulements de fluides se subdivisent en *écoulements à potentiel des vitesses* et en *écoulements tourbillonnaires*. Considérons le champ *des vitesses* v (r) d'un fluide à un instant donné. Traçons dans le fluide un contour fermé C et fixons un sens positif de circulation le long de ce contour (fig. 267). Soient τ le vecteur unitaire de la tangente et ds un élément de longueur du contour dirigés dans le sens positif. L'intégrale

$$\Gamma = \oint_C v_\tau \, ds = \oint_C (v \, ds) \qquad (102.1)$$

est dénommée *circulation du vecteur vitesse* le long du contour C. Si la circulation de la vitesse sur tout contour fermé est nulle, on dit que l'écoulement du fluide est à potentiel des vitesses ou irrotationnel. Dans le cas contraire l'écoulement est dit *tourbillonnaire*.

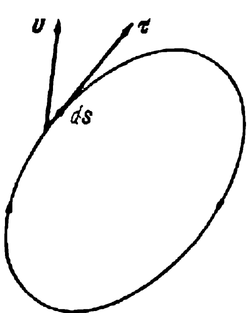


Fig. 267

Ces définitions supposent que le domaine de l'espace où se produit l'écoulement est *simplement connexe*, ce qui signifie que tout contour fermé de ce domaine peut être réduit par déformation continue à un point sans intercepter aucun corps immergé. Si le domaine n'est pas simplement connexe (par exemple un fluide contournant un corps en forme de tore) les définitions que nous venons de donner doivent être complétées par les remarques suivantes. On ne doit choisir que des contours fermés C pouvant être réduits à un point par leur déformation continue sans sortir des frontières du fluide. Un cas important est celui de *l'écoulement* dit *plan*, qui est une idéalisation des écoulements réels. Supposons que le corps immergé soit un cylindre infiniment long de section droite arbitraire et que la direction de l'écoulement soit normale à l'axe de ce cylindre. Dans ces conditions il suffit de considérer l'écoulement dans un des plans perpendiculaires à l'axe du cylindre. C'est l'écoulement dans un tel plan que l'on dénomme écoulement plan. Il sera à potentiel des vitesses si la circulation de la vitesse est nulle le long de tout contour fermé *n'embrassant pas le cylindre contourné*, par exemple le long du contour C_1 (fig. 268). La circulation le long du contour C embrassant le cylindre ne peut être nulle. On démontre aisément que si l'écoulement est irrotationnel, la circulation Γ aura la même valeur pour tous les contours fermés entourant une seule fois le cylindre. Dans le cas où $\Gamma \neq 0$, on dit que *l'écoulement à potentiel des vitesses est à circulation.*

2. La définition de l'écoulement à potentiel des vitesses est parfaitement analogue à celle des forces conservatives (cf. § 24). Par

suite, pour tout écoulement irrotationnel, l'intégrale linéaire $\int\limits_{AB} (v\, ds)$ prise le long d'une courbe non fermée passant par les points A et B ne dépend que des positions des points extrêmes A et B de la courbe AB sans être affectée par sa forme. En raisonnant comme nous l'avons fait pour l'énergie potentielle, on arrive à la conclusion qu'on peut introduire une fonction des coordonnées φ permettant de définir v par la formule

$$v = \text{grad}\ \varphi \tag{102.2}$$

(cf. § 29). La fonction φ est dite *potentiel des vitesses*.

Un exemple d'écoulement à potentiel des vitesses est fourni par l'écoulement d'un fluide le long de droites parallèles avec une vitesse

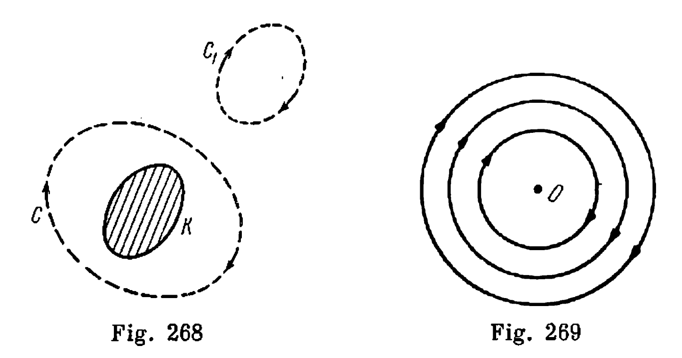


Fig. 268 Fig. 269

constante. On démontre que *l'écoulement d'un fluide parfait résultant de l'application de forces conservatives à un fluide initialement au repos est un écoulement à potentiel des vitesses.*

3. Comme exemple de tourbillon nous prendrons un écoulement plan d'un fluide dont les particules sont animées d'un mouvement de rotation sur des cercles concentriques avec la même vitesse angulaire ω (fig. 269). La circulation de la vitesse sur un cercle de rayon r est alors égale à $\Gamma = 2\pi r v = 2\pi r^2 \omega$. Le rapport de Γ à l'aire πr^2 du contour $\frac{\Gamma}{\pi r^2} = 2\omega$ est donc indépendant du rayon r. Dans le cas où la vitesse de rotation dépend du rayon r on prendra à la place du rapport $\Gamma/(\pi r^2)$ la limite de ce rapport pour $r \to 0$. Il est clair que cette limite est égale au double de la vitesse angulaire que possèdent les particules de fluide à proximité immédiate de l'axe O. Cette limite est le *tourbillon* ou le *rotor* de la vitesse v, ou plus exactement, la projection du rotor sur une direction normale au plan du contour. D'une manière générale, pour un mouvement arbitraire du fluide, le rotor de la vitesse v est défini par ses projections sur une direction arbitraire et ce, de la façon suivante. On prend un contour arbitraire

d'aire infinitésimale ΔS. Soit $\boldsymbol{n}$ sa normale extérieure. La projection du vecteur rot v sur la direction de la normale $\boldsymbol{n}$ est:

$$\mathrm{rot}_n\, v = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Gamma}{\Delta S}, \qquad (102.3)$$

où Γ est la circulation du vecteur v le long du contour considéré.

4. Considérons un autre exemple, celui d'un écoulement plan parallèle à l'axe X et tel que la vitesse varie le long d'une direction rectangulaire à l'axe X selon la loi linéaire $v_x = ay$ (fig. 270). Pour démontrer que l'écoulement est tourbillonnaire, considérons le contour rectangulaire $ABCD$ dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. La circulation de la vitesse le long de ce contour est

$$\Gamma = (x_2 - x_1)(v_1 - v_2) = \\ = -a(x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Le rapport de Γ à l'aire du contour $\Delta S = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$, ou, ce qui revient au même, le rotor de la vitesse v est

$$\mathrm{rot}_z\, v = -a,$$

ou bien

$$\mathrm{rot}_z\, v = -\frac{\partial v_x}{\partial y}. \qquad (102.4)$$

Fig. 270

Si v_x varie avec y non pas selon la loi linéaire mais de façon arbitraire, la formule (102.4) reste valable, mais $\mathrm{rot}_z v$ est alors une fonction de y.

Notons que dans le cas considéré la vitesse v peut être représentée sous forme d'une somme vectorielle de deux vecteurs v_1 et v_2 dont les composantes sont:

$$v_{1x} = \frac{v_x}{2} = \frac{a}{2}y, \quad v_{2x} = \frac{v_x}{2} = \frac{a}{2}y,$$

$$v_{1y} = -\frac{a}{2}x, \quad v_{2y} = \frac{a}{2}x.$$

Le vecteur $\boldsymbol{v}_1$ est représenté par le produit vectoriel

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{a}{2}[\boldsymbol{kr}] = \frac{a}{2}y\boldsymbol{i} - \frac{a}{2}x\boldsymbol{j}.$$

Cela permet de traiter l'écoulement à la vitesse v_1 comme une rotation autour de l'axe Z avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = -\frac{a}{2}\boldsymbol{k}$. Les composantes du vecteur v_2 se déduisent du potentiel des vitesses $\varphi = \frac{a}{2}xy$ à l'aide des formules

$$v_{2x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_{2y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Il s'ensuit que l'écoulement de vitesse v_2 est un écoulement à potentiel des vitesses. On peut montrer sous une forme générale que n'importe quel écoulement de fluide peut être décomposé en un *écoulement de rotation* et un *écoulement à potentiel des vitesses*, la vitesse angulaire pouvant changer en module et en sens sans discontinuer d'un point de l'espace à l'autre.

La discontinuité tangentielle peut être considérée comme un exemple d'écoulement tourbillonnaire. Pour s'en rendre compte il suffit de reprendre le raisonnement utilisé dans le deuxième exemple ci-dessus. La décomposition de la discontinuité tangentielle conduit à l'apparition d'un écoulement turbulent à tourbillons.

§ 103. Couche limite et effet de décollement

1. Pour un grand nombre de Reynolds, les forces de viscosité n'interviennent que faiblement à grande distance du corps autour duquel s'effectue l'écoulement. Elles sont suffisamment petites par rapport aux forces dues aux différences de pression pour pouvoir les négliger et considérer le fluide comme parfait. Il n'en est pas de même à proximité de la surface du corps. Les forces de frottement visqueux provoquent *l'adhésion du fluide* à la surface du corps contourné, ce qui se traduit par le fait que les particules de fluide s'y trouvent au repos, malgré l'existence d'un gradient de pression dirigé dans le sens de l'écoulement. Il s'ensuit qu'à proximité de la surface du corps immergé, les forces de frottement visqueux sont *comparables* aux forces dues aux différences de pression. Or cela implique que la vitesse d'écoulement doit augmenter rapidement à mesure que l'on s'éloigne de la surface du corps. Cette croissance rapide de la vitesse se produit dans une mince couche superficielle, dite *couche limite*. La théorie de la couche limite fut élaborée pour l'essentiel par L. Prandtl. Nous nous contenterons de donner une idée qualitative des conclusions auxquelles aboutit cette théorie.

2. L'épaisseur δ de la couche limite est une notion imparfaitement définie car la frontière extérieure de la couche limite est floue. L'épaisseur de la couche limite dépend non seulement des propriétés du fluide, mais aussi du profil du corps. Elle n'est pas constante le long du corps, augmentant du bord d'attaque au bord arrière du profil. On ne peut donc donner une expression exacte de l'épaisseur de la couche limite et il ne peut s'agir que d'estimations de cette épaisseur. Or l'estimation est facile à faire en remarquant qu'à l'intérieur de la couche limite les forces de viscosité sont comparables aux forces dues aux différences de pression. Evaluons d'abord la force de frottement visqueux f_{fr} s'exerçant sur l'unité de volume de fluide dans la couche limite. Le gradient de la vitesse du fluide à l'intérieur de la couche limite dans la direction transversale à celle de l'écoulement est de l'ordre de v/δ. La force de viscosité s'exerçant sur une aire S

de la couche limite est de l'ordre de $\eta\, Sv/\delta$ et la force s'exerçant dans l'unité de volume est

$$f_{\text{fr}} \sim \frac{\eta Sv/\delta}{S\delta} = \eta \frac{v}{\delta^2}.$$

Evaluons maintenant la force due à la différence de pression f_{pr} que nous rapporterons aussi à l'unité de volume de fluide. Elle est égale à $f_{\text{pr}} = -\text{grad}\, P$ (cf. § 90). Les variations de pression suivant une direction transversale à la couche limite sont petites et ne jouent aucun rôle dans notre étude, car ce n'est que le gradient de pression *longitudinal* qui importe. Pour l'évaluer nous devons considérer l'écoulement de fluide extérieur à la couche limite. Cet écoulement est régi par l'équation de Bernoulli $P = P_0 - \frac{1}{2}\rho v^2$, d'où on tire $\text{grad}\, P = -(\rho/2)\, \text{grad}\, v^2$. Il en résulte que la force $f_{\text{pr}} \sim \sim \rho v^2/l$, l étant la dimension linéaire caractéristique du corps contourné. En égalant f_{fr} et f_{pr} on trouve après des transformations arithmétiques élémentaires:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta l}{\rho v}}, \tag{103.1}$$

soit

$$\delta \sim \frac{l}{\sqrt{\mathbf{Re}}}. \tag{103.2}$$

Par exemple, pour une sphère de diamètre $D = 10$ cm placée dans un courant d'air de vitesse $v = 30$ m/s, le nombre de Reynolds est $\mathbf{Re} = vD/\nu = 2\cdot 10^5$ (la viscosité cinématique de l'air à 20 °C est $\nu = 0{,}15$ cm²/s) et l'épaisseur de la couche limite $\delta \approx D/\sqrt{\mathbf{Re}} \approx \approx 0{,}2$ mm.

3. Pour un nombre de Reynolds petit, de l'ordre de l'unité et au-dessous, on ne peut plus utiliser le raisonnement qui avait été utilisé pour établir la formule (103.2). Néanmoins la mise en œuvre de cette formule conduit à un résultat qualitativement correct, selon lequel l'épaisseur de la couche limite serait de l'ordre des dimensions du corps immergé. Il n'y a donc plus de raison d'utiliser la notion de couche limite. Cette notion est tout aussi inutile dans le cas d'un écoulement permanent laminaire dans un tuyau, car les forces de viscosité sont alors compensées par les gradients de pression non seulement à proximité des parois du tuyau, mais également dans *tout le volume de fluide*. En effet, d'après les formules (97.2) et (97.3), la vitesse du fluide s'écoulant à travers un tuyau de section circulaire est

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

N'étant pas fonction de la viscosité du fluide le profil de la vitesse ne dépend pas du nombre de Reynolds. Si on voulait utiliser dans ce

cas la notion de couche limite, on serait amené à dire que la couche limite occupe tout le tuyau et ce, quel que soit le nombre de Reynolds. Or cette notion n'a alors aucun sens. Dans ce qui suit il ne s'agira que d'écoulement de fluide contournant le corps, le nombre de Reynolds étant grand.

4. Comme à l'intérieur de la couche limite la vitesse varie suivant sa largeur, l'écoulement du fluide y est tourbillonnaire. Or tout écoulement tourbillonnaire comporte une rotation à laquelle est associé un moment cinétique (cf. § 102, point 4).

5. S'il ne se produisait pas un décollement de la couche limite due à l'action des forces de viscosité, l'étude de l'écoulement aurait pu être faite en supposant le fluide parfait. L'influence de la couche limite se réduirait alors à un simple accroissement des dimensions efficaces du corps. C'est ainsi que se comporte la couche limite sur le bord d'attaque du corps situé face à l'écoulement de fluide. Mais sur le bord arrière, la couche limite *se décolle* généralement de la surface du corps; si on admet dans ces conditions que les forces de viscosité sont négligeables, on aboutit à des résultats en contradiction avec la réalité. Le décollement de la couche limite modifie qualitativement l'allure de l'écoulement autour du corps immergé.

Voyons quelles sont les causes du décollement de la couche limite et quelles en sont les conséquences. Sous l'action des forces de viscosité les particules de fluide se meuvent plus lentement dans la couche limite que dans l'écoulement extérieur. Dans ce dernier existe une différence de pression déterminant l'accélération ou le ralentissement de l'écoulement. La même différence de pression doit exister dans la couche limite puisque la différence de pression entre les frontières de la couche est négligeable (s'il n'en était pas ainsi les particules de fluide dans la couche limite auraient été accélérées dans une direction normale à la surface du corps). Dans l'écoulement extérieur attaquant le bord avant du corps, la pression diminue dans le sens de l'écoulement. La même chose doit se produire dans la couche limite. La force due à la différence de pression est dirigée dans le sens de l'écoulement. Par suite les particules de fluide sont accélérées aussi bien dans l'écoulement extérieur que dans la couche limite; les particules y poursuivent donc leur mouvement le long du profil malgré l'apparition des forces de frottement. Dans la partie de l'écoulement contournant le bord arrière du corps, la pression augmente dans le sens de l'écoulement. La vitesse diminue aussi bien dans le courant extérieur que dans la couche limite. Comme dans la couche limite la vitesse des particules de fluide est plus petite que dans l'écoulement extérieur, le ralentissement de ce dernier peut conduire à une immobilisation ou même à un mouvement rétrograde des particules dans la couche limite. Aussi apparaît à proximité de la surface du bord arrière du corps un *écoulement rétrograde* du fluide, bien que l'écoulement extérieur continue son mouvement

vers l'avant. De nouvelles masses de fluide parvenues au lieu où le fluide rétrograde s'arrêtent puis rétrogradent elles aussi. (Notons que si l'écoulement extérieur n'est pas suffisamment freiné, le mouvement rétrograde de la couche limite ne se produit pas.) La quantité de fluide freiné se trouvant entre la surface du corps et le courant extérieur augmente rapidement, l'écoulement rétrograde s'élargit et repousse finalement de la surface du corps le courant extérieur. On dit qu'il se produit un décollement de l'écoulement. La surface de discontinuité ainsi créée, étant instable, se résout en tourbillon. Une partie de fluide immobilisé est entraînée par le tourbillon lui-même emporté par l'écoulement.

6. Ces différentes étapes de formation du tourbillon sont illustrées par la figure 271, *a*, *b*, *c* représentant six photographies consécutives d'un écoulement d'eau autour d'un cylindre immobile immergé *). Pour rendre visibles les lignes de courant on a répandu sur la surface de l'eau de la poudre d'aluminium. Au premier instant se formait autour du cylindre un écoulement à potentiel des vitesses dont les lignes de courant divergeaient en amont du cylindre et convergeaient en aval. Les autres photographies montrent les changements ultérieurs de l'écoulement. Les trois dernières photos montrent la formation de deux tourbillons près du bord arrière du cylindre, qui se détachent l'un après l'autre du cylindre avant d'être emportés par l'écoulement. Les tourbillons détachés sont remplacés par d'autres qui se forment alternativement dans chacun des écoulements se décollant successivement des parties inférieure et supérieure du cylindre. Tous ces tourbillons se détachent du corps à la même cadence. Un tel système de tourbillons porte le nom de *sillage de Karman* (1881-1963) et est représenté sur les figures 272 et 273. La figure 272 représente un aspect de l'écoulement dans un référentiel où le cylindre est au repos et l'eau s'écoule de gauche à droite; la figure 273 se rapporte à un référentiel dans lequel c'est l'eau non perturbée qui est immobile et le cylindre se déplace de droite à gauche. La vitesse d'écoulement des tourbillons est plus petite que la vitesse d'écoulement de l'eau, puisque les tourbillons rassemblent les particules d'eau qui avaient été freinées par le corps. L'impulsion qu'emporte l'écoulement contenant les tourbillons est plus petite que l'impulsion qu'apporte l'écoulement venant frapper le corps. La diminution de l'impulsion de l'écoulement de fluide se retrouve dans l'apparition d'une force de traînée appliquée au corps dans le sens de l'écoulement.

7. Les considérations ci-dessus montrent que la notion de couche limite ne peut être utilisée que sur la partie avant du corps s'éten-

---

*) Les photographies représentées sur les figures 271, 272, 273, 279, 280 et 281 ont été empruntées à l'ouvrage de *L. Prandtl*, *O. Tietjens*, *Hydro- und Aeromechanik*, Berlin, Verlag von Julius S. Springer, zweiter Band, 1931. Sur la figure 271 l'écoulement est dirigé de gauche à droite.

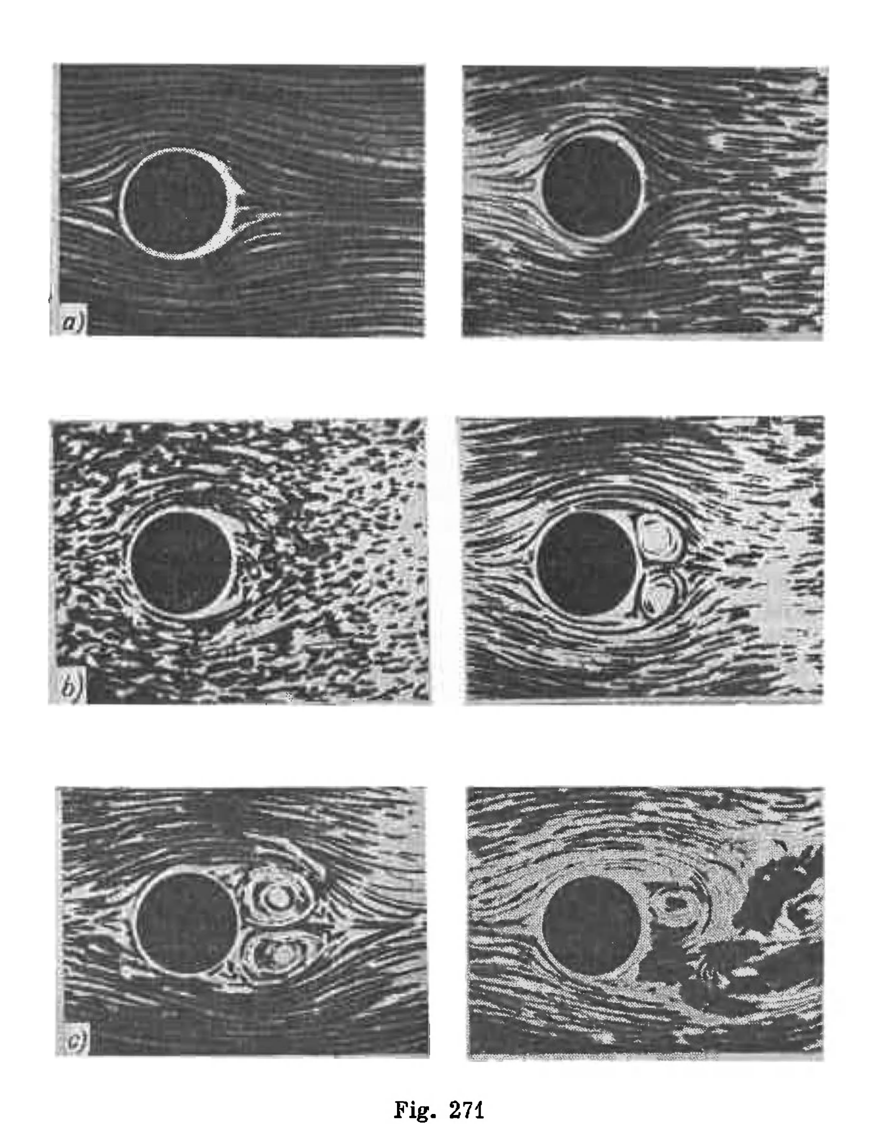


Fig. 271

dant jusqu'au point de décollement de l'écoulement (*ligne de décollement*). A partir de la ligne de décollement apparaît une zone d'écoulement particulier dont la longueur est plus grande que la dimension linéaire caractéristique du corps (fig. 274). Comme cette zone

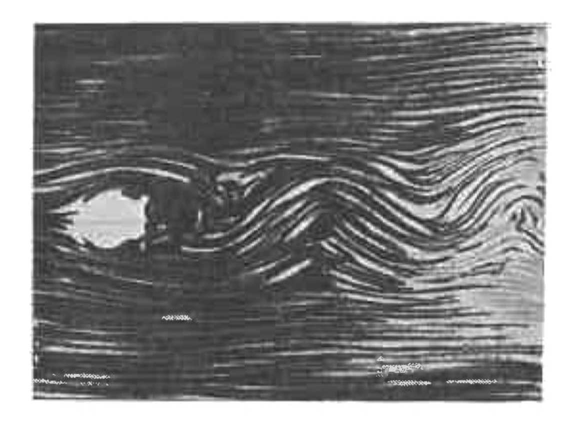


Fig. 272

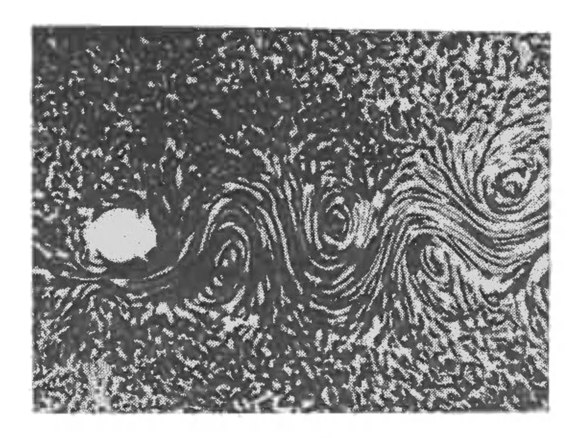


Fig. 273

renferme les particules provenant de la couche limite, la vitesse moyenne d'écoulement y est plus petite que dans l'écoulement amont et le régime est turbulent. Cette zone est dénommée *sillage*. C'est l'existence du sillage qui détermine la partie de la force de traînée due à la différence de pression sur les bords avant et arrière du corps. Plus l'étendue du décollement est importante, plus le sillage est

large et plus la traînée est grande, toutes choses égales d'ailleurs. Nous verrons au paragraphe suivant que c'est l'existence du sillage qui explique l'apparition de la force de portance.

8. Tant que le nombre de Reynolds n'est pas trop grand, l'écoulement dans la couche limite est laminaire. Lorsque le nombre de Reynolds croît l'écoulement laminaire devient instable et une turbulence apparaît dans la couche limite. Cette turbulence prend naissance dans la partie arrière de la couche limite adjacente à la ligne de décollement et de là se propage vers le bord avant de la couche limite. Ainsi, la partie avant de la couche limite est laminaire, puis vient

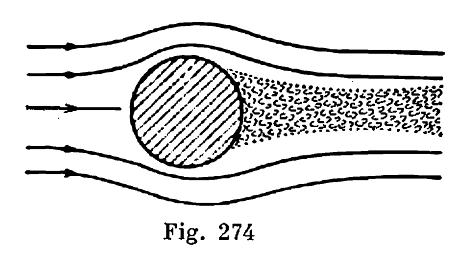


Fig. 274

un écoulement turbulent suivi après la ligne de décollement du sillage. Dans une sphère le régime turbulent apparaît pour un nombre de Reynolds $\sim 3 \cdot 10^5$. L'apparition de la turbulence dans la couche limite a pour effet de déplacer vers l'arrière la ligne de décollement et par suite de rétrécir le sillage. Le coefficient de traînée C_x et donc la force de traînée F_x s'en trouvent diminués. Cet effet porte le nom de *crise de traînée*. Celle-ci ne se manifeste pas si l'accroissement de la vitesse d'écoulement ne s'accompagne pas d'un déplacement de la ligne de décollement. Dans ce dernier cas le coefficient de traînée C_x ne dépend plus du nombre de Reynolds. C'est ce qui se produit pour une plaque à bords effilés placée perpendiculairement par rapport à l'écoulement. La position de la ligne de décollement y est déterminée par des considérations purement géométriques et coïncide avec les bords de la plaque.

§ 104. Portance d'une aile d'avion

1. L'effet de décollement est lié à l'apparition de la force de portance. Nous nous attacherons à l'étude de la force de portance s'exerçant sur une aile d'avion, bien que le mécanisme d'apparition de cette force soit le même quelle que soit la forme du corps. Lorsqu'un avion vole à vitesse constante, son orientation dans l'espace reste invariable. Cela témoigne de ce que dans ces conditions de vol, les moments de toutes les forces extérieures appliquées à l'avion se compensent mutuellement et que son moment cinétique est constant.

Pour simplifier nous considérerons une aile isolée en mouvement uniforme dans l'air perpendiculairement au plan de la figure (fig. 275). Nous supposerons que la longueur de l'aile est infinie; l'aile s'appelle alors *aile d'envergure infinie*. Par commodité, nous utiliserons un trièdre de référence lié à l'aile en plaçant l'origine des coordonnées, par exemple, au centre de masse C de l'aile. Il est évident que c'est là un référentiel d'inertie. Cela revient à supposer que l'aile est immobile et que l'écoulement de l'air est plan. L'écoulement non perturbé est naturellement uniforme. Pour éviter toute

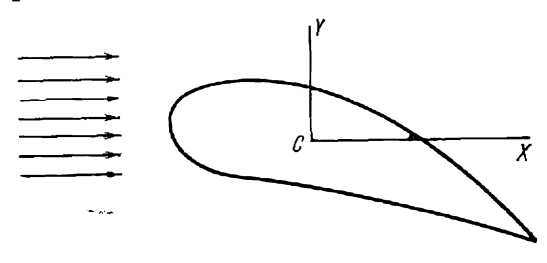


Fig. 275

confusion nous rapporterons tous les moments cinétiques dont il sera question ci-dessous au centre de masse C. Le moment cinétique de l'aile elle-même est nul et on n'en parlera donc plus.

2. Pour qu'apparaisse une force de portance, il faut que l'aile soit de forme asymétrique ou qu'elle soit disposée de manière asymétrique par rapport au plan horizontal dans lequel elle se déplace. Aucune portance n'apparaît si on met en mouvement un cylindre à base circulaire non animé d'un mouvement de rotation autour de son axe. On en conclut que la symétrie requise fait défaut. Rappelons que dans la couche limite les vitesses des particules d'air croissent à mesure que l'on s'éloigne de la surface de l'aile. De ce fait l'écoulement y est tourbillonnaire et comporte donc une rotation. Sur la partie supérieure de l'aile (extrados) la rotation s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre et sur sa partie inférieure (intrados) dans le sens contraire (si l'écoulement de fluide progresse de gauche à droite). Supposons que par suite du décollement une certaine masse d'air qui se trouvait sur l'intrados soit emportée par l'écoulement principal sous forme d'un ou de plusieurs tourbillons. Comme cette masse est en rotation, elle entraîne le moment cinétique qui y est lié. Cependant le moment cinétique total de l'air ne peut être modifié. Si la couche limite sur l'extrados ne s'est pas décollée, la conservation du moment cinétique exige que l'air de l'écoulement extérieur se mette à tourner autour de l'aile dans le sens des aiguilles d'une montre. Cela signifie qu'une circulation de la vitesse de l'air ambiant doit s'établir autour de l'aile dans le sens des

aiguilles d'une montre et cette circulation viendra se superposer à l'écoulement principal. La vitesse d'écoulement doit donc diminuer sous l'aile et augmenter au-dessus de celle-ci. On peut appliquer l'équation de Bernoulli à l'écoulement extérieur : on constate alors que du fait de la circulation la pression augmente sous l'aile et diminue au-dessus de celle-ci. La différence de pression qui en résulte donne naissance à une force de portance dirigée suivant la verticale ascendante. Par contre si les tourbillons libres ont été formés par les

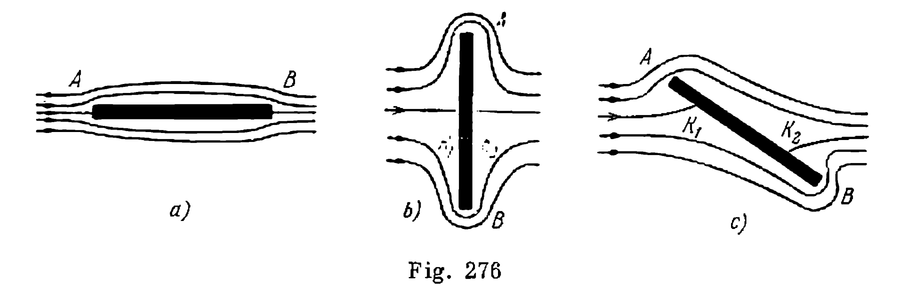


Fig. 276

particules de fluide de la couche limite de l'extrados, il apparaîtra une circulation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et la force de «portance » sera dirigée vers le bas.

3. Pour mieux saisir la nature de l'effet, on considérera une plaque mince plongeant dans l'écoulement d'un fluide parfait. Si la plaque est orientée le long de l'écoulement, les points critiques où la vitesse du fluide doit s'annuler se trouveront sur les bords A et B de la plaque (fig. 276, *a*). Si le plan de la plaque est normal à l'écoulement les deux points critiques sont confondus au centre de la plaque et la vitesse atteint son maximum aux bords de la plaque A et B (fig. 276, *b*). Si le plan de la plaque est incliné par rapport à la direction de l'écoulement (fig. 276, *c*), les points critiques K_1 et K_2 se trouvent dans une position intermédiaire entre le centre et les bords de la plaque. La vitesse d'écoulement est maximale près des bords de la plaque. A proximité du point critique K_2 elle est plus grande au-dessous de ce point et plus petite au-dessus, car l'écoulement inférieur est plus près du bord B de la plaque que l'écoulement supérieur du bord A. On observe un comportement analogue dans le cas de l'écoulement d'un fluide visqueux.

4. La même chose se produit avec une aile d'avion ; au début du mouvement l'écoulement sous l'aile contourne son bord de fuite et rencontre le long de la ligne KD l'écoulement contournant l'extrados de l'aile. Le long de cette ligne apparaît une surface de séparation qui engendre ensuite un tourbillon libre dont le sens de rotation est contraire à celui des aiguilles d'une montre (fig. 277, *a* et *b*). Ces différentes étapes apparaissent nettement sur les photographies des

figures 279, 280 et 281 ; les deux premières photos ont été prises dans un référentiel par rapport auquel l'aile est immobile et la troisième dans un référentiel par rapport auquel c'est le fluide non perturbé qui est immobile. Les tourbillons libres emportent un certain moment cinétique et autour de l'aile s'établit une circulation dans

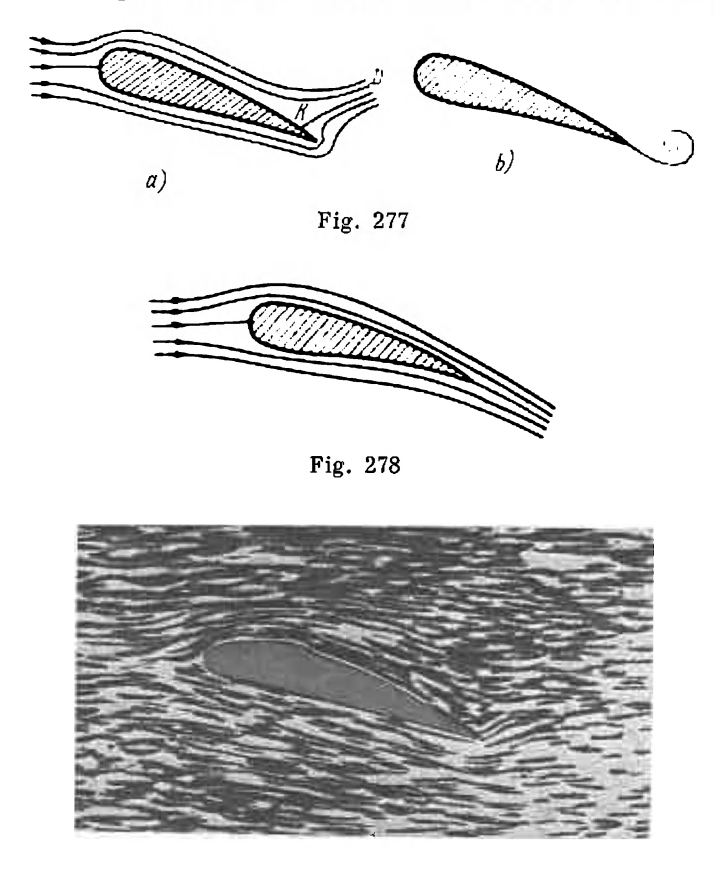


Fig. 277

Fig. 278

Fig. 279

le sens des aiguilles d'une montre. L'accroissement de la vitesse d'écoulement au-dessus de l'aile et sa diminution au-dessous de l'aile provoquent un déplacement de la ligne de décollement vers le bord de fuite de l'aile (fig. 278). S'il n'y avait pas de forces de viscosité, il ne se formerait plus de tourbillons libres et la circulation de l'air autour de l'aile cesserait. Grâce à l'existence des forces de viscosité, la circulation autour de l'aile diminue progressivement, la ligne de décollement remonte et rétablit les conditions de formation

des tourbillons. Ceux-ci intensifient de nouveau la circulation et remènent la ligne de décollement au bord de fuite. Lorsque la vitesse de l'avion est uniforme, ce processus est régulier, les tourbillons libres s'échappent périodiquement du bord de fuite de l'aile et entretiennent ainsi une circulation pratiquement constante.

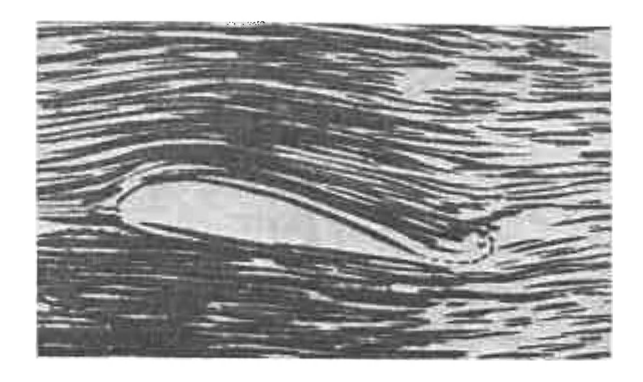


Fig. 280

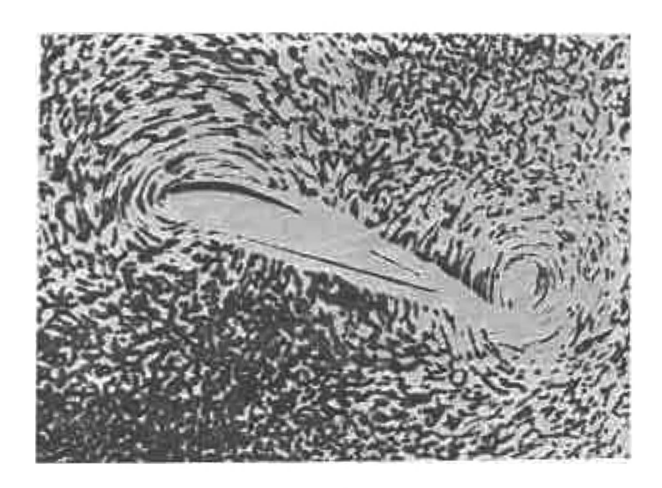


Fig. 281

5. La variation du module de la portance en fonction de la circulation de la vitesse fut démontrée indépendamment par N. E. Joukovski et par Kutta. Leur formule concerne une aile d'envergure infinie et donne la valeur de la portance par unité de longueur de cette aile. La formule avait été établie en supposant que l'aile est

animée d'un mouvement uniforme au sein d'un fluide parfait et qu'autour de l'aile la circulation de la vitesse est constante. Dans un référentiel par rapport auquel l'aile est immobile l'écoulement est donc à potentiel des vitesses et avec circulation. Dans un fluide parfait la circulation peut avoir une valeur arbitraire indépendante de la vitesse d'écoulement, de l'angle d'attaque et des autres paramètres. Toutefois une viscosité, même très petite, conduit à une dépendance univoque de la valeur de la circulation par rapport à ces paramètres.

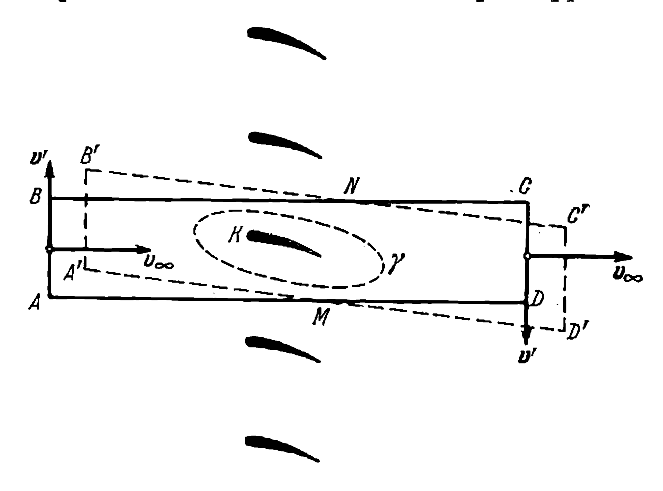


Fig. 282

mètres. Comme la circulation elle-même est indépendante de la viscosité du fluide, la formule de Joukovski-Kutta constitue une bonne approximation pour le calcul de la portance d'une aile dans l'air qui est un fluide visqueux.

6. Nous allons donner maintenant une démonstration simple de la *formule de Joukovski-Kutta*, afin de bien mettre en évidence que la circulation est essentielle pour faire apparaître la force de portance. Supposons que l'écoulement s'étend de tous côtés jusqu'à l'infini. Nous supposerons encore que l'écoulement non perturbé est horizontal; orientons l'axe X le long de l'écoulement et l'axe Y suivant la verticale ascendante normale à l'écoulement. Plaçons l'aile K à l'origine des coordonnées (fig. 282). Disposons au-dessous et au-dessus de l'aile K un nombre infini d'ailes identiques à l'aile K en les plaçant à intervalles réguliers. Admettons qu'autour de toutes ces ailes s'établit la même circulation qu'autour de l'aile K. En régime établi l'écoulement de fluide sera alors rigoureusement périodique en y. Si la distance entre les ailes successives est grande par rapport à leurs dimensions transversales, la déformation de l'écoulement à proximité immédiate de l'aile K sera négligeable. On n'observera

des perturbations notables qu'à grande distance de l'aile K. Traçons un contour rectangulaire $ABCD$ dont les côtés horizontaux passent par le milieu de l'intervalle entre les ailes voisines. La longueur AD du contour est infiniment grande par rapport à sa hauteur. Sur les côtés latéraux AB et CD la vitesse v est constituée par la vitesse horizontale v_∞ de l'écoulement non perturbé et par la vitesse verticale v' déterminée par la circulation. Si nous prenons pour sens positif de la circulation le sens des aiguilles d'une montre, sur le côté AB la vitesse v' sera dirigée suivant la verticale ascendante (elle sera donc positive) et sur le côté CD elle sera dirigée suivant la verticale descendante (elle sera négative). Considérons le fluide contenu dans un parallélépipède rectangle de base $ABCD$ et de hauteur unitaire normale au plan de la figure. Au bout d'un temps dt le fluide qui était contenu dans ce parallélépipède se sera déplacé dans le volume $A'B'C'D'$. Calculons l'accroissement dI de sa quantité de mouvement. En régime permanent cet accroissement sera égal à la différence, à un même instant, entre la quantité de mouvement que possède le fluide dans la région de l'espace qu'il est venu occuper dans le temps dt et la quantité de mouvement que possédait le fluide dans la partie de l'espace qu'il quitta dans le même temps dt. Or comme le mouvement du fluide le long de l'axe Y est strictement périodique, les quantités de mouvement du fluide contenu dans les volumes $AA'M$ et $BB'N$ sont rigoureusement égales. De même sont égales les quantités de mouvement du fluide contenu dans les volumes MDD' et NCC'. Il s'ensuit que l'accroissement de la quantité de mouvement dI s'obtient en retranchant de la quantité de mouvement correspondant au volume $CC'D'D$ la quantité de mouvement correspondant au volume $AA'B'B$. Or chacun de ces volumes vaut $lv_\infty\, dt$, où l est la longueur du côté $AB = CD$; les vitesses horizontales v_∞ sont les mêmes dans ces deux volumes, tandis que les vitesses verticales v' sont de signes contraires. C'est donc la seule composante verticale de la quantité de mouvement qui subit un accroissement égal à

$$dI_y = -2lv_\infty \rho v'\, dt.$$

Or $2lv' = \Gamma$ est la circulation de la vitesse v' le long du contour $ABCD$; les côtés AD et BC n'y apportent aucune contribution puisque la vitesse v' y étant la même, dans la circulation suivant $ABCD$ elle intervient avec des signes opposés. La quantité Γ représente simultanément la circulation le long du contour $ABCD$ de la vitesse totale $v = v_\infty + v'$, puisque le terme constant v_∞ ne peut apporter aucune contribution à la circulation. Ainsi

$$dI_y = -\Gamma \rho v_\infty\, dt.$$

L'accroissement de la quantité de mouvement du fluide est égal à l'impulsion des forces extérieures qui lui sont appliquées. Parmi ces

forces on peut négliger les forces de pression appliquées à la surface $ABCD$ de la masse de fluide considérée, car leur résultante est nulle. La seule force qui subsiste est celle qu'exerce l'aile sur le fluide. Elle est égale et opposée à la portance F_y. En appliquant le théorème de l'impulsion de la force nous obtenons

$$F_y = \Gamma \rho v_\infty. \qquad (104.1)$$

Il est manifeste que Γ est ici la circulation le long du contour $ABCD$. Pour un écoulement à potentiel des vitesses on peut tracer le contour γ de manière arbitraire, à cela près qu'il entoure seulement l'aile K. Ayant tracé un contour γ arbitraire nous pouvons maintenant éloigner à l'infini toutes les autres ailes sans toucher au contour γ. Nous arrivons à la limite à une seule aile contournée par un courant de fluide. Dans ce cas limite le résultat (104.1) reste en vigueur, et c'est justement la formule de Joukovski-Kutta.

§ 105. L'effet Magnus

1. Si on place dans un écoulement d'air uniforme un cylindre circulaire immobile dont l'axe est perpendiculaire à l'écoulement, par raison de symétrie il n'apparaît qu'une force de traînée, mais aucune force de portance ne se manifeste dans ce cas. Mais si le cylindre est mis en rotation autour de son axe, on voit apparaître une force de portance qui est normale à l'écoulement extérieur; sous l'action de cette force le cylindre est repoussé de côté. Cet effet fut découvert par Magnus (1802-1870) et porte son nom. Supposons que le cylindre tourne autour de son axe avec une vitesse constante dans le sens des aiguilles d'une montre (fig. 283). Par effet de frottement l'air ambiant est mis en rotation et apparaît une couche limite; l'écoulement y est tourbillonnaire et comporte un écoulement à potentiel des vitesses auquel se superpose une rotation. Comme la vitesse de l'air diminue vers l'extérieur, la rotation dans la couche limite s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, donc en sens inverse à celui du cylindre. Pour un grand nombre de Reynolds, l'écoulement laminaire dans la couche limite devient instable et cède la place à un écoulement turbulent (voir § 99). Dans cet écoulement turbulent la rotation des particules d'air est surtout dirigée en sens inverse à celui du cylindre. Supposons maintenant que l'on dirige sur le cylindre en rotation un courant d'air allant de gauche à droite. Sur la partie supérieure du cylindre le sens de l'écoulement est le même que celui de la rotation du cylindre et sur sa par-

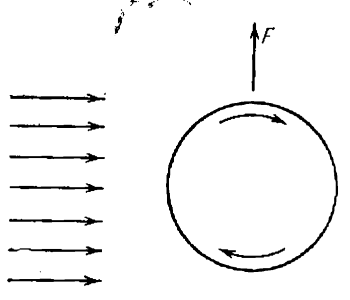


Fig. 283

tie inférieure ils sont de sens opposés. Les particules appartenant à la couche limite de la partie supérieure du cylindre étant accélérées par l'écoulement d'air, le décollement de la couche limite est rendu plus difficile. Dans la partie inférieure c'est l'inverse qui se produit et les particules d'air de la couche limite sont emportées par l'écoulement sous forme de tourbillons libres tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ainsi s'établit autour du cylindre une circulation de la vitesse dans le sens de rotation du cylindre. La circulation du vecteur vitesse s'accompagne de l'apparition d'une portance dirigée vers le haut. Si on inverse le sens de rotation du cylindre, la portance sera dirigée le long d'une verticale descendante. Il va de soi que pour un cylindre infiniment long la portance est donnée par la formule (104.1).

2. Pour la démonstration de l'effet Magnus on peut réaliser l'expérience suivante. On dispose un cylindre circulaire droit en position verticale sur un petit chariot placé sur des rails horizontaux. Le cylindre est mis en rotation à

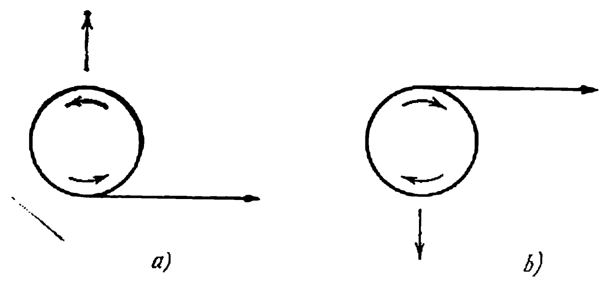


Fig. 284

l'aide d'un petit moteur électrique et on le soumet à un courant d'air. Si ce courant est perpendiculaire aux rails, le chariot se met en mouvement. Il en est de même si le courant d'air est oblique aux rails. On peut même obliger le chariot à se déplacer à l'encontre du vent sous un angle aigu. En inversant le sens de rotation du cylindre, le mouvement du chariot change de sens.

Voici une autre démonstration de l'effet Magnus. On enroule un ruban sur une bobine en carton, l'extrémité libre du ruban étant attachée à une canne. On place la bobine en position horizontale sur une table, puis en tirant sur la canne on met la bobine en rotation; la bobine acquiert aussitôt une vitesse horizontale et une force de portance qui soulève la bobine au-dessus de la table (fig. 284, *a*). Si on enroule le ruban comme indiqué sur la figure 284, *b*, le sens de la force de portance s'inversera et appliquera la bobine contre la table.

Un cylindre en papier, après avoir dévalé un plan incliné, tombe avec un mouvement de recul. Il en est de même d'une balle de tennis « coupée » qui vole en tournant. Ce sont des manifestations de l'effet Magnus.

3. Flettner suggéra l'idée d'utiliser l'effet Magnus pour la propulsion des navires par le vent en remplaçant les voiles par des cylindres verticaux animés d'un mouvement rapide de rotation. Il disposa sur les extrémités des cylindres des disques de diamètre plus grand pour diminuer l'aspiration de l'air dans la zone de moindre pression. Les expériences démontrèrent la fiabilité technique de navires à rotors, mais comme leur rendement économique s'avéra plus faible que celui des navires à moteurs usuels le projet fut abandonné.

INDEX DES MOMS

Archimède 10, 471, 472, 477
Aristote 64
Atwood 198

Bernoulli Daniel 485, 486, 491, 494, 504, 517, 518, 519, 521, 527, 534
Bessel 387
Boyle 449, 450, 465
Braguinski 391
Brahe Ticho 318

Cavendish 321
Clausius 144
Clément 489
Copernic 66, 67, 338, 366, 375
Coriolis 357, 364, 372, 377, 394
Coulomb 78, 103

D'Alembert 516, 517
Désormes 489
Dicke 389, 390

Einstein 9, 11, 23, 24, 98, 324, 391 à 397
Eötvös 387, 389
Euclide 17, 18
Euler 258 à 260, 470, 475

Flettner 540
Foucault 297, 299 à 301, 375, 378, 379
Froude 508 à 510

Galilée 10, 92 à 98, 225, 366, 387
Gauss 17

Hagen 503
Hamilton 166, 238
Heisenberg 41
Helmholtz 327
Hooke 74, 214, 400, 405 à 407, 415, 417
Huygens 10, 190, 192, 194, 220 à 222, 230, 263, 275

Jolly 322
Joukovsky 182 à 184, 186 à 188, 294, 359

Karman 529
Kepler 10, 318 à 321, 329, 339, 348, 350, 462
Kirchhoff 519
König 132, 204
Kutta 536, 539

Laplace 412, 450
Lavoisier 99
Lébédev 88
Le Chatelier 290
Leibniz 43
Lomonossov 99
Lorentz 94, 98, 138

Mach 395, 508
Magnus 539, 540
Mariotte 449, 450, 465
Maxwell 269
Mechtcherski 116
Mössbauer 398

Newton 9 à 13, 43, 63, 64, 71, 73, 75, 78 à 86, 91, 99, 108, 115, 129, 168, 169, 181, 208, 211, 217, 320,

321, 323, 330, 341, 348, 351, 352, 364, 380, 383, 386, 387, 449, 450, 452, 456, 486

Oberbeck 199

Panov 391
Pascal 463
Pauli 153
Pitot 490
Planck 41
Poinsot 311, 315
Poiseuille 501 à 505
Poisson 408, 417, 443
Prandtl 491, 526, 529
Pythagore 336

Reynolds 508 à 510, 512, 514, 515, 521, 522
Rutherford 338

Southerns 389
Sperry 302
Steiner 190, 192, 194, 263, 275
Stokes 522
Strouhal 508

Taylor 462
Thomson William 327
Tietjens 529
Torricelli 492
Tsiolkovski 117, 118, 131

Venturi 487
Verne Jules 295

Young 405 à 407, 417, 448 à 450, 460, 462

INDEX DES MATIÈRES

Accélération 29
— absolue 353
— angulaire 32
— —, vecteur 247
— centrale 35
— en chute libre 367
— de Coriolis 357
— d'entraînement 353
— normale 37
— relative 353
— tangentielle 37
—, vecteur 33
Accéléromètre 78
Action 79
— à distance 85, 324
Addition des mouvements de rotation 249
— des vecteurs mathématique 51
— — physique 51
Additivité de la masse 99
Allongement relatif 405
Altitude de l'atmosphère homogène 481
Amplitude de la marée 379
— des oscillations 73
Angle d'attaque 520
— de glissement 415
Année sidérale 39
— tropique 21, 39
Apesanteur 370
Aplatissement du globe terrestre 478
Approche classique 12
Atmosphère isothermique 480
Axe(s) de flexion 420
— instantané de rotation 246
— principaux 311
— de rotation libres 312
— — permanents 312

Banc de Joukovsky 182
Barrière de potentiel 143
Binormale 37

Cardan de suspension 277
Centre du cardan de suspension 278
— de choc 270
— de flottaison 472
— de force 134
— de gravité 112
— d'inertie 111
— de masse 111, 112
— d'oscillation 220
Champ 86
— gravitationnel 394
— des vitesses 482
Charge gravitationnelle 386
— limite 427
Choc décentré 158
— parfaitement élastique 154
— — inélastique 147
Cinématique 26
Circulation de la vitesse 523
Coefficient adiabatique 409
— de compressibilité 464
— de dureté 74
— d'élasticité 74
— de frottement 103, 105
— — interne 496
— isothermique 409
— de Poisson 408
— de résistance du conduit 515
Combinaisons sans dimension 457
Compas gyroscopique 277, 298, 299 à 301
Composantes du vecteur 49
Composition des forces 76
— des mouvements de rotation 249
Compression relative 405
— uniaxiale 413
Compteur d'eau 487
Conditions initiales 89
Cône d'herpolhodie 315
— de polhodie 315
Constante(s) élastiques 399
— gravitationnelle 320, 323
— de Kepler 319

Constante(s) de Planck 41
— universelle des gaz 450
Contraction latérale relative 408
Contrainte 401
— normale 401
— tangentielle 401
Coordonnées généralisées 60
Corps amorphes 467
— anisotropes 400
— isotropes 400
— macroscopiques 10
— parfaitement élastique 400
— solide 241
Crise de traînée 532
Critère de similitude de Froude 510
— — de Reynolds 510
Couche limite 526
Coup bas 272
— haut 272
— normal 272
Couple de rappel 474
Courbe potentielle 143
Coussin d'air 105

Débit d'eau 487
Déformations élastiques 399
— homogènes 417
— non homogènes 417
— petites 400
— plastiques (résiduelles) 399
Degrés de liberté 59
— — d'un solide 60
Densité linéaire 446
— moyenne 45
— spatiale de l'énergie élastique 408, 411, 413, 416, 418
— — d'une force 469
— vraie 45
Déplacement(s) des corps en chute libre par rapport à la ligne d'un fil à plomb 372
— gravitationnel des raies spectrales 396
— possibles 170
Dérapage 106
Dimension 453
Discontinuités tangentielles 515
Domaine simplement connexe 523
Dynamique 63
Dyne 76

Ecoulement(s) discontinus 515, 520
— laminaire 503, 512
— plan 523
— à potentiel des vitesses 523
Ecoulement(s) à potentiel des vitesses à circulation 523
— rétrograde du fluide 528
— tourbillonnaire 523
— turbulent 503, 512
Effet(s) Doppler 396
— gyroscopiques 277
— Magnus 539
— de « stagnation » 104
Ellipsoïde d'inertie 310
Energie cinétique 127, 129
— élastique 407
— gravitationnelle 326
— interne 152
— potentielle 138
— relativiste 129
— au repos 129
— de seuil 163
— totale 129, 140
Equation de Bernoulli 485
— de Clapeyron 479
— d'état 466
— d'Euler 470
— fondamentale de l'hydrodynamique d'un fluide parfait 470
— — de l'hydrostatique 470
— de Mechtcherski 117
— des moments 173
— — par rapport à une origine mobile 197
— de mouvement 72, 352
Equilibre thermique 480
Erg 126
Ether 86

Flexion 420
Fluide incompressible 465
— parfait 467
Flux 379
Force(s) 63, 64, 71
— actives 79
— centrale 134
— conservatives 136
— de contact 84
— de déviation 305
— dissipatives 138
— électromagnétiques 65
— extérieures 80
— de frottement 101
— génératrice des marées 382
— gravitationnelles 320
— de la gravitation universelle 320
— gyroscopiques 138, 294
— d'inertie 354
— — centrifuge 360

Force(s) d'inertie de Coriolis 360
— — d'entraînement 360
— — de translation 354
— intérieures 80
— de Lorentz 138
— massiques 402, 467
— non conservatives 137
— nucléaires 65
— passives 79
— de portance 516, 521
— de réaction 116
—, résultante des 76
—, somme géométrique des 76
— spatiales 402, 467
— superficielles 467
— tangentielles de frottement interne 497
— de viscosité 495
Formule barométrique 480
— de dimension 453, 455
— de Joukovski-Kutta 537
— de Newton pour la vitesse du son 449
— de Poiseuille 503
— de Stokes 522
— de Torricelli 492
— de Tsiolkovski non relativiste 117
— — relativiste 118, 131
Fréquence circulaire 213
Frottement d'adhésion 102
— extérieur 101
— fluide 102
— de glissement 101
— intérieur 101, 495
— de repos (statique) 102
— de roulement 102
— sec 101
Fusée photonique 120

Glissement 415
Gradient 166, 167, 469
Grandeurs dérivées 452
— fondamentales 451
Gyrocompas 277, 298 à 301
Gyropilote 298
Gyroscope 276
—, axe géométrique 277
—, axe de révolution 277
—, basculement 299
— équilibré (astatique) 278, 297
— libre 281
—, point d'appui ou de suspension 277
—, sommet 280, 303
— symétrique 277
—, théorie approchée 285
—, théorie exacte 303

Hauteur métacentrique 473
Herpolhodie 315
Hodographe 33
Homogénéité de l'espace 209
— du temps 209
Horizon artificiel 298
Horloge 20
Hydrodynamique 464
Hydrostatique 468

Impulsion 41, 53, 70
— du champ 88
— du corps 108
— de la force 108, 110
— rotatoire 181
— du système de points matériels 108
Indépendance des forces appliquées 77
Inertie 68
Interaction(s) de champs 87
— au contact 87
— faibles 65
Invariance des équations 49
Invariant 56
— adiabatique 234
Inversion 15
Isotropie de l'espace 208

Joukovsky, banc de 182
Joule (unité de travail) 126
Jour sidéral 20
— solaire 21

Kepler, lois de 318, 339
Kilogramme 69

Liaisons 60
— idéales 170
Ligne des centres 154
— de courant 482
— de décollement 520
— du fil à plomb 368
— neutre 420
Limite d'élasticité 399
Loi(s) des aires 177
— d'Archimède 471
— de la composition des vitesses non relativiste 94
— — — relativiste 131
— de conservation de l'énergie 140, 153
— — de l'impulsion 70, 80

Loi(s) de conservation de la masse 99
— — — et de l'énergie 100
— — de la matière 99
— — du moment cinétique 174
— — du poids 99
— de l'équivalence des masses grave et d'inertie 386
— de frottement 100
— de Galilée généralisée 366
— de la gravitation universelle 320
— de Hooke 74, 400, 406
— de Kepler deuxième 318, 339
— — première 318, 339
— — troisième 318, 339
— de Newton deuxième 63, 72
— — première 63, 64
— — troisième 64, 78
— de Pascal 463
— de similitude des écoulements 508
Longueur critique 427
— d'une tige en mouvement 25

Machine d'Atwood 198
Marée(s) basse 380
— grandes (syzygie) 384
— haute 380
— petites 384
— de quadrature 384
Masse 63, 68
— associée 518
— grave 386
— d'inertie 68, 385
— réduite 113
— relativiste 70
— au repos 70
— variable 115
Mécanique 9
— de Newton 12
— du point 27
— quantique 12
— relativiste 11
— du système 28
Métacentre 473
Métagalaxie 18, 120
Méthode des approximations successives 372
— des principes fondamentaux 9
Mètre 22
Module adiabatique 409
— de compression triaxiale 413
— de glissement 415
— isothermique 409
— de torsion 225, 417
— de traction uniaxiale 414
— de Young 405
Mole 450

Moment cinétique par rapport à un axe 178
— — — à un point 173
— d'une force par rapport à un axe 178
— — — à un point 172, 173
— d'inertie par rapport à un axe 180
— — — à un point 191
— — de la section droite 422
— — — transversale du navire 474
Monorail 302
Mouvement 9
— absolu 352
— d'entraînement 352
— fini 143, 331
— hélicoïdal 252
— hyperrelativiste 130
— d'inertie 64
— infini 143, 331
— lent 10
— libre 64
— oscillatoire harmonique 213
— — sinusoïdal 213
— sur périmètre du gyroscope 295
— plan 252
— rapide 10
— relatif 352
— de rotation instantané 246
— uniforme 30
— uniformément accéléré 31

Neutrino 153
Newton, lois de 63, 64
Newton (unité de force) 76
Nombre de Froude 508
— de Mach 508
— de Reynolds 508
— — critique 514
— de Strouhal 508
Normale principale 36

Ondes de choc 432
Opérateur de Hamilton 166
— nabla 166
Oscillateur harmonique 234
Oscillations harmoniques 213
— isochrones 216
— paramétriques 237

Paradoxe de D'Alembert 517
— hydrostatique 476
Paramètre de choc 338
Pas de géant 205
Pendule balistique 150

Pendule conique 307
— cycloïdal 230
— de Foucault 375
— gyroscopique 287
— —, longueur réduite 287
— pesant 218
— —, centre d'oscillation 220
— —, longueur réduite 220
— —, points conjugués 220
— —, point de suspension 218, 219
— réversible 222
— simple 219
Période d'oscillation 214
Perturbations petites 432
Pesanteur artificielle 370
Phase 214
— initiale 214
Plan fixe 314
Poids d'un corps 367
Point d'arrêt 489
— figuratif 305
— matériel 27
Pôle 314
Polhodie 315
Potentiel générateur des marées 382
— des vitesses 524
Précession lente 307
— libre 281
— quasi régulière 289
— rapide 307
— régulière 290
— stimulée 285
Pression dynamique (ou cinétique) 490
— totale 490
Principe d'équivalence des forces gravitationnelles et des forces d'inertie 393
— d'incertitude 41
— de Le Chatelier 290
— de Mach 395
— de relativité 97
— — d'Einstein 98
— — de Galilée 95
— de la superposition des champs gravitationnels 320
— — des contraintes élastiques 437
— — des petites déformations 407
— — — perturbations 436
— — des petits mouvements (déplacements) 437
— — des vitesses 437
Problème direct de la mécanique 364
— inverse de la mécanique 364
Processus adiabatique 233
— quasi statique 407
Produit mixte 57
Produit scalaire 50, 57
— vectoriel 56
Pseudo-scalaire 56
Pseudo-vecteur 56
Puits de potentiel 143
Pulsars 207
Pulsation 213
Pulvérisateur 488

Quantité(s) de matière 63
— de mouvement 63
— physiquement infiniment petites 46

Ralentissement des neutrons 161
Rayon d'inertie 264
— de roulement 264
Réaction(s) 79
— de liaison 75
Référentiel 14
— copernicien 66
— fixe 352
— d'inertie 66, 395
— de laboratoire 156
— lié au centre de masse 155
— spatio-temporel 22
Réflexion par rapport à l'origine 15
Reflux 379
Région (zone) de « stagnation » 104, 520
Règle des dimensions 459
— de Foucault 299
— du parallélogramme 47
— de Reynolds 514
— du tire-bouchon 15
Repère 14
Résistance frontale 516
— du milieu 105
Rotation angulaire 253
Rotor du vecteur 524

Saut périlleux 183
Scalaire 46, 50
— vrai 56
Seconde 22
Section neutre 421
Sillage 531
— de Karman 529
Similitude hydrodynamique 508
— mécanique 508
Simultanéité 24
Solide parfait 60, 241
Sonde 490
Stabilité de l'équilibre 170

Surface de niveau 166
Suspension bifilaire 223
— trifilaire 224
Système(s) fermé 68
— international des unités de mesure (SI) 75
— isolé 68
— de référence 14
— — héliocentrique 66
— — terrestre 66
— statiquement indéterminés 243
— d'unités CGS 76, 453
— — LMT 453
— — LMTI 453
— — MKSA 453

Temps 20
— local 22
— unique 23
Tenseur 310
— des contraintes élastiques 403
— d'inertie 310
Tension 404
Théorème de Coriolis 357
— d'Euler 259
— de Huygens 220
— de Huygens-Steiner 190
— de König 132
— du mouvement du centre de masse 111, 112
— de viriel 144
Théorie des dimensions 454
— des marées statique 383
— de la similitude 454
Tonnage de déplacement 475
Torsion 417
Toupie 277
—, basculement 294
— chinoise 293
Tourbillon 524
Traction uniaxiale 413
Traînée 516, 521
Transformation de Galilée 93
— de Lorentz 94
Travail 125
— effectué lors d'un déplacement fini 125
— élémentaire 125
Triangulation 16
Tube de courant 483
— de Pitot 490
— de Prandtl 491
— de Venturi 487

Vecteur(s) 46, 49
— axial 56
— polaire 56
— réciproques 59
— de la surface 55
Verticale artificielle 298
Viriel des forces 144
Viscosité 496
— cinématique 504
— dynamique 504
Vitesse(s) absolue 353
— angulaire 31
— —, vecteur 247
— aréolaire 177
— circulaire 333
— cosmique deuxième 119, 343
— — première 118, 343
— — quatrième 345
— — troisième 119, 344, 345
— critique 514
— d'entraînement 353
— généralisées 60
— initiale 31
— instantanée 29
— —, vecteur 33
— du jet gazeux 116
— moyenne 33
— parabolique 333
— de propagation des oscillations de torsion 445
— — des perturbations longitudinales 442, 443
— — — transversales 444, 445
— — — — dans une corde tendue 446
— relative 353
— du son 449
— vraie 29
— —, vecteur 33

Watt 126

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 5
Introduction 9

Chapitre premier. LA CINÉMATIQUE

§ 1. L'espace et le temps 14
§ 2. Description cinématique du mouvement. Le concept de point matériel 26
§ 3. Vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement rectiligne. Vitesse et accélération angulaires 28
§ 4. Vitesse et accélération dans le mouvement curviligne . . . 32
§ 5. Limites de validité de la description classique du mouvement 41
§ 6. Sur la signification de la dérivée et de l'intégrale en physique 42
§ 7. Remarques sur les vecteurs et la composition des mouvements 46
§ 8. Degrés de liberté et coordonnées généralisées 59

Chapitre II. LES LOIS DE NEWTON [redacted]

§ 9. La loi d'inertie. Référentiel d'inertie 64
§ 10. La masse et la loi de conservation de l'impulsion 68
§ 11. Deuxième loi de Newton. La force 71
§ 12. La troisième loi de Newton et la loi de conservation de l'impulsion 78
§ 13. Interactions à distance et interactions des champs . . . 84
§ 14. Importance des conditions initiales 89
§ 15. Le principe de relativité de Galilée 92
§ 16. Additivité et loi de conservation de la masse 98
§ 17. Les lois de frottement 100

Chapitre III. CONSÉQUENCES ET APPLICATIONS DES LOIS DE NEWTON

§ 18. Impulsion de la force et variation de la quantité de mouvement 108
§ 19. Théorème du mouvement du centre de masse 111
§ 20. La masse réduite 113
§ 21. Mouvement des corps de masse variable. Propulsion par réaction 115

Chapitre IV. LE TRAVAIL ET L'ÉNERGIE

§ 22. Le travail et l'énergie cinétique 125
§ 23. Relation entre les énergies cinétiques dans différents référentiels. Théorème de König 132
§ 24. Forces conservatives et non conservatives 133
§ 25. L'énergie potentielle et la loi de la conservation de l'énergie en mécanique 138
§ 26. Choc parfaitement inélastique 147
§ 27. L'énergie interne. Loi physique générale de la conservation de l'énergie 151
§ 28. Choc parfaitement élastique 154
§ 29. Les forces et l'énergie potentielle 164

Chapitre V. LE MOMENT DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

§ 30. Moment d'une force et moment cinétique par rapport à une origine fixe 172
§ 31. Relation entre le moment cinétique d'un point matériel et sa vitesse aréolaire. Le théorème des aires 176
§ 32. Moment cinétique et moment des forces par rapport à un axe fixe 178
§ 33. Equation du moment cinétique d'un corps assujetti à une rotation autour d'un axe fixe. Moment d'inertie 180
§ 34. Exemples d'application de la loi de conservation de l'impulsion rotatoire 182
§ 35. Le théorème de Huygens-Steiner 189
§ 36. Calcul des moments d'inertie 190
§ 37. Equation des moments par rapport à une origine et à un axe mobiles 197
§ 38. Les lois de conservation et la symétrie de l'espace et du temps 208

Chapitre VI. LES OSCILLATIONS HARMONIQUES

§ 39. Cinématique du mouvement oscillatoire harmonique . . . 213
§ 40. Oscillations harmoniques d'un pendule élastique 214
§ 41. Pendule pesant 218
§ 42. Suspensions bifilaire et trifilaire 223
§ 43. Les invariants adiabatiques 233

Chapitre VII. LA MÉCANIQUE DES SOLIDES

§ 44. Les corps solides en mécanique. Equations de mouvement et d'équilibre des corps solides 241
§ 45. Axe instantané de rotation 245
§ 46. La vitesse angulaire considérée comme vecteur. Composition des mouvements de rotation 247
§ 47. Théorème d'Euler. Mouvement général d'un solide 258
§ 48. Roulement des corps sur un plan incliné 262
§ 49. Les gyroscopes. Mouvement du gyroscope libre 276
§ 50. Action des forces sur le gyroscope. Théorie approchée . . 284
§ 51. Les applications des gyroscopes 297
§ 52. Fondements de la théorie exacte du gyroscope symétrique 303
§ 53. Tenseur et ellipsoïde d'inertie 309
§ 54. Rotation par inertie d'un corps solide autour d'un point fixe 313

Chapitre VIII. LA GRAVITATION

§ 55. Lois de Kepler et loi de la gravitation universelle 318
§ 56. Accélération des planètes et des comètes en mouvement sur des sections coniques 328
§ 57. Mouvements elliptique, parabolique et hyperbolique . . . 331
§ 58. Calcul des paramètres de l'orbite 334
§ 59. Influence du mouvement du Soleil 338
§ 60. Applications de la loi de la gravitation universelle à la pesanteur terrestre 340
§ 61. Vitesses cosmiques 342
§ 62. Etablissement des lois régissant le mouvement des planètes à partir de la loi de la gravitation universelle de Newton 348

Chapitre IX. ÉTUDE DES MOUVEMENTS PAR RAPPORT À DES SYSTÈMES NON INERTIELS

§ 63. Forces d'inertie apparaissant dans les référentiels en mouvement de translation accéléré 351
§ 64. Forces d'inertie apparaissant dans un référentiel en mouvement accéléré arbitraire 355
§ 65. Equation du mouvement relatif d'un point matériel dans le champ de la gravitation terrestre, compte tenu de la rotation de la Terre 365
§ 66. Poids et pesée du corps 367
§ 67. Déplacement des corps en chute libre par rapport à la ligne d'un fil à plomb 372
§ 68. Pendule de Foucault 375
§ 69. Les marées 379
§ 70. Masse grave et loi de Galilée généralisée 385
§ 71. Principe d'équivalence des forces de gravitation et des forces d'inertie 391
§ 72. Déplacement gravitationnel des raies spectrales 396

Chapitre X. MÉCANIQUE DES CORPS ÉLASTIQUES

§ 73. Corps parfaitement élastiques 399
§ 74. Contraintes élastiques 401
§ 75. Traction et compression des tiges 404
§ 76. Déformations d'un parallélépipède droit sous l'action de trois forces rectangulaires 410
§ 77. Traction et compression uni- et triaxiales 412
§ 78. Le glissement 414
§ 79. La torsion 417
§ 80. La flexion 420
§ 81. Vitesse de propagation des perturbations élastiques longitudinales dans les tiges 429
§ 82. Application du principe de superposition 436
§ 83. Vitesses de propagation des perturbations longitudinales et transversales dans un milieu illimité 442
§ 84. Vitesse de propagation des perturbations transversales dans une corde tendue 445
§ 85. Vitesses de propagation du son dans les liquides et les gaz 448

Chapitre XI. RAPPORTS DE SIMILITUDE ET DIMENSIONS

§ 86. Formules de dimensions et unités de mesure 451

§ 87. Formule de dimensions 453
§ 88. Règle des dimensions 458

Chapitre XII. MÉCANIQUE DES FLUIDES

§ 89. Propriétés générales des fluides 463
§ 90. Equations fondamentales d'équilibre et de mouvement des fluides 467
§ 91. Hydrostatique des fluides incompressibles 471
§ 92. Formule barométrique 479
§ 93. Description cinématique de l'écoulement d'un fluide . . 482
§ 94. Ecoulement permanent d'un fluide parfait. Equation de Bernoulli 484
§ 95. Exemples d'application de l'équation de Bernoulli. Formule de Torricelli 491
§ 96. La viscosité 495
§ 97. Ecoulement permanent d'un fluide dans un conduit rectiligne. Formule de Poiseuille 501
§ 98. Lois de la similitude hydrodynamique 507
§ 99. Turbulence et instabilité hydrodynamique 512
§ 100. Paradoxe de D'Alembert. Ecoulements discontinus . . 516
§ 101. Application de la théorie dimensionnelle 520
§ 102. Ecoulements tourbillonnaires et à potentiel des vitesses 523
§ 103. Couche limite et effet de décollement 526
§ 104. Portance d'une aile d'avion 532
§ 105. L'effet Magnus 539
Index des noms 541
Index des matières 543

A NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse: Editions Mir, 2, Pervi Rijski péréoulok, Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique